Příklady k zamyšlení z numerické matematiky

1. Uveďte příklad nelineární rovnice a intervalu $\langle a, b\rangle$, na kterém rovnici řešíte, tak, aby

   (a) *metoda bisekce* nalezla řešení této rovnice na $\langle a, b\rangle$ pro zastavovací podmínku s $\varepsilon = 0.01$ po více než 10-ti krocích, zatímco *metoda regula falsi* nejvýše do 5-ti kroků.

   (b) *metoda regula falsi* nalezla řešení této rovnice na $\langle a, b\rangle$ pro zastavovací podmínku s $\varepsilon = 0.01$ po více než 10-ti krocích, zatímco *metoda bisekce* nejvýše do 5-ti kroků.

2. Uveďte příklad nelineární rovnice, intervalu $\langle a, b\rangle$, na kterém rovnici řešíte, počáteční iterace x_0 a dvou různých předpisů $x = \varphi(x)$ tak, aby metoda prosté iterace pro první předpis nekonvergovala k přesnému řešení, zatímco pro druhý předpis ano.

3. Uveďte příklad nelineární rovnice, intervalu $\langle a, b\rangle$, na kterém rovnici řešíte, počáteční iterace x_0 a předpisu $x = \varphi(x)$ tak, aby *metoda prosté iterace* sice konvergovala k přesnému řešení, ale velmi pomalu, tj. aby např. pro zastavovací podmínku s $\varepsilon = 0.01$ nalezla přibližné řešení, které se od přesného řešení liší více než o 0.1 ($= 10\varepsilon$).

4. Uveďte příklad nelineární rovnice $f(x) = 0$ a počáteční aproximace x_0 tak, aby přibližné řešení této rovnice nalezené *Newtonovou metodou* při použití zastavovací podmínky ve tvaru $|f(x_k)| < \varepsilon$ bylo zatíženo chybou nejméně 10ε a
   aby přibližné řešení této rovnice nalezené *Newtonovou metodou* při použití zastavovací podmínky ve tvaru $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ bylo zatíženo chybou nejvýše $\varepsilon/10$.

5. Uveďte příklad nelineární rovnice $f(x) = 0$ a počáteční aproximace x_0 tak, aby přibližné řešení této rovnice nalezené *Newtonovou metodou* při použití zastavovací podmínky ve tvaru $|f(x_k)| < \varepsilon$ bylo zatíženo chybou nejvýše $\varepsilon/10$ a
   aby přibližné řešení této rovnice nalezené *Newtonovou metodou* při použití zastavovací podmínky ve tvaru $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ bylo zatíženo chybou nejméně 10ε.

6. Pomocí *metody prosté iterace* najděte všechna řešení soustavy nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 4 &= 0 \\ x^2 - y^2 - 4x + 2y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

7. Uveďte příklad soustavy 4 lineárních algebraických rovnic pro 4 neznámé $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tak, aby tato soustava měla jediné řešení a aby algoritmus Gaussovy eliminační metody nebyl pro tuto soustavu realizovatelný. Řešení určete pomocí Gaussovy eliminační metody se sloupcovou pivotací.

8. Najděte matici $\mathbf{A}$ řádu 4 a vektor $\mathbf{b}$ typu $4|1$ tak, aby při řešení soustavy rovnic
$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
Jacobiova metoda konvergovala, zatímco *Gauss-Seidelova metoda* divergovala.

9. Najděte matici $\mathbf{A}$ řádu 4 a vektor $\mathbf{b}$ typu $4|1$ tak, aby při řešení soustavy rovnic
$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
Jacobiova metoda divergovala, zatímco *Gauss-Seidelova metoda* konvergovala.

10. Najděte matici $\mathbf{A}$ řádu 2, vektor $\mathbf{b}$ typu $2|1$ a dvě různé počáteční volby $\mathbf{x}_I^{(0)}$ a $\mathbf{x}_{II}^{(0)}$ tak, aby při řešení soustavy rovnic
$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
metoda největšího spádu při počáteční volbě $\mathbf{x}_I^{(0)}$ dosáhla přesného řešení během 1. iterace zatímco při počáteční volbě $\mathbf{x}_{II}^{(0)}$ byla norma chyby 10-té iterace větší než 0.1, tj. $\|\mathbf{x}_{II}^{(10)} - \tilde{\mathbf{x}}\| > 0.1$, kde $\tilde{\mathbf{x}}$ je přesné řešení.

11. Uveďte příklad čtvercové regulární matice, pro kterou nelze určit vlastní čísla pomocí *LR-transformace*.

12. Uveďte příklad čtvercové regulární matice, pro kterou nelze určit vlastní čísla pomocí *QR-transformace*.

13. Uveďte příklad čtvercové matice $\mathbf{A}$, pro kterou *mocninná metoda* s počáteční aproximací $\mathbf{y}^{(0)} = [1, 1, \ldots, 1]^T$ nevypočte dominantní vlastní číslo matice $\mathbf{A}$. Dominantní vlastní číslo matice vypočtěte pomocí jiné volby počáteční aproximace $\mathbf{y}^{(0)}$.

