

NELINEÁRNÍ ROVNICE

Formulace:

Je dána funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Hledáme číslo x z intervalu $\langle a, b \rangle$ tak, aby platila rovnost $f(x) = 0$. Číslo x nazveme **řešení** nebo **kořen rovnice**.

Poznámka:

Najít přesné řešení analyticky je možné jen ve velmi jednoduchých případech, např. při řešení lineární rovnice $12x - 3 = 0$, při řešení kvadratické rovnice $4x^2 - 5x + 8 = 0$ nebo např. při řešení rovnice $\sin 5x = \pi$. Proto je nutné pro nalezení kořenů použít nějakou numerickou metodu.

Numerické metody, kterými se budeme zabývat jsou založeny na **iteračních principech**. Pro každou iterační metodu nás budou zajímat odpovědi na dvě otázky:

- Konverguje posloupnost iterací ke hledanému kořenu?
- Jestliže ano, jak rychle?

Jestliže nemáme předběžné informace o poloze kořene, víme pouze, že leží v určitém intervalu $\langle a, b \rangle$, užijeme k výpočtu takové iterační metody, jejíž konvergence nezávisí na volbě počáteční aproximace. Tyto tzv. *vždy konvergentní metody* mají většinou tu nevýhodu, že konvergují pomalu, a hodí se tedy především k určení takové aproximace kořene, která může být použita jako počáteční aproximace pro nějakou rychleji konvergující metodu. Konvergence takové „lepší“ metody už může silně záviset na tom, jak dobrá je tato počáteční aproximace, a na vlastnostech funkce f v okolí kořene. Je tedy rozumné rozdělit metody řešení nelineárních rovnic na:

- startovací metody (vždy konvergentní metody)
- zpřesňující metody
- speciální metody (např. pro polymomy)

Tímto rozdělením ovšem nechceme zdůraznit, že startovací metoda konverguje pomalu vždy a naopak, že zpřesňující metoda konverguje vždy rychle.

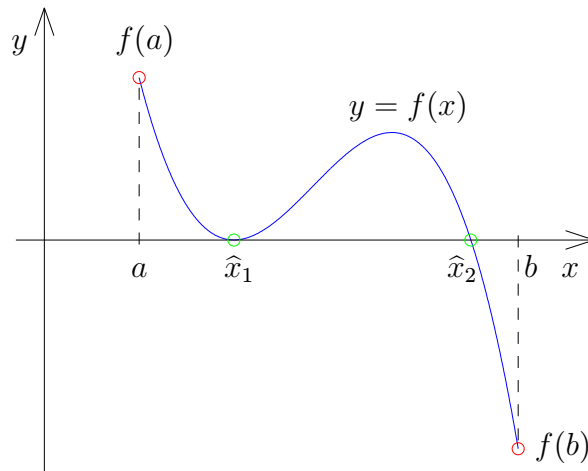
Poznamenejme, že vždy budeme předpokládat, že daná funkce f je v uvažovaném intervalu $\langle a, b \rangle$ **spojitá** neboť tento předpoklad je důležitý v následující větě.

Věta: Předpokládejme, že

- reálná funkce f je spojitá pro $x \in \langle a, b \rangle$,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$.

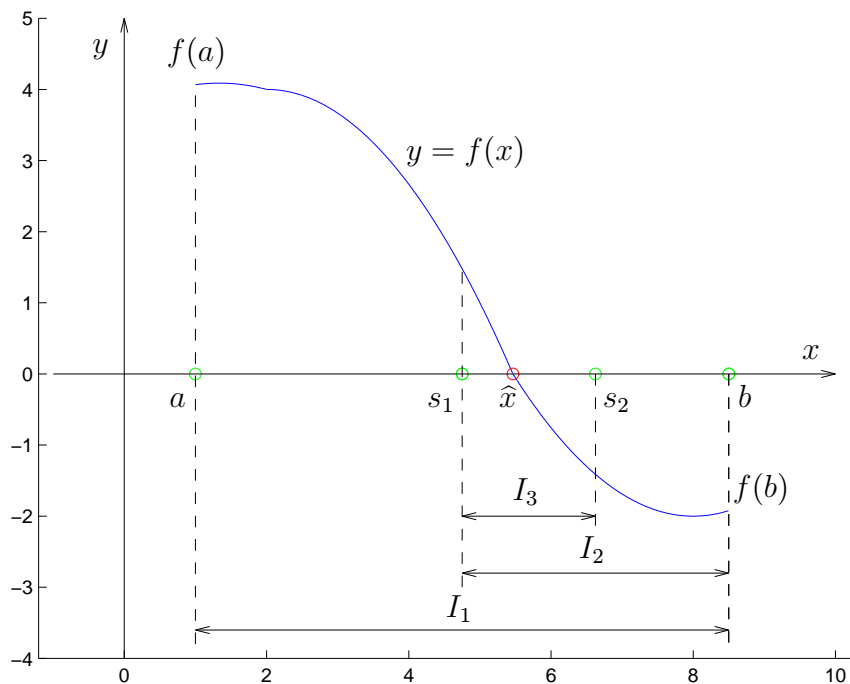
Potom existuje aspoň jedno řešení x rovnice $f(x) = 0$ na $\langle a, b \rangle$.

Větu ilustruje následující obrázek.



Startovací metody

Nejjednodušší startovací metodou je tzv. **metoda půlení intervalu** nebo-li **bisekce**. Předpokládáme, že jsou splněny předpoklady předchozí věty. Princip bisekce je (jak název říká) založen na půlení zadaného intervalu. Po rozpůlení se testuje funkční hodnota uprostřed intervalu, má-li stejné znaménko jako funkční hodnota $f(a)$, pak se do tohoto středu přesune bod a , v opačném případě se do něj přesune bod b . Celý postup opakujeme znovu. Pro zastavení tohoto iteračního postupu nám poslouží podmínka na velikost vzniklého intervalu. Algoritmus metody je znázorněn na obrázku a jednoduše zapsán dále.



Algoritmus metody bisekce:

- 1) Zadáme $\varepsilon > 0$, a , b
- 2) $s = (a + b)/2$
- 3) Je-li $f(s) = 0$, pak $x = s$, KONEC
- 4) Je-li $f(s) \neq 0$, pak
je-li $f(a) \cdot f(s) < 0$, pak $b = s$
jinak $a = s$
- 5) Je-li $b - a \geq \varepsilon$, pak jdi na 2)
jinak $x = (a + b)/2$, KONEC

Příklad: Pomocí metody půlení intervalu najděte na intervalu $\langle 1, 4 \rangle$ řešení rovnice (provedte 4 iterace)

$$x^2 + \ln x - \frac{10}{x} = 0.$$

Řešení: Výsledky lze přehledně zapsat do tabulky:

<i>iterace</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>f(a)</i>	<i>f(b)</i>	$s = \frac{a+b}{2}$	<i>f(s)</i>
0	1	4	-9	14,8863	2,5	3,1663
1	1	2,5	-9	3,1663	1,75	-2,0922
2	1,75	2,5	-2,0922	3,1663	2,125	0,5635
3	1,75	2,125	-2,0922	0,5635	1,9375	-0,7460
4	1,9375	2,125	-0,7460	0,5635	2,0312	-0,0884

Z tabulky vidíme, že funkční hodnota ve středu posledního intervalu, tj. v bodě 2,0312, je -0,0884. Střed intervalu z poslední iterace prohlásíme za přibližné řešení dané rovnice. Píšeme tedy, že $\hat{x} \approx 2,0312$. Pro úplnost dodejme, že přesné řešení zapsané na 4 desetinná místa je 2,0439. \square

Poznámka: Z uvedeného příkladu je zřejmé, že se metoda bisekce řadí mezi startovací metody (vždy konverguje, ale velmi pomalu). Výhodou je kromě její jednoduchosti i fakt, že se dá předem určit počet kroků, potřebných k dosažení požadované přesnosti (lze ukázat, že pro zpřesnění o jedno desetinné místo je třeba provést přibližně 3,3 iterace). Nevýhodou kromě pomalé konvergence je fakt, že se tato metoda nedá použít pro určení komplexního kořene (např. u polynomů).

