Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

S pojmem *vlastního čísla* jsme se již setkali například u iteračních metod pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Velikosti vlastních čísel iterační matice rozhodovaly o konvergenci příslušné iterační metody. S úlohou na vlastní čísla se setkáme i v aplikacích při řešení řady technických a fyzikálních problémů.

Úlohu na vlastní čísla si připomeneme na příkladu.

Příklad: Stanovte taková čísla λ, pro která má homogenní soustava $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ nenulové řešení, a určete toto řešení, kde matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešíme tedy soustavu

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aby homogenní soustava měla nenulové řešení, musí být determinant soustavy nulový. Hledáme proto taková λ, aby

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0.$$

Dostali jsme algebraickou rovnici stupně 3 a pouze pro její kořeny

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 1$$

nazývané *vlastní čísla* matice $\mathbf{A}$, bude mít uvažovaná soustava nenulové řešení.

Ke každému vlastnímu číslu λ_i můžeme najít nenulové řešení homogennísoustavy

$$(\mathbf{A} - \lambda_i I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Např. pro $\lambda_1 = 3$ řešíme soustavu

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matice soustavy je samozřejmě singulární a proto bude existovat celý systém řešení v závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$. Každý vektor $[0, r, r]^T$ řeší danou soustavu. Ze systému vybereme jednoho zástupce, např. $\mathbf{v}^{(1)} = [0, 1, 1]^T$, a říkáme, že $\mathbf{v}^{(1)}$ je *vlastní vektor* odpovídající vlastnímu číslu λ_1. Podobně bychom nalezli vlastní vektory odpovídající vlastním číslům λ_2 a λ_3. □

Definice: Je dána čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n. *Vlastní čísla* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou kořeny *charakteristické rovnice*

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Ke každému vlastnímu číslu λ_i existuje alespoň jedno nenulové řešení soustavy rovnic $\mathbf{Av} = \lambda_\mathbf{i}\mathbf{v}$. Toto řešení $\mathbf{v}$ nazveme *vlastním vektorem.*

Poznámka: Charakteristický polynom je stupně $n \Rightarrow \exists\, n$ vlastních čísel.

Definice: Matici $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_\mathbf{1}, \lambda_\mathbf{2}, \dots, \lambda_\mathbf{n})$ nazýváme *spektrální maticí* matice $\mathbf{A}$.

Poznámka: Vlastní čísla horní trojúhelníkové matice jsou rovna jejím diagonálním prvkům, neboť charakteristický polynom má tvar:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda).$$

Úlohy na nalezení vlastních čísel rozdělíme do dvou skupin:

Úplný problém vl. čísel – úloha najít všechna vlastní čísla

Částečný problém vl. čísel – úloha najít pouze některá vl. čísla (obvykle s nejmenší nebo největší abs. hodnotou).

Příklad: Určete vlastní čísla a vlastní vektory těchto matic:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \quad \mathbf{D} = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Řešení: Všechny zadané matice mají stejný charakteristický polynom

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = p_{\mathbf{B}}(\lambda) = p_{\mathbf{C}}(\lambda) = p_{\mathbf{D}}(\lambda) = (2 - \lambda)^3,$$

Vidíme, že $\lambda = 2$ je trojnásobné vl. číslo všech čtyř matic.

Vlastní vektory

A: $v^{(1)} = (1,0,0)^T$
$v^{(2)} = (0,1,0)^T$
$v^{(3)} = (0,0,1)^T$

Pozn.: matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ je nulová, tj. systém všech řešení rovnice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{0}$ je lin. kombinací $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$.

B: $v^{(1)} = (1,0,0)^T$
$v^{(3)} = (0,0,1)^T$

Pozn.: $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C: $v^{(1)} = (1,0,0)^T$
$v^{(2)} = (0,1,0)^T$

D: $v^{(1)} = (1,0,0)^T$

Pozn.: $\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

□

Poznámka:
Počet lineárně nezávislých vlastních vektorů může být menší než je řád matice.

Věnujme se nejprve metodám na řešení **úplného problému**. Metody rozdělíme takto:

1) metody založené na výpočtech vlastních čísel pomocí charakteristického polynomu

   Nevýhodné pro velká n (řád matice $\mathbf{A}$), protože je obtížné vypočítat $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ z definice determinantu.

2) metody využívající podobnosti matic

   Tato kategorie metod využívá faktu, že podobné matice mají stejná vlastní čísla.
   Princip: konstruujeme posloupnost navzájem podobných matic, která konverguje k matici, jejíž vlastní čísla se dají jednoduchým způsobem určit.

3) smíšené metody založené na převodu obecné matice na matici třídiagonální (např. Givensova, Householderova a Lanczosova metoda) a následný efektivní výpočet kořenů charakteristického polynomu této upravené matice.