14. Uveďte příklad symetrické čtvercové matice $\mathbf{A}$, pro kterou *metoda Rayleighova podílu* s počáteční aproximací $\mathbf{y}^{(0)} = [1, 0, 0 \ldots, 0]^T$ nevypočte dominantní vlastní číslo matice $\mathbf{A}$. Dominantní vlastní číslo matice vypočtěte pomocí jiné volby počáteční aproximace $\mathbf{y}^{(0)}$.

15. Uveďte příklad funkce $f(x)$, bodu x_0 a okolí tohoto bodu $\mathcal{U}(x_0)$ tak, aby *Taylorův polynom* 5.stupně $T_5(x)$ byl přesně roven funkci f na okolí $\mathcal{U}(x_0)$, zatímco *Taylorův polynom* 4.stupně $T_4(x)$ byl různý od $f(x)$ pro $\forall x \in \mathcal{U}(x_0) - x_0$.

16. Uveďte příklad funkce f zadané tabulkou o 5-ti bodech tak, aby *interpolační polynom* byl třetího stupně a po vynechání libovolného jednoho bodu z tabulky se interpolační polynom nezměnil.

17. Uveďte příklad funkce f zadané tabulkou o 5-ti bodech a bodu α, ve kterém chceme určit přibližnou hodnotu funkce f pomocí *Nevilleova algoritmu* tak, aby se výpočet mohl ukončit dříve než po 5-ti krocích se zadanou tolerancí $\varepsilon = 0,001$ pro rozdíl dvou po sobě jdoucích aproximací $f(\alpha)$.

18. Uveďte příklad funkce f zadané tabulkou o 4-ti bodech, pro kterou *kubický spline* s přirozenými podmínkami totožný s interpolačním polynomem.

19. Uveďte příklad funkce f zadané tabulkou o 5-ti bodech, pro kterou se *diskrétní L_2-aproximace* lineární funkcí nezmění při vypuštění jednoho konkrétního bodu z tabulky, zatímco při vypuštění libovolného jiného bodu se změní.

20. Uveďte příklad funkce f zadané tabulkou o 4-ti bodech, pro kterou je *diskrétní L_2-aproximace* kvadratickou funkcí pouze lineární funkce.

21. Uveďte příklad funkce f zadané tabulkou o 5-ti bodech, pro kterou dá *Fourierova analýza* s užitím prvních čtyř bázových trigonometrických polynomů (ve smyslu diskrétní L_2-aproximace) výsledek, u kterého jsou současně splněny interpolační podmínky.

22. Odvoďte vzorec *centrální poměrné diference* $D_C f(x_0, h)$ pro přibližný výpočet derivace funkce f v bodě x_0 pomocí interpolačního polynomu. (Interpolační polynom je dán hodnotami v uzlech $x_0 - h$, x_0 a $x_0 + h$.)

23. Uveďte příklad hladké funkce f, bodu x_0 a kroku h tak, aby přibližná hodnota derivace $f'(x_0)$ vypočtená pomocí *centrální poměrné diference* byla horší než přibližná hodnota derivace vypočtená pomocí *pravé poměrné diference*. Jaký výsledek dostaneme použitím *levé poměrné diference* (a proč) ?

24. Odvoďte základní vzorec *Sipsonova pravidla* pro přibližný výpočet integrálu funkce f přes interval $\langle x_k, x_{k+2}\rangle$.

25. Uveďte příklad funkce f a intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, aby přibližná hodnota integrálu

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

vypočtená pomocí *obdélníkového pravidla* byla lepší než přibližná hodnota integrálu vypočtená pomocí *lichoběžníkového* a dokonce i *Simpsonova pravidla*. Pro jednoduchost použijte základní vzorce.

26. Uveďte příklad funkce f a intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, aby přibližná hodnota integrálu

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

vypočtená pomocí *Gaussova kvadraturního vzorce se dvěma uzly* byla lepší než přibližná hodnota integrálu vypočtená pomocí *Gaussova kvadraturního vzorce se třemi uzly*. Pro jednoduchost použijte základní vzorce.

27. Uveďte příklad počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu (s nenulovým řešením), pro kterou bude *Eulerova metoda* totožná s *metodou Taylorova typu 2. řádu*.

28. Uveďte příklad počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu (s nenulovým řešením), pro kterou bude *metoda Taylorova typu 2. řádu* totožná s *metodou Taylorova typu 3. řádu*, ale různá od *Eulerovy metody*.

29. Uveďte příklad počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu (s nenulovým řešením), pro kterou bude *modifikovaná Eulerova metoda* totožná s *Heunovou metodou*, ale různá od *Eulerovy metody*.