Příklad 8 (1)

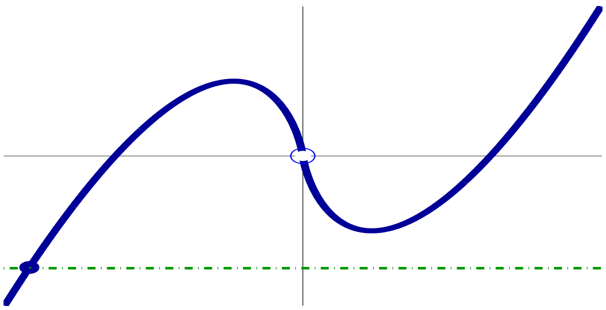
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$x\,\ln|9\,x| = -0.061313$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}:\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,\quad \lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = 0.$



$$f(x) \;=\; \begin{cases} x\,\ln(+9\,x)\,, & x > 0, \\ x\,\ln(-9\,x)\,, & x < 0. \end{cases}$$

$$f'(x) \;=\; \begin{cases} \ln(+9\,x) + 1, & x > 0, \\ \ln(-9\,x) + 1, & x < 0. \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{9e}$

$f\left(\pm\frac{1}{9e}\right) = \mp\frac{1}{9e}\quad (\doteq \mp 0.040875)$

Rovnice má právě 1 řešení: $x_1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{9}\right)$.

Příklad 8 (2)

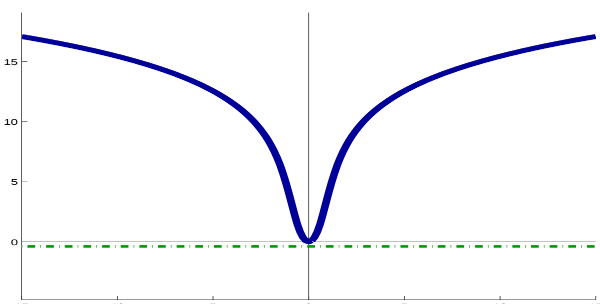
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\ln(x^4 + 1) + 4\,\mathrm{arctg}\,(x^2) = -0.38$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

Rovnice nemá řešení.



Na levou stranu rovnice se díváme jako na reálnou funkci jedné reálné proměnné:

$$f(x) = \ln(x^4 + 1) + 4\,\mathrm{arctg}\,(x^2).$$

Funkce $f(x)$ ($D_f = \mathbb{R}$) je spojitá a diferencovatelná na celém D_f. Ze znalosti jejího grafu budeme schopni rozhodnout o řešitelnosti zadané nelineární rovnice.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 4\,\dfrac{x\,(x^2+2)}{x^4+1} = 0 \Longleftrightarrow x \in \left\{0,\ \sqrt{-1}\sqrt{2},\ -\sqrt{-1}\sqrt{2}\right\}.$

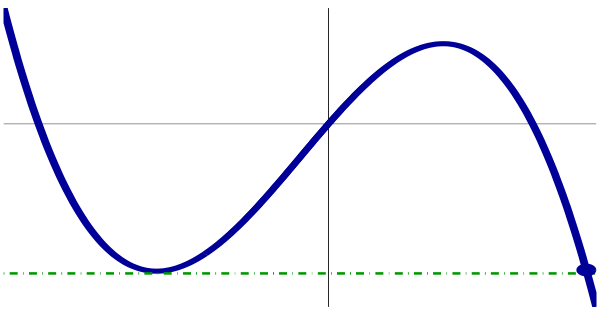
- $f(0) = 0$, $f(\sqrt{-1}\sqrt{2}) = \ln(5) - 4\,\mathrm{arctg}\,(2)$, $f(-\sqrt{-1}\sqrt{2}) = \ln(5) - 4\,\mathrm{arctg}\,(2)$.