Metoda LU-rozkladu

(LR-transformace, LR-algoritmus)

$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ ... rozklad matice $\mathbf{A}$ na dolní trojúhelníkovou matici $\mathbf{L}$ a horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{U}$, kde na diagonále matice $\mathbf{L}$ jsou pro jednoznačnost rokladu jednotky. Sestrojíme matici $\mathbf{B}$, která bude podobná matici $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{B} = \mathbf{UL} \qquad (\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{UL} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{AL}).$$

Postup:

Sestrojíme posloupnost matic $\mathbf{A}_k$:
(i) $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \; k = 0$
(ii) provedeme LU rozklad matice $\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k$
(iii) sestrojíme matici $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{U}_k\mathbf{L}_k$
(iv) je-li matice $\mathbf{A}_{k+1}$ horní trojúhelníková $\Rightarrow$ konec, jinak $k = k + 1$ a jdi na (ii)

Poznámka: Dá se ukázat, že když matice $\mathbf{B}_k = \mathbf{L}_0\mathbf{L}_1 \ldots \mathbf{L}_k$ konvergují k regulární matici, potom matice $\mathbf{A}_k$ také konvergují, a to k horní trojúhelníkové matici s vlastními čísly na diagonále. Platí

$$\mathbf{A}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{L}_k^{-1}\mathbf{A}_k}_{\mathbf{U}_k}\mathbf{L}_k$$

a tedy

$$\mathbf{A}_{k+1} = \underbrace{\mathbf{L}_k^{-1}\mathbf{L}_{k-1}^{-1} \ldots \mathbf{L}_0^{-1}}_{\mathbf{B}_{k+1}^{-1}}\mathbf{A}_0\underbrace{\mathbf{L}_0\mathbf{L}_1 \ldots \mathbf{L}_k}_{\mathbf{B}_{k+1}}$$

Poznámka: Je-li matice $\mathbf{A}$ symetrická a pozitivně definitní, provádíme LU-rozklad ve smyslu Choleského rozkladu, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^T$. Potom lze ukázat, že $\mathbf{A}_k$ konverguje k diagonální matici.

Nevýhody:

- pomalá konvergence posloupnosti $\mathbf{A_k}$
- velký počet operací pro matice větších řádů
- nelze realizovat pro obecné matice $\mathbf{A}$

Poznámka: Jestliže pro dostatečně velké k je $\mathbf{A}_k$ horní trojúhelníková matice, potom vlastní vektory jsou (přibližně) sloupce matice $\mathbf{B}_k = \mathbf{L}_0\mathbf{L}_1 \ldots \mathbf{L}_{k-1}$.

Metody ortogonálních transformací

Použijeme podobný princip jako v předchozím případě, tj. sestrojíme posloupnost podobných matic $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \ldots$ tak, že

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{Q}_k, \quad k = 0, 1, 2 \ldots .$$

Požadujeme, aby posloupnost $\mathbf{A}_k$ konvergovala k matici, jejíž vlastní čísla lehce určíme. Ortogonální matici $\mathbf{Q}_k$ vybíráme speciálním postupem. Výhodou tohoto algoritmu je *numerická stabilita*.

Poznámka: Pro obecnou matici používáme metodu *QU-rozkladu* (*QR-transformace*).

$\mathbf{A} = \mathbf{QU}$ $\quad \mathbf{Q} \ldots$ ortogonální matice ($\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$, tj. $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{-1}$)
$\quad \mathbf{U} \ldots$ horní trojúhelníková matice
$\mathbf{B} = \mathbf{UQ}$ $\quad (\mathbf{U} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q})$.

Motivační příklad: Příkladem ortogonální matice je matice rovinné rotace o úhel α:

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \overset{\text{ozn}}{=} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}.$$

Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stanovte matici $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\alpha)\mathbf{A}\mathbf{Q}(\alpha)$ tak, aby $b_{12} = 0$.

Řešení: Rozepíšeme si prvky matice $\mathbf{B}$:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2c + s & c + 3s \\ -2s + c & -s + 3c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2c^2 + cs + cs + 3s^2 & -2cs - s^2 + c^2 + 3cs \\ -2cs + c^2 - s^2 + 3cs & 2s^2 - cs - cs + 3c^2 \end{bmatrix}.$$

Pro splnění podmínky $b_{12} = 0$ musí platit

$$-2cs - s^2 + c^2 + 3cs = cs - s^2 + c^2 = 0,$$

tj.

$$\underbrace{\cos\alpha\sin\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\underbrace{-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{+\cos 2\alpha}=0.$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$-2=\tan 2\alpha$$

$$\underline{\alpha \doteq -0,5535}$$

Po dosazení dostaneme, že

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 3,6180 & 0 \\ 0 & 1,3819 \end{bmatrix}.$$

B je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále a stejná vlastní čísla má i matice **A**.
$\square$

Poznámka: Podobně jako v předchozí metodě, pro dostatečně velké k je $\mathbf{A}_k$ horní trojúhelníková matice a vlastní vektory jsou (přibližně) sloupce matice $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_{k-1}$.