Dále se budeme věnovat velmi důležité **metodě prosté iterace**. Všechny dále uvažované metody budou ve své podstatě speciálním případem této metody.

Princip metody prosté iterace je založen na tom, že původní rovnici $f(x) = 0$ přepíšeme na tvar

$$x = \varphi(x).$$

Zde je třeba si uvědomit, že existuje celá řada možností, jak to udělat. Samozřejmě na konkrétní volbě funkce φ bude záviset nejen samotná konvergence metody, ale i její rychlost.

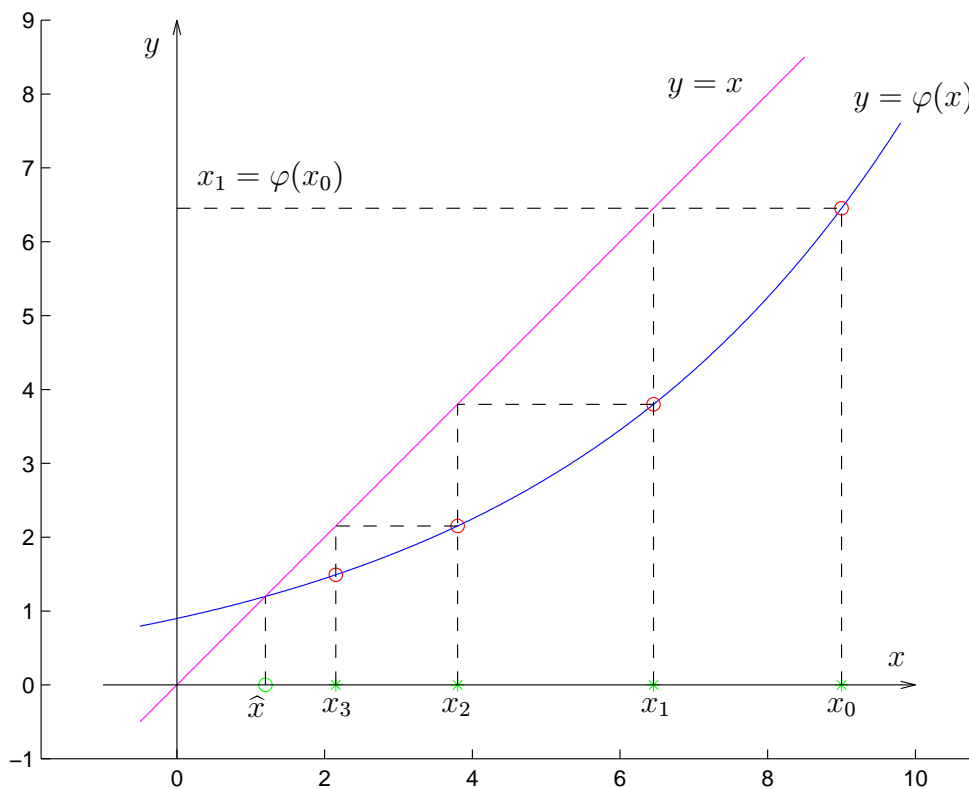
Princip metody prosté iterace je zřejmý z následujícího algoritmu a obrázku. Nakreslíme-li si grafy funkcí $y = x$ a $y = \varphi(x)$, je jasné, že řešení bude v bodě, kde se tyto grafy protnou. Nejprve si zvolíme v intervalu $\langle a, b \rangle$ počáteční nultou iteraci řešení x_0 a potom konstruujeme posloupnost iterací x_k pomocí předpisu

$$x_{k+1} = \varphi(x_k).$$

Pro zastavení iteračního postupu použijeme podmínku pro rozdíl dvou po sobě jdoucích iterací.

Algoritmus metody prosté iterace:

- 1) Zadáme $x_0 \in \langle a, b \rangle$, $\varepsilon > 0$
- 2) $x_{k+1} = \varphi(x_k)$
- 3) Je-li $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, pak $x = x_{k+1}$, KONEC
jinak jdi na 2)



Příklad: Pomocí metody prosté iterace najděte na intervalu $\langle 1, 4 \rangle$ řešení rovnice

$$x^2 + \ln x - \frac{10}{x} = 0.$$

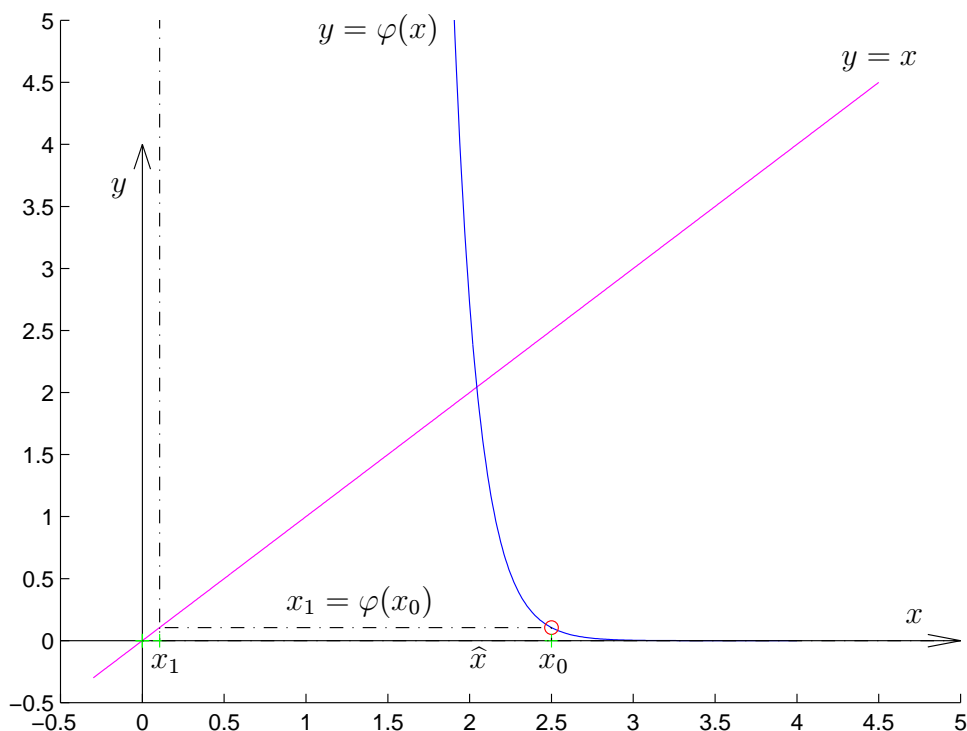
Řešení: Jak již bylo řečeno, způsobů jak přepsat rovnici $f(x) = 0$ na tvar $x = \varphi(x)$ je vždy celá řada. Ukažme si proto jak se bude chovat metoda prosté iterace v několika případech. Pokaždé volíme za počáteční iteraci střed daného intervalu, tj. $x_0 = 2,5$. Výsledky jsou zaznamenány v tabulkách.