Příklad 8 (3)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$-2\,x^3 - 9\,x^2 + 324\,x + 2 = -2217.78$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R}: \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$



$$f(x) = -2\,x^3 - 9\,x^2 + 324\,x + 2,$$
$$f'(x) = -6\,x^2 - 18\,x + 324,$$
$$f'(x) = 0 \iff x = -9 \ \vee \ x = 6$$
$$f(-9) = -2185, \quad f(6) = 1190.$$

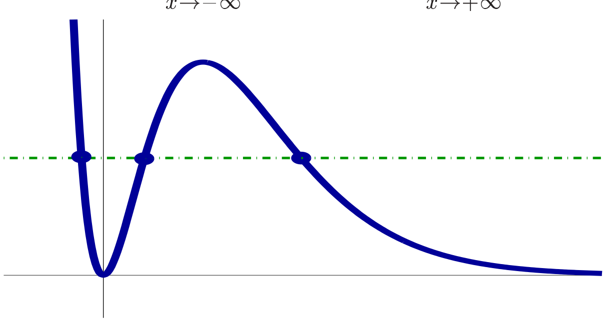
Rovnice má právě 1 řešení: $x_1 \in (6, \infty)$**.**

Příklad 8 (4)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$x^2 e^{-x} = \frac{11}{5}\,e^{-2}$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R}: \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$



$$f(x) = x^2 e^{-x},$$
$$f'(x) = (2\,x - x^2)\,e^{-x},$$
$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = 2$$
$$f(0) = 0, \quad f(2) = 4\,e^{-2}.$$

Rovnice má právě 3 řešení: $x_1 \in (-\infty, 0)$**,** $x_2 \in (0, 2)$**,** $x_3 \in (2, \infty)$**.**

Příklad 8 (5)

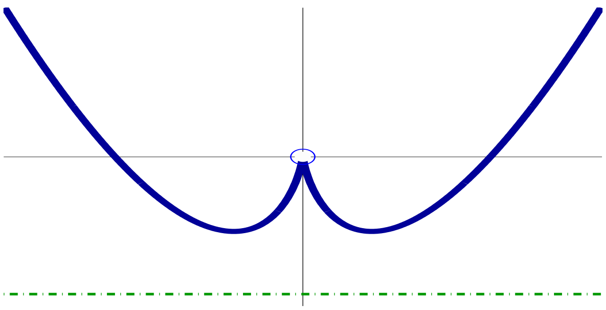
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$|\,x|\,\ln|\,x| = -0.6769$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = 0.$



$$f(x) = \begin{cases} x\,\ln(+x)\,, & x>0,\\ -x\,\ln(-x)\,, & x<0.\end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1+\ln(+x)\,, & x>0,\\ -1-\ln(-x)\,, & x<0.\end{cases}$$

$f'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{e};$

$f\left(\pm\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \quad (\doteq -0.36788)$

Rovnice nemá řešení.

Příklad 8 (6)

Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$2\cosh\big(5\,\mathrm{arctg}\,(x) - 3\,x^2 + 2\,x + 3\big) = 0.35$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

Rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.

Levou stranu rovnice chápeme jako reálnou funkci jedné reálné proměnné.
Tj. $\quad f(x) = 2\cosh(5\,\mathrm{arctg}\,(x) - 3\,x^2 + 2\,x + 3), \quad D_f = \mathbb{R}.$

Funkce f je omezená a v tomto případě rozhodne o řešitelnosti rovnice právě omezený obor hodnot funkce f:

$$\begin{array}{rll} & f_1(x) = \cosh(x), \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & D_{f_1} = \mathbb{R}, \quad H_{f_1} = \langle 1, +\infty)\,, \\ \Longrightarrow & f_2(x) = \cosh(5\,\mathrm{arctg}\,(x) - 3\,x^2 + 2\,x + 3), & D_{f_2} = D_f, \quad H_{f_2} \subseteq H_{f_1} = \langle 1, +\infty)\,, \\ \Longrightarrow & f(x) = 2\cosh(5\,\mathrm{arctg}\,(x) - 3\,x^2 + 2\,x + 3), & D_f = \mathbb{R}, \quad H_f \subseteq \langle 2, +\infty)\,. \end{array}$$

A vzhledem k tomu, že pravá strana rovnice $p = 0.35$ není prvkem oboru hodnot H_f funkce f *(platí dokonce* $0.35 \notin \langle 2, +\infty)$*)*, nemá zkoumaná nelineární rovnice žádné řešení v oboru reálných čísel.