Poznámka: Pro symetrickou matici **A** vede uvedený postup na tzv. *metodu Jacobiovy diagonalizace.*

Speciální případ QR-transformace
Jacobiova diagonalizace

Věta: Je-li $\mathbf{A}$ reálná symetrická matice, potom existuje ortogonální matice $\mathbf{Q}$ tak, že $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ (diagonální matice s vlastními čísly na diagonále – *spektrální matice*).

Princip: Matici $\mathbf{Q}$ získáme součinem matic $\mathbf{Q}_{p,q}(\alpha)$, kde

$$
\mathbf{Q}_{p,q}(\alpha) \quad = \quad \begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& \cos\alpha & \dots & \dots & \dots & -\sin\alpha &&& \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
&&& \sin\alpha & \dots & \dots & \dots & \cos\alpha &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow p\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \\ \leftarrow q\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccccc}
&&& \uparrow &&&& \uparrow &&& \\
&&& p\text{-tý sloupec} &&&& q\text{-tý sloupec} &&&
\end{array}
&
\end{array}
$$

a α volíme tak, abychom vynulovali prvek v pozici p, q a tedy i v pozici q, p.

$\mathbf{Q} = \prod_{p,q} \mathbf{Q}_{p,q}(\alpha)$ — postupně vynulujeme všechny nediagonální prvky.

Poznámka: Při výpočtech nemusíme určovat úhel α, ale lze odvodit přímé vzorce.

Poznámka: Zbývá zvolit strategii na volbu indexů p a q. Nejjednodušší je postupně nulovat všechny mimodiagonální prvky (podobně jako v Gaussově eliminační metodě pro řešení soustavy lineárních rovnic). Uvědomme si ale, že se získané nuly z předchozího kroku obecně nezachovají. Další možností je nulovat vždy mimodiagonální prvek, který je největší v absolutní hodnotě (zde je třeba v každé iteraci vyhledat tento prvek, což zpomalí výpočet). Iterační proces zastavíme, je-li norma trojúhelníkové matice pod diagonálou menší než zadaná tolerance.

Pro řešení Částečného problému si uvedeme dvě metody.

Mocninná metoda

Chceme určit vl. číslo matice $\mathbf{A}$ s největší absolutní hodnotou (*dominantní vlastní číslo*).

Předpoklady:

1. $\mathbf{A}$ má n-lineárně nezávislých vlastních vektorů
2. existuje jediné dominantní vlastní číslo
3. vlastní čísla lze seřadit: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

Odvození:

1. Zvolíme $\mathbf{y}^{(0)}$ jako lin. kombinaci vl. vektorů

$$\mathbf{y}^{(0)} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

2. Sestrojíme posloupnost

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k-1)}, \quad \text{tj. } \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{A}^k \mathbf{y}^{(0)}.$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \alpha_1 \mathbf{A}^k \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}^k \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{A}^k \mathbf{v}_n.$$

3. Platí: $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$, potom

$$\mathbf{y}^{(k)} = \alpha_1 \underbrace{\lambda_1^k}_{*} \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k \mathbf{v}_n. \qquad {}^{*}\text{dominantní vl. číslo (vytkneme)}$$

4. dostaneme:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \lambda_1^k \Bigg[\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k}^{\to 0} \mathbf{v}_i}_{\varepsilon_k \to \mathbf{0}} \Bigg].$$

5. analogicky pro $\mathbf{y}^{(k+1)}$
6. vybereme j-tou složku $\mathbf{y}^{(k)}$ a $\mathbf{y}^{(k+1)}$, vydělíme je a provedeme limitní přechod

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_j^{(k+1)}}{y_j^{(k)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1^{k+1}(\alpha_1 v_{1,j} + \overbrace{\varepsilon_{k+1,j}}^{\to 0})}{\lambda_1^k(\alpha_1 v_{1,j} + \underbrace{\varepsilon_{k,j}}_{\to 0})} = \lambda_1$$

Příklad: Mocninnou metodou stanovte dominantní vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{y}^{(0)} = [1, 1, 1]^T.$$

Řešení: Použijeme iterační formuli $\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)}$, pro $k = 0, 1, \ldots$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{y}^{(1)} = [2; 3; 2]^T & \lambda_1^{(1)} = \dfrac{y_2^{(1)}}{y_2^{(0)}} = 3, \\[2ex] \mathbf{y}^{(2)} = [5; 7; 5]^T & \lambda_1^{(2)} = \frac{7}{3} \approx 2,3333, \\[2ex] \mathbf{y}^{(3)} = [12; 17; 12]^T & \lambda_1^{(3)} = \frac{17}{7} \approx 2,4285, \\[2ex] \mathbf{y}^{(4)} = [29; 41; 29]^T & \lambda_1^{(4)} = \frac{41}{17} \approx 2,4117, \\[2ex] \mathbf{y}^{(5)} = [70; 99; 70]^T & \lambda_1^{(5)} = \frac{99}{41} \approx \underline{\underline{2,4146}}. \end{array}$$

□

Poznámka: Zastavovací podmínka použijeme ve tvaru $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \delta$.