1. způsob:

$$\ln x = \frac{10}{x} - x^2 \Rightarrow \boxed{x = e^{\left(\frac{10}{x} - x^2\right)}} \quad \text{tj.} \quad \varphi(x) = e^{\left(\frac{10}{x} - x^2\right)}$$

k	x_k
0	2,5
1	0.1054
2	$1.5845 \cdot 10^{41}$

již první iterace x_1 je mimo zadaný interval, navíc druhá iterace x_2 je velmi velké číslo a proto metoda prosté iterace nekonverguje.

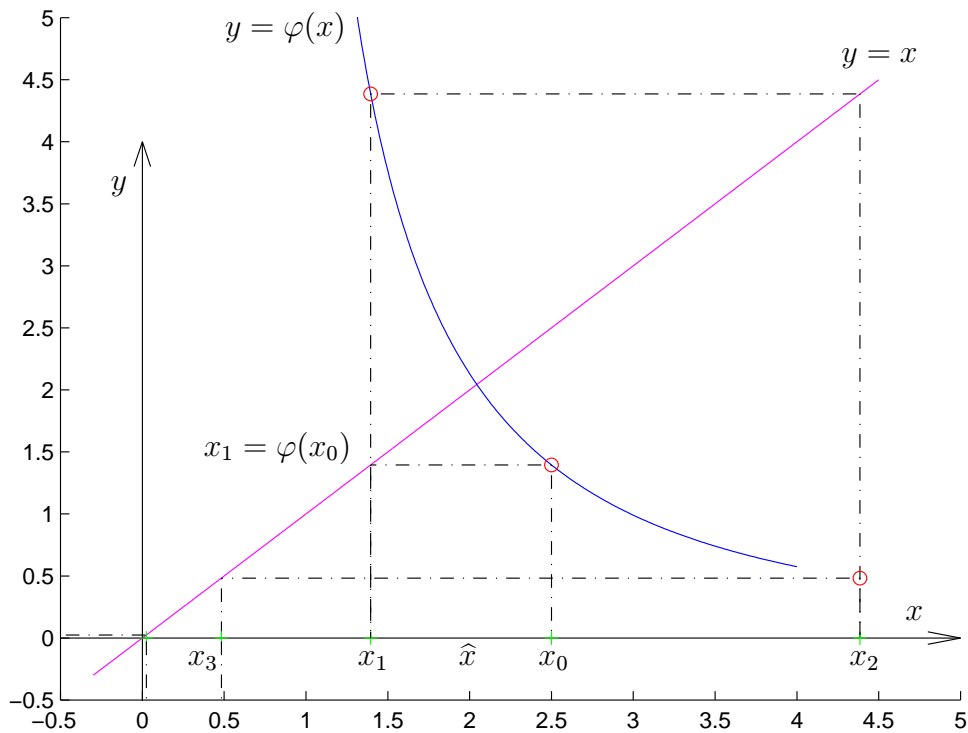


2. způsob:

$$x^2 + \ln x = \frac{10}{x} \Rightarrow \boxed{x = \frac{10}{x^2 + \ln x}} \quad \text{tj. } \varphi(x) = \frac{10}{x^2 + \ln x}$$

k	x_k
0	2,5
1	1.3954
2	4.3852
3	0.4829
4	-20.2122

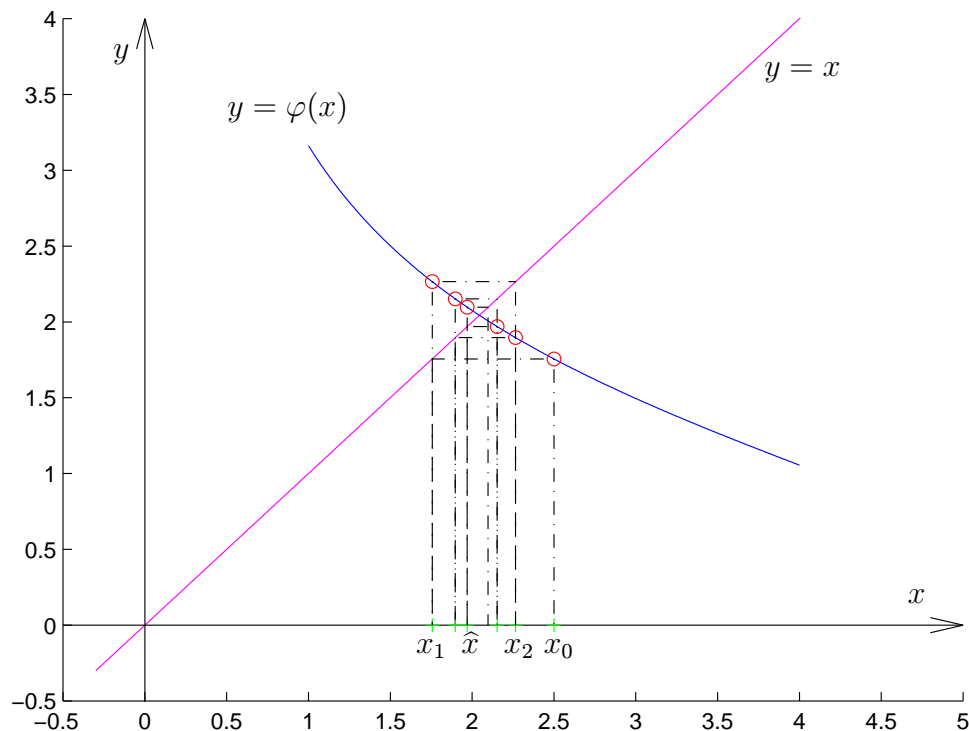
podobně jako v předchozím případě, zde je 2. iterace x_2 mimo zadaný interval a metoda prosté iterace opět nekonverguje.