Příklad 8 (7)

Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$3\,\mathrm{arctg}\,x + 4\cdot 6^x = 54.81$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

Rovnice má právě jedno řešení v oboru reálných čísel.

Levou stranu rovnice chápeme jako reálnou funkci jedné reálné proměnné.
Tj. $\quad f(x) = 3\,\mathrm{arctg}\,x + 4\cdot 6^x, \quad D_f = \mathbb{R}.$

Funkce f je dána součtem dvou ostře rostoucích funkcí a proto je také ostře rostoucí. Vyšetříme obor hodnot funkce f:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3\,\mathrm{arctg}\,x, \ \ldots\ldots\ldots \quad D_{f_1} = D_f, \quad H_{f_1} = \left(-\tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi\right), \\ f_2(x) &= 4\cdot 6^x, \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad D_{f_2} = D_f, \quad H_{f_2} = (0, +\infty), \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = 3\,\mathrm{arctg}\,x + 4\cdot 6^x, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad H_f = \left(-\tfrac{3}{2}\pi, +\infty\right).$$

Funkce f je ostře monotónní a pravá strana rovnice $p = 54.81$ je prvkem oboru hodnot H_f funkce f *(tj.* $54.81 \in H_f = \left(-\frac{3}{2}\pi, +\infty\right)$*)*. A proto má zkoumaná nelineární rovnice právě jedno řešení v oboru reálných čísel.

Příklad 8 (8)

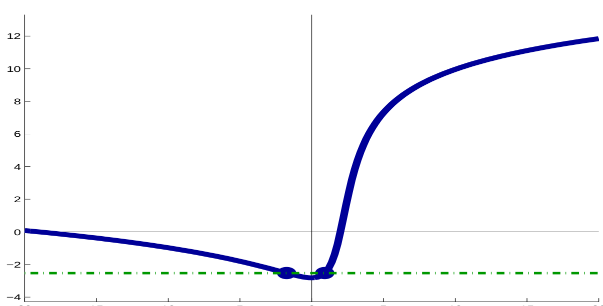
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\ln(x^2 - 4\,x + 5) + 4\,\mathrm{arctg}\,(x-2) = -2.53$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

Rovnice má právě 2 řešení: $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, \infty)$.



Na levou stranu rovnice se díváme jako na reálnou funkci jedné reálné proměnné:

$$f(x) = \ln(x^2 - 4\,x + 5) + 4\,\mathrm{arctg}\,(x-2).$$

Funkce $f(x)$ ($D_f = \mathbb{R}$) je spojitá a diferencovatelná na celém D_f. Ze znalosti jejího grafu budeme schopni rozhodnout o řešitelnosti zadané nelineární rovnice.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

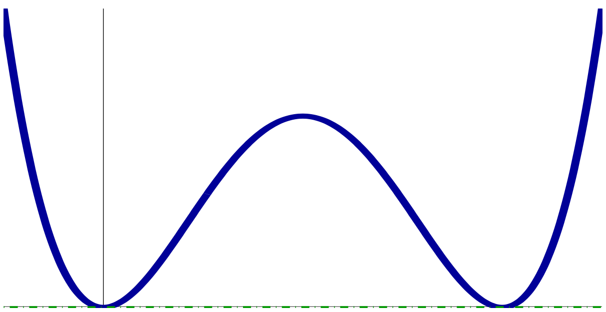
- $f'(x) = 0 \iff 2\,\dfrac{x}{x^2 - 4\,x + 5} = 0 \iff x = 0.$
- $f(0) = \ln(5) - 4\,\mathrm{arctg}\,(2).$