Poznámka: Nejlepší aproximaci dostaneme, dělíme-li složky, které mají největší absolutní hodnotu.

Poznámka: Abychom zamezili přetečení, resp. podtečení při zobrazení čísel v počítači je vhodné v každém kroku normovat vektor $\mathbf{y}^{(k)}$ (norma $\mathbf{y}^{(k)}$ roste, resp. klesá pro vlastní číslo v absolutní hodnotě větší, resp. menší než 1).

Poznámka: Nevýhody mocninné metody:

- odhad chyby
- konvergence (obvykle v praxi nevíme, zda jsou splněny předpoklady mocninné metody)
- volba $\mathbf{y}^{(0)}$ (bude-li vektor $\mathbf{y}^{(0)}$ takovou lineární kombinací vlastních vektorů, že koeficient u vlastního vektoru odpovídajícího dominantnímu vlastnímu číslu bude roven 0, potom mocninná metoda nevypočte dominantní vlastní číslo)

Metoda Rayleighova podílu

Pro použití metody Rayleighova podílu budeme navíc předpokládat, že matice $\mathbf{A}$ je symetrická (reálná). Potom musí být vlastní vektory ortonormální, tj.

$$\left(\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 0 \text{ pro } i \neq j \quad \text{a } \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = 1\right).$$

Odvození: 6. krok z odvození mocninné metody nahradíme vyjádřením součinu $\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k)}$

$$\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k)} = \lambda_1^k \Big[\alpha_1 \mathbf{v}_1^T + \overbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_i^T}^{\varepsilon_k^T}\Big] \cdot \lambda_1^k \Big[\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \overbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_i}^{\varepsilon_k}\Big] =$$

$$= \lambda_1^{2k}\Big[\alpha_1^2 + \underbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k}}_{\varepsilon_k^T \varepsilon_k}\Big]$$

a součinu $\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k+1)^T}$

$$\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k+1)} = \lambda_1^k \Big[\alpha_1 \mathbf{v}_1^T + \overbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_i^T}^{\varepsilon_k^T}\Big] \cdot \lambda_1^{k+1} \Big[\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \overbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} \mathbf{v}_i}^{\varepsilon_{k+1}}\Big] =$$

$$= \lambda_1^{2k+1}\Big[\alpha_1^2 + \underbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k+1}}_{\varepsilon_k^T \varepsilon_{k+1}}\Big]$$

Dostáváme:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{y}^{(k)^{\mathrm{T}}}\mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)}}{\mathbf{y}^{(k)^{\mathrm{T}}}\mathbf{y}^{(k)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{y}^{(k)^{\mathrm{T}}}\mathbf{y}^{(k+1)}}{\mathbf{y}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k)}} = \frac{\lambda_1^{2k+1}(\alpha_1^2 + \overbrace{\varepsilon_k^T \varepsilon_{k+1}}^{\to 0})}{\lambda_1^{2k}(\alpha_1^2 + \underbrace{\varepsilon_k^T \varepsilon_k}_{\to 0})} = \lambda_1.$$

Poznámka: Součin $\varepsilon_k^T \varepsilon_k$ konverguje k nule (pro $k \to \infty$) zhruba dvakrát rychleji než ε_k k nulovému vektoru $\Rightarrow$ metoda Rayleighova podílu bude rychlejší než mocninná metoda.

Příklad: Metodou Rayleighova podílu určete dominantní vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{y}^{(0)} = [1; 1; 1]^T.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{(1)} &= [2; 3; 2]^T & \lambda_1^{(1)} &= \frac{\mathbf{y}^{(0)^T}\mathbf{y}^{(1)}}{\mathbf{y}^{(0)^T}\mathbf{y}^{(0)}} = \tfrac{7}{3} \approx 2,3333, \\
\mathbf{y}^{(2)} &= [5; 7; 5]^T & \lambda_1^{(2)} &= \tfrac{41}{17} \approx 2,4117, \\
\mathbf{y}^{(3)} &= [12; 17; 12]^T & \lambda_1^{(3)} &= \tfrac{60+119+60}{25+49+25} = \tfrac{239}{99} \approx \underline{\underline{2,41417}}.
\end{aligned}$$