3. způsob:

$$x^2 = \frac{10}{x} - \ln x \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{10}{x} - \ln x}} \quad \text{tj.} \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - \ln x}$$

k	x_k
0	2,5
1	1.7560
2	2.2653
3	1.8965
4	2.1524
5	1.9696
6	2.0974
7	2.0067
8	2.0704
9	2.0254
10	2.0571
11	2.0347
12	2.0505
13	2.0393
14	2.0472
15	2.0416
16	2.0455
17	2.0428
18	2.0447
19	2.0434

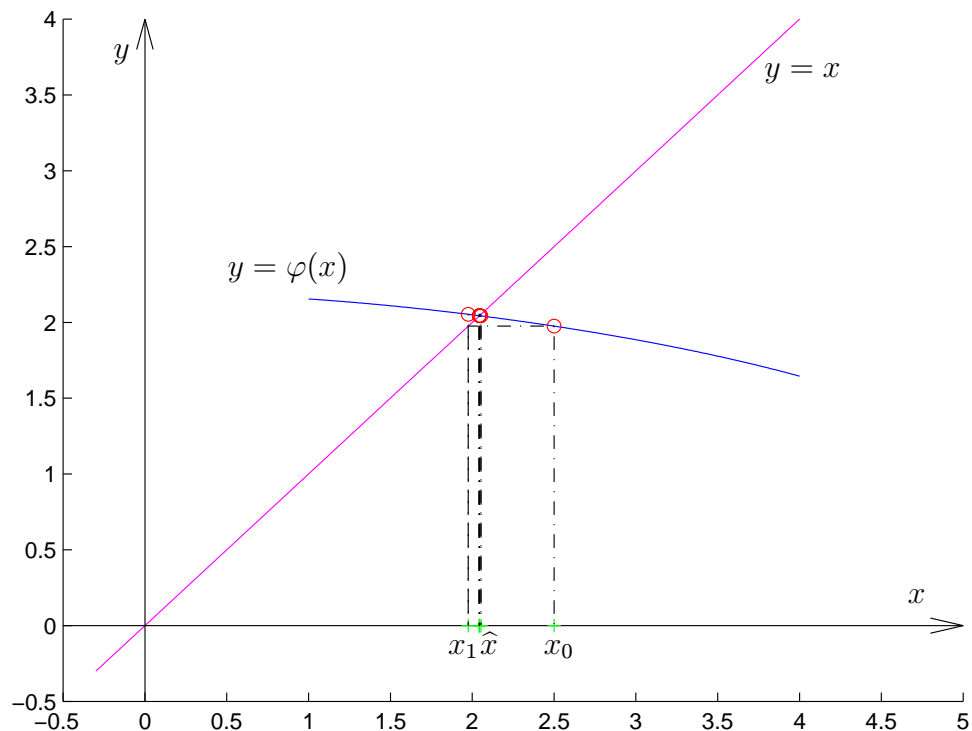


V tomto případě metoda prosté iterace konvergovala k výsledku \hat{x} . Rychlost konvergence ovšem nebyla velká. Pro zastavení výpočtu jsme použili podmínku, aby absolutní hodnota rozdílu dvou po sobě jdoucích iterací byla menší než 0.001. Z tabulky je vidět, že rozdíl mezi 18-tou a 19-tou iterací je přibližně 0.0007. Je třeba poznamenat, že hodnota rozdílu po sobě jdoucích iterací nic neříká o přesnosti vypočteného řešení (viz. Poznámka za příkladem).

4. způsob:

$$x^3 + x \ln x - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{10 - x \ln x}} \quad \text{tj. } \varphi(x) = \sqrt[3]{10 - x \ln x}$$

k	x_k
0	2,5
1	1.9755
2	2.0532
3	2.0427
4	2.0441
5	2.0439



V tomto posledním případě metoda prosté iterace konvergovala k výsledku \hat{x} velmi rychle. To dokazuje ten fakt, že kdybychom použili pro zastavení podmínku, aby absolutní hodnota rozdílu dvou po sobě jdoucích iterací byla menší než 10^{-10} potřebovali bychom k tomu pouze 10 iterací.

□

Poznámka: Největší problém metody prosté iterace je nalezení předpisu pro funkci $\varphi = \varphi(x)$ tak, aby metoda konvergovala.

V následující větě, která uvádí postačující podmínky konvergence metody prosté iterace, jsou uvedeny požadavky na vlastnosti funkce φ .

Věta: (Postačující podmínky konvergence metody prosté iterace)

Předpokládejme, že je funkce φ na intervalu $I = \langle a, b \rangle$ spojitá a platí:

- (a) $\forall x \in I : \varphi(x) \in I$ (**funkce φ zobrazuje I do sebe**),
(b) $\exists q \in \langle 0, 1 \rangle : |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y| \quad \forall x, y \in I$ (**funkce φ je kontrakce**).

Potom

- 1) v intervalu I existuje právě jeden kořen x rovnice $x = \varphi(x)$,
2) posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ určená formulí $x_k = \varphi(x_{k-1})$ konverguje
pro každé $x_0 \in I$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$.

Poznámka: Pro diferencovatelnou funkci φ lze podmínku (b) nahradit podmínkou
(b') $\exists q \in \langle 0, 1 \rangle : |\varphi'(x)| \leq q \quad \forall x \in I$

Podívejme se na souvislost předpokladů předchozí věty a volby funkce φ v jednotlivých případech předchozího příkladu. Ve všech případech byla funkce φ na zadaném intervalu $\langle 1, 4 \rangle$ spojitá a dokonce diferencovatelná. Proto se podívejme na splnění podmínek (a) a (b').

Důvodem, proč metoda prosté iterace selhala v 1. a 2. případě je fakt, že funkce φ nespĺňovala ani jednu z podmínek (a) a (b'). Nesplnění podmínky (a) jsme pocítli již v první, resp. druhé iteraci, tím, že jsme se dostali mimo zadaný interval $\langle 1, 4 \rangle$. Samozřejmě to souvisí i s faktem, že nebyla splněna podmínka ani (b'), tj. absolutní hodnoty derivace funkce φ byly velmi velké.

Ve 3. a 4. případě metoda dokonvergovala k řešení. Snadno se z obrázků přesvědčíme, že v těchto případech byly splněny předpoklady (a) i (b'). Všimněme si ještě jedné skutečnosti, v posledním případě konvergovala metoda prosté iterace viditelně rychleji než ve třetím případě. Bylo to způsobeno vlastností funkce φ . Z geometrické představy je zřejmé, že metoda bude konvergovat rychleji, jestliže bude graf funkce φ „co nejvíce vodorovný“, tzn. $\varphi' \approx 0$. Skutečně rychlost konvergence metody prosté iterace charakterizuje $|\varphi'(x_k)|$, protože můžeme psát

$$\varphi'(x_k) \approx \frac{\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k}.$$

Poznámka: Řešíme-li metodou prosté iterace algebraickou rovnicí

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

a předpokládáme-li, že řešení je v absolutní hodnotě větší než 1, je většinou vhodné vyjádřit x z nejvyšší mocniny, tj.

$$x = \sqrt[n]{\underbrace{-\frac{a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0}{a_n}}_{\varphi(x)}}$$

Jak bylo řečeno hodnota rozdílu dvou po sobě jdoucích iterací neodpovídá obecně chybě přibližného řešení. Geometricky si to lze představit takto:



Odhad chyby metody prosté iterace

- Mějme konvergentní iterační proces: $x_k = \varphi(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots$
řešení α potom splňuje: $\alpha = \varphi(\alpha)$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$

- Odečtením rovností dostaneme:

$$x_k - \alpha = \varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha) \quad (\text{A})$$

- Dále platí:

$$|x_{k-1} - \alpha| = |x_{k-1} - x_k + x_k - \alpha| \leq |x_{k-1} - x_k| + |x_k - \alpha| \quad (\text{B})$$

- Potom:

$$|x_k - \alpha| \stackrel{(\text{A})}{=} |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)| \stackrel{(\text{b})}{\leq} q|x_{k-1} - \alpha| \stackrel{(\text{B})}{\leq} q|x_{k-1} - x_k| + q|x_k - \alpha|$$

$$\underbrace{(1 - q)}_{>0} |x_k - \alpha| \leq q|x_{k-1} - x_k|$$

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{q}{1 - q} |x_{k-1} - x_k|$$

- Použijeme-li zastavovací podmínku $|x_{k-1} - x_k| < \varepsilon$, potom platí odhad chyby:

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{q}{1 - q} \varepsilon$$

Příklad: Pomocí metody prosté iterace řešte na intervalu $\langle 0, 4 \rangle$ rovnici

$$x - \sqrt{x+4} = 0.$$

přesné řešení:

$$x = \sqrt{x+4} \quad /^2$$

$$x^2 = x + 4$$

$$x^2 - x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow \underline{x_1 \approx 2,5615}, \quad x_2 \approx -1,5615 \notin \langle 0, 4 \rangle$$

• Rovnici přepíšeme na tvar: $x = \underbrace{\sqrt{x+4}}_{\varphi(x)}$

• Ověříme splnění předpokladů věty o postačujících podmínkách konvergence metody prosté iterace:

$$(a) \quad \forall x \in \langle 0, 4 \rangle : \quad \begin{aligned} 0 &\leq \sqrt{x+4} \leq 4 \\ 0 &\leq x+4 \leq 16 \\ -4 &\leq x \leq 12 \end{aligned}$$

$$(b') \quad \forall x \in \langle 0, 4 \rangle : \quad \begin{aligned} |\varphi'(x)| &< 1 \\ \left| \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \right| &< 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+4}} &< 1 \\ 1 &< 2\sqrt{x+4} \\ 1 &< 4x + 16 \\ -15 &< 4x \end{aligned}$$

• Vlastní výpočet: volíme $x_0 = 2$ a pro zastavovací podmínku $\varepsilon = 0.001$.

k	x_k
0	2
1	2.4494
2	2.5395
3	2.5572
4	2.5607
5	2.5613

$$\Rightarrow \tilde{x} = x_5 = 2.5613.$$

□

Poznámka: Pokusme se odhadnout velikost chyby přibližného řešení u předchozího příkladu. Platí:

$$\varphi' = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \quad \dots \quad \text{kladná klesající funkce} \quad (\varphi'' < 0)$$

$$\Downarrow$$

$$\max_{0 \leq x \leq 4} |\varphi'(x)| = |\varphi'(0)| = \frac{1}{4} = q \quad \dots \quad \text{podmínka (b')}$$

Zvolili jsme $\varepsilon = 0,001$ a proto platí odhad chyby:

$$|x_5 - \alpha| \leq \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \cdot 0,001 = 0,000333$$

Rychlost konvergence

Definice: Říkáme, že posloupnost x_k konverguje k číslu α rychlostí r , jestliže pro $k \rightarrow \infty$

$$|x_{k+1} - \alpha| = c|x_k - \alpha|^r + O(|x_k - \alpha|^{r+1}).$$

Mluvíme o asymptotické rychlosti konvergence ($k \rightarrow \infty$).

Poznámka: $f(x) = O(g(x))$ pro $x \rightarrow a \iff \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ je omezená pro $x \rightarrow a$.

Rychlost konvergence metody prosté iterace

Je-li funkce φ dostatečně hladká, můžeme napsat její Taylorův rozvoj v bodě α a potom pro $x = x_{k-1}$ platí:

$$\varphi(x_{k-1}) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2}(x_{k-1} - \alpha)^2 + \frac{\varphi'''(\xi)}{6}(x_{k-1} - \alpha)^3$$

$$x_k - \alpha = \varphi'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2}(x_{k-1} - \alpha)^2 + \frac{\varphi'''(\xi)}{6}(x_{k-1} - \alpha)^3$$

- je-li $\varphi'(\alpha) \neq 0$, potom

$$x_k - \alpha = \varphi'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha)^1 + O((x_{k-1} - \alpha)^2)$$

\Rightarrow rychlost konvergence je řádu 1

- je-li $\varphi'(\alpha) = 0$ a $\varphi''(\alpha) \neq 0$, potom

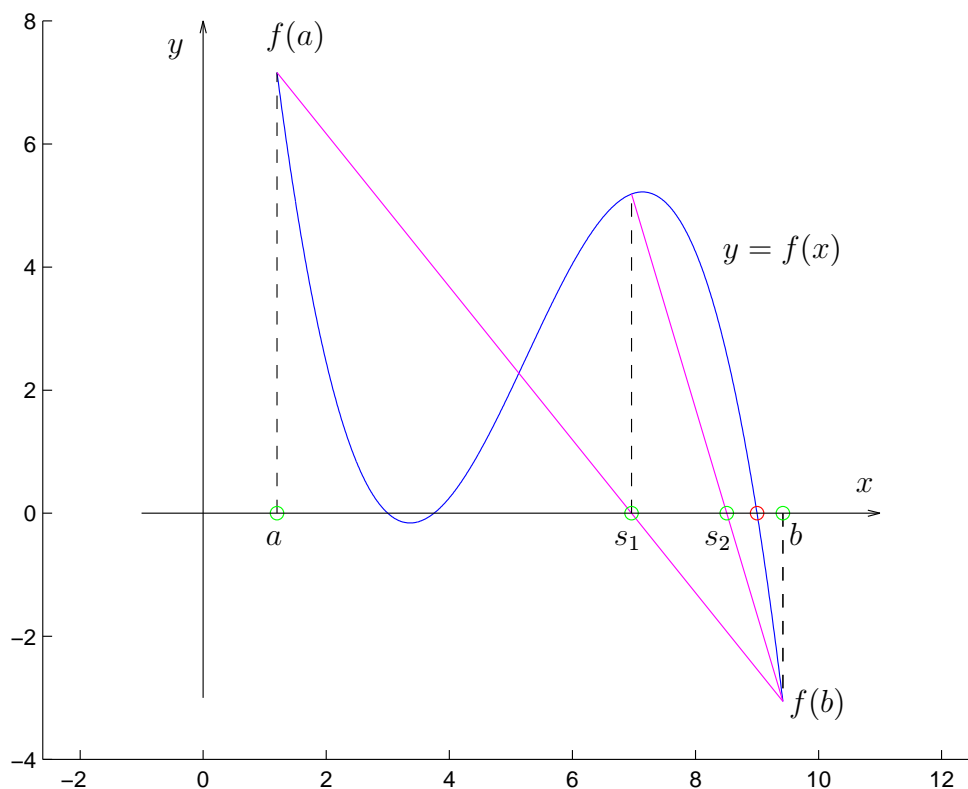
$$x_k - \alpha = \frac{\varphi''(\alpha)}{2}(x_{k-1} - \alpha)^2 + O((x_{k-1} - \alpha)^3)$$

\Rightarrow rychlost konvergence je řádu 2

Nyní si uveďme ještě jednu startovací metodu - metodu **Regula falsi**.

Geometrický význam:

Křivku $y = f(x)$ nahradíme sečnou, která prochází body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$. Průsečík s sečny s osou x přiřadíme buď a nebo b (podle znaménka funkční hodnoty).



Algoritmus:

- 1) Zadáme $\delta > 0$, a , b
- 2) $s = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$
- 3) Je-li $|f(s)| < \delta$, pak $x = s$, KONEC
- 4) Je-li $|f(s)| \geq \delta$, pak
 - je-li $f(a) \cdot f(s) < 0$, pak $b = s$, pak jdi na 2)
 - jinak $a = s$, pak jdi na 2)

Poznámka: Číslo δ nepředstavuje přesnost! Slouží pouze pro zastavovací podmínku.

Zpřesňující metody

Jako zástupce zpřesňujících metod si uvedeme **Newtonovu metodu**.

Nechť v intervalu $I = \langle a, b \rangle$ leží jediný jednoduchý kořen \hat{x} rovnice $f(x) = 0$. Jelikož mluvíme o zpřesňující metodě, předpokládáme, že máme zadánou nultou iteraci $x_0 \in I$, která je relativně blízko hledanému řešení. Vyjádříme Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 . Přitom předpokládáme, že existuje derivace funkce f .

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2$$

Rovnici $f(x) = 0$ nahradíme lineární rovnicí

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Ta má kořen

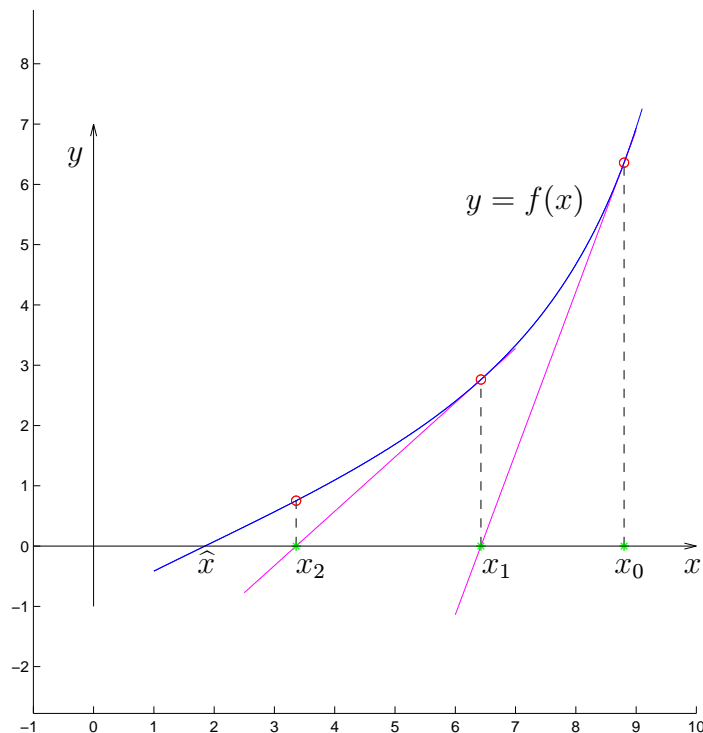
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Celý postup opakujeme a dostáváme iterační formuli

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Geometrický význam Newtonovy metody:

Křivku $y = f(x)$ nahradíme tečnou ke grafu v bodě x_k a hodnotu x_{k+1} získáme jako průsečík tečny s osou x . Proto se také Newtonova metoda nazývá **metoda tečen** nebo **metoda linearizace**.



Poznámka: Jako zastavovací podmínku lze volit $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ nebo $|f(x_k)| < \delta$.

Poznámka: Algoritmus Newtonovy metody je speciálním případem metody prosté iterace. Za funkci φ jsme volili funkci

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Rychlost konvergence Newtonovy metody

- závisí na $\varphi'(\alpha)$ ($\varphi''(\alpha)$) ... viz strana 12.

Platí:

$$\varphi' = 1 - \frac{f' \cdot f' - f \cdot f''}{(f')^2} = 1 - 1 + \frac{f \cdot f''}{(f')^2} = \frac{f \cdot f''}{(f')^2}$$

$$\varphi'(\alpha) = 0, \quad \text{protože } f(\alpha) = 0$$

Platí:

$$\varphi'' = \frac{(f' \cdot f'' + f \cdot f''') \cdot (f')^2 - f \cdot f'' \cdot 2 \cdot f' \cdot f''}{(f')^4}$$

$$\varphi''(\alpha) = \frac{(f')^3 \cdot f''}{(f')^4} = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad \text{protože } f(\alpha) = 0$$

Platí tedy $\varphi'(\alpha) = 0$ a obecně $\varphi''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ rychlost konvergence je řádu 2.

Příklad: Pomocí Newtonovy metody najděte řešení rovnice

$$f(x) \equiv x^2 + \ln x - \frac{10}{x} = 0.$$

Počáteční aproximaci volte $x_0 = 2,5$ a pro zastavení použijte podmínku $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-6}$.

Řešení: V iteračním předpisu se vyskytuje derivace funkce f , proto ji vyjádříme.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{10}{x^2}.$$

Výsledky přehledně zapíšeme do tabulky.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
0	2,5	3.1662907	7.0000000	0.4523272
1	2.0476727	0.0260747	6.9686526	0.0037417
2	2.0439310	-0.0000040	6.9708032	0.0000005
3	2.0439305			

Vidíme, že stačilo provést 3 iterace. □

Z předcházejícího příkladu se zdá, že Newtonova metoda bude vždy velmi rychle konvergovat. Ukažme si ještě jeden příklad.

Příklad: Pomocí Newtonovy metody najděte řešení rovnice

$$f(x) \equiv x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Počáteční aproximaci volte $x_0 = 0,1$ a pro zastavení použijte podmínku $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-3}$.

Řešení: Opět je třeba vypočítat derivaci

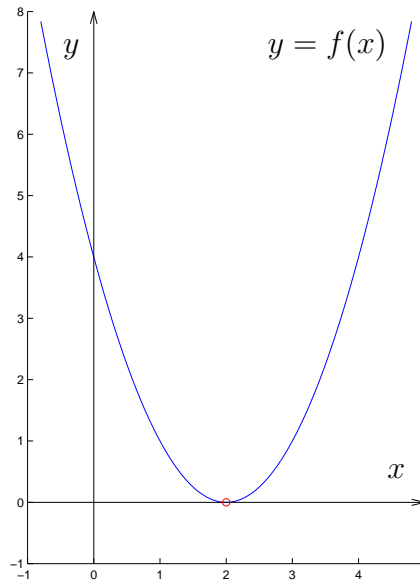
$$f'(x) = 2x - 4.$$

Iterační formule bude mít tvar

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 4x_k + 4}{2x_k - 4} = x_k - \frac{(x_k - 2)^2}{2(x_k - 2)} = x_k - \frac{1}{2}(x_k - 2) = \frac{1}{2}x_k + 1.$$

Výsledky opět zapíšeme do tabulky.

k	x_k
0	0,1
1	1,05
2	1,525
3	1,7625
4	1,8813
5	1,9406
6	1,9703
7	1,9852
8	1,9926



□

Tento příklad ukázal, že v některých situacích je Newtonova metoda mnohem pomalejší. Z obrázku se dá usoudit, kdy tyto situace nastanou. Hodnota derivace funkce f v bodě $\hat{x} = 2$, který je řešením rovnice $f(x) = 0$, je rovna nule. Graf funkce f se osy x pouze dotkl. To odpovídá faktu, že kořen $\hat{x} = 2$ je dvojnásobným kořenem dané rovnice. Je-li hodnota derivace f' na okolí kořene rovna 0, případně velmi blízká 0, potom se v iteračním formulí dělí nulou, případně velmi malým číslem. Tento fakt má za následek zpomalení algoritmu.

Podívejme se zpět na předpoklady, za nichž jsme odvodili Newtonovu metodu. Předpokládali jsme, že hledaný kořen je jediný (jeho násobnost je 1). Za tohoto předpokladu konverguje Newtonova metoda rychle. Při zadání úkolu, ale nemusíme být schopní poznat, že násobnost hledaného kořene je větší než 1. Problém s hledáním násobného kořene můžeme elegantně vyřešit tímto způsobem:

Je-li \hat{x} n -násobným kořenem rovnice $f(x) = 0$, potom je \hat{x} také $(n - 1)$ -násobným kořenem rovnice $f'(x) = 0$ a tedy jednoduchým kořenem rovnice

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = 0.$$

Poznámka: Dosud jsme řešili nelineární rovnici pouze v \mathbb{R} . Algoritmus Newtonovy metody můžeme použít i pro řešení dané rovnice v oboru komplexních čísel.

Příklad: Newtonovou metodou řešte v komplexním oboru rovnici

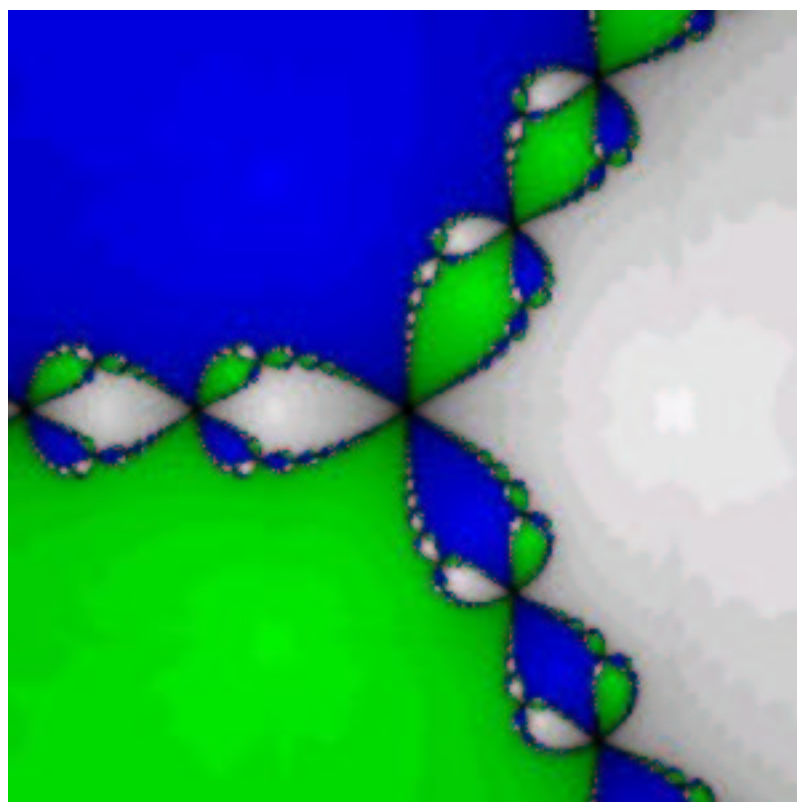
$$z^3 - 1 = 0, \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Iterační formule bude mít tvar

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{2z_k^2}$$

Je zřejmé, že daná rovnice bude mít 3 řešení: 1 , $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ a $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Řešíme-li danou rovnici Newtonovou metodou pro konkrétní počáteční aproximaci ze čtverce $\langle -1.5; 1.5 \rangle \times \langle -1.5; 1.5 \rangle$, dostaneme jedno ze tří uvedených řešení. Obarvíme-li bod představující počáteční aproximaci různou barvou, podle toho k jakému řešení dospějeme, získáme fraktálovou strukturu.



□

Poznámka: Na závěr si uvědomme nevýhody Newtonovy metody

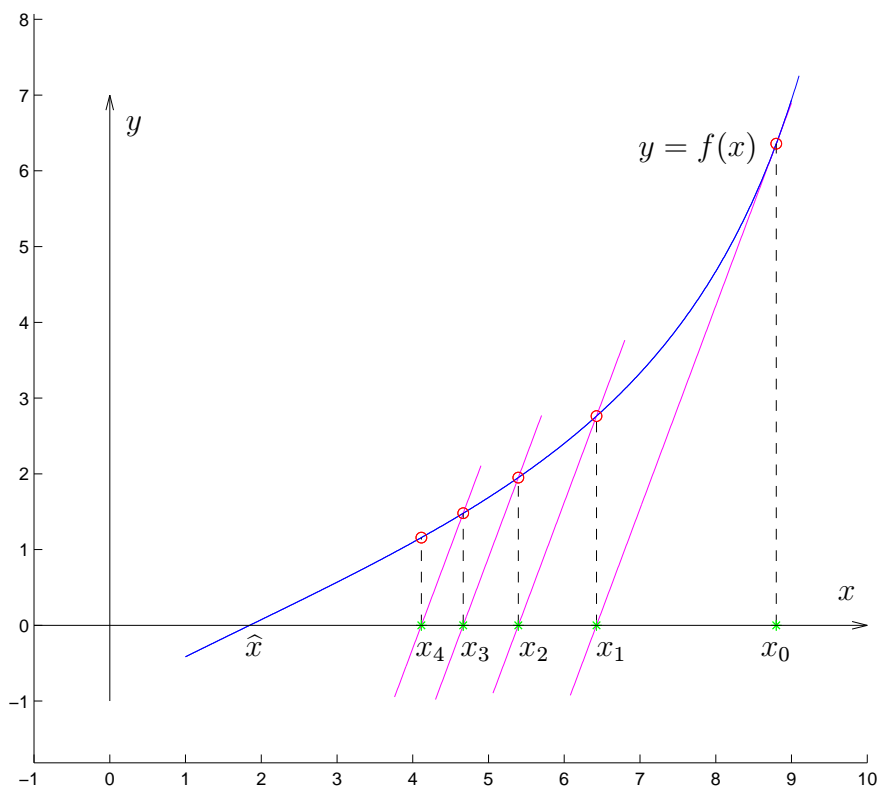
- zadaná funkce f musí být diferencovatelná
- derivace se přímo vyskytuje v iterační formuli
- v každé iteraci musíme kromě funkční hodnoty počítat také hodnotu derivace

Pro odbourání poslední vlastnosti můžeme za předpokladu, že se derivace f' na okolí kořene příliš nemění, Newtonovu metodu modifikovat tak, že hodnotu derivace vypočteme pouze jednou v bodě x_0 a položíme $f'(x_k) \approx f'(x_0)$. Dostaneme iterační formuli

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

Geometrický význam modifikované Newtonovy metody

Tečny ke grafu v bodech $[x_k, f(x_k)]$ nahrazujeme přímkami rovnoběžnými s tečnou ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

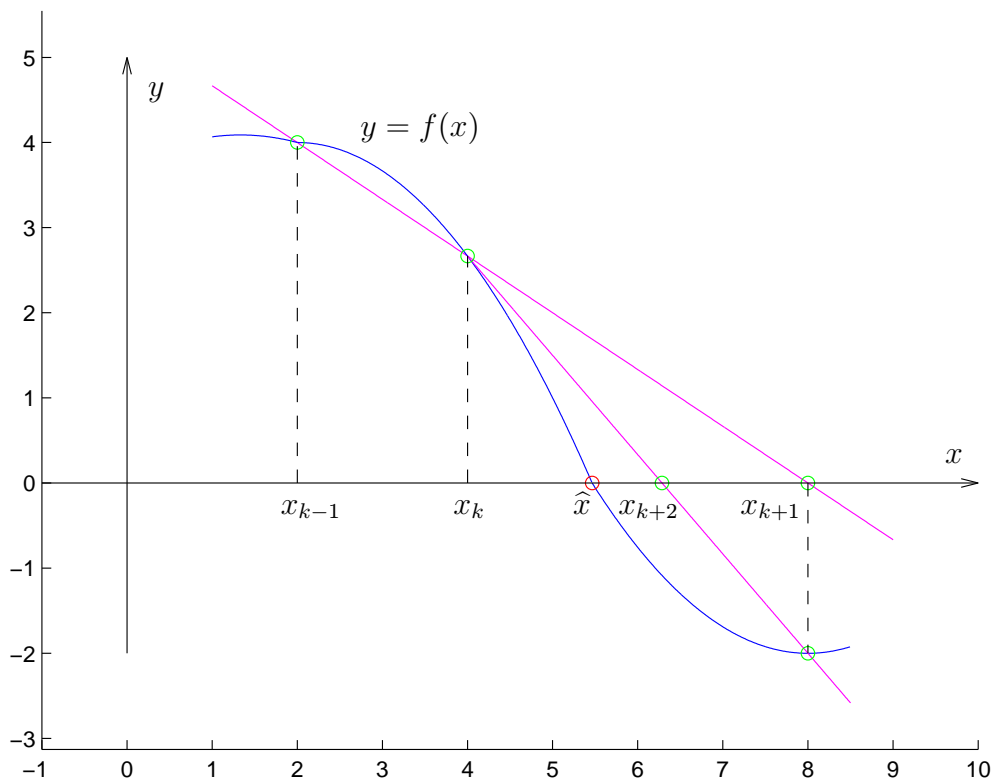


Poznámka: V této modifikaci počítáme pouze jednu hodnotu derivace $f'(x_0)$, a proto je tento postup vhodný je-li derivace $f'(x)$ složitá. Nemění-li $f'(x)$ a $f''(x)$ znaménko, je možné dokázat konvergenci této metody.

Chceme-li modifikovat Newtonovu metodu pro funkce, které nejsou diferencovatelné, nahradíme v iterační formuli derivaci $f'(x_k)$ diferencčním podílem $\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$. Získáme tzv. **metodu sečen**.

Geometrický význam metody sečen

Mějme dvě dobré aproximace x_{k-1} a x_k kořene x rovnice $f(x) = 0$. Křivku $y = f(x)$ nahradíme přímkou (sečnou), která prochází body $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ a $[x_k, f(x_k)]$. Další iteraci x_{k+1} získáme jako průsečík sečny s osou x .



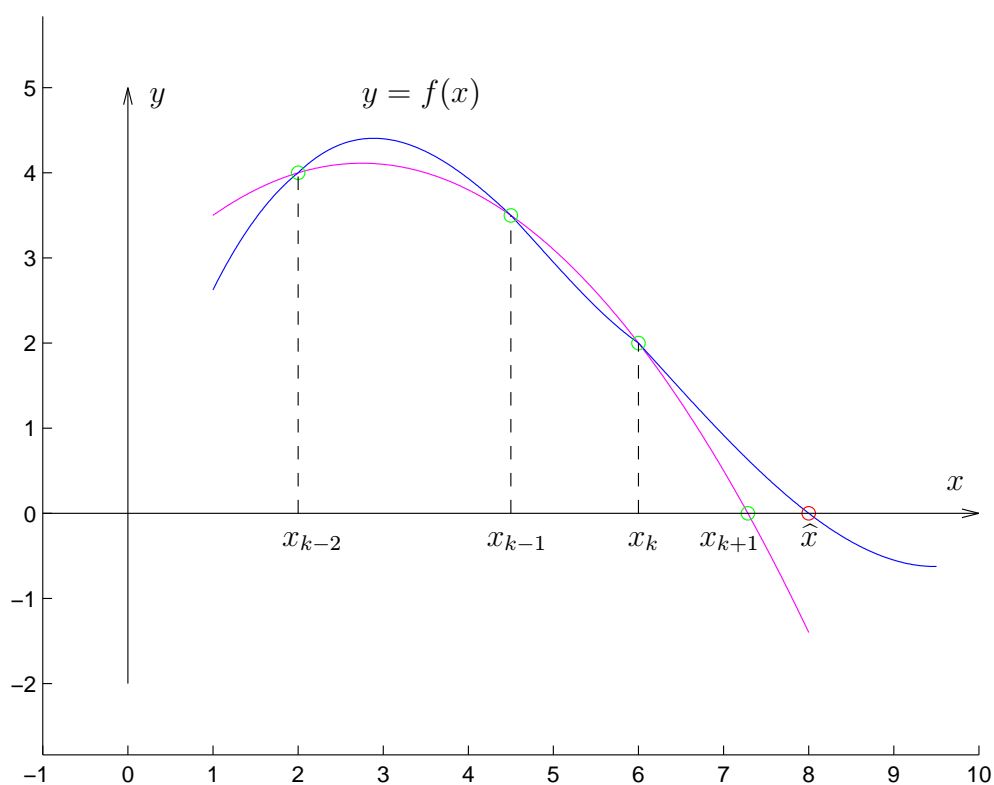
Poznámka: Pro zahájení výpočtu potřebujeme znát dvě počáteční aproximace, ale na rozdíl od Newtonovy metody počítáme v každém kroku pouze jednu novou funkční hodnotu, což je úspora času.

Poznámka: Metoda sečen má obdobný algoritmus jako metoda regula falsi, ovšem nepožadujeme splnění podmínky $f(x_{k-1}) \cdot f(x_k) < 0$.

Poznámka: Metoda sečen je tzv. dvoukroková interpolační metoda, analogicky lze odvodit tříkrokovou interpolační metodu, kterou nazýváme **Mullerova metoda**.

Geometrický význam Mullerovy metody

Mějme tři dobré aproximace x_{k-2} , x_{k-1} a x_k kořene x rovnice $f(x) = 0$.
Křivku $y = f(x)$ nahradíme parabolou (kvadratickou funkcí), která prochází body $[x_{k-2}, f(x_{k-2})]$, $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ a $[x_k, f(x_k)]$.
Další iteraci x_{k+1} získáme jako průsečík paraboly s osou x .
(Ten, který je blíže k x_k .)



Prostředky matlabu pro řešení nelineárních rovnic (viz help v matlabu)

`fzero` pro obecnou nelineární rovnici
`roots` pro kořeny polynomu