Příklad 8 (9)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$3\,x^4 - 36\,x^3 + 108\,x^2 - 1 = -1.05$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty.$



$$f(x) = 3\,x^4 - 36\,x^3 + 108\,x^2 - 1,$$
$$f'(x) = 12\,x^3 - 108\,x^2 + 216\,x,$$
$$f'(x) = 0 \iff x \in \{0, 3, 6\}$$
$$f(0) = -1, \quad f(3) = 242, \quad f(6) = -1.$$

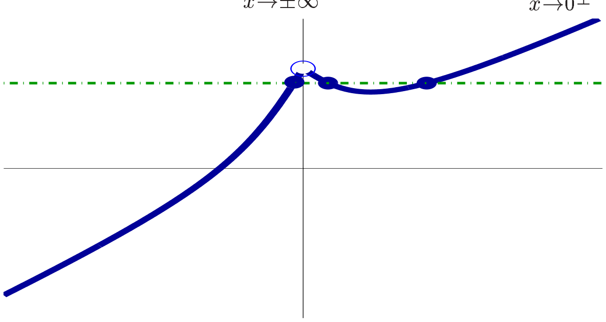
Rovnice nemá řešení.

Příklad 8 (10)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\frac{48}{85}\,x + \left| 8\,\mathrm{arctg}\left(\frac{6}{x}\right) \right| = 10.741$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}: \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = +4\,\pi\ (\doteq 12.566).$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{48}{85}\,x + 8\,\mathrm{arctg}\left(\frac{6}{x}\right), & x > 0, \\ \frac{48}{85}\,x - 8\,\mathrm{arctg}\left(\frac{6}{x}\right), & x < 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{48}{85}\,\frac{x^2-49}{x^2+36}, & x > 0, \\ \frac{48}{85}\,\frac{x^2+121}{x^2+36}, & x < 0. \end{cases}$$

tj. $f'(x) = 0 \iff x = 7; \quad f(7) \doteq 9.622$

Rovnice má právě 3 řešení: $x_1 \in (-\infty, 0)$**,** $x_2 \in (0, 7)$**,** $x_3 \in (7, \infty)$**.**

Příklad 8 (11)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$5 \ln(t-1) + 6\sqrt{1-t^2} = 7$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
Rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.

Levou stranu rovnice chápeme jako reálnou funkci jedné reálné proměnné.
Tj. $\quad f(t) = 5 \ln(t-1) + 6\sqrt{1-t^2}, \quad D_f = \emptyset.$

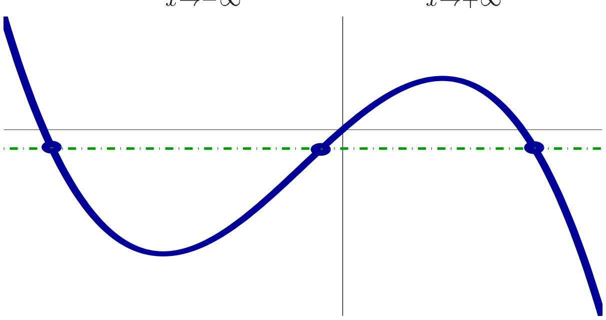
Vzhledem k tomu, že definičním oborem funkce f je prázdná množina, nemá zkoumaná nelineární rovnice žádné řešení v oboru reálných čísel.

Příklad 8 (12)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$-2\,x^3 - 12\,x^2 + 270\,x + 2 = -295.60$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R}: \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$



$$f(x) = -2\,x^3 - 12\,x^2 + 270\,x + 2,$$
$$f'(x) = -6\,x^2 - 24\,x + 270,$$
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -9 \;\vee\; x = 5$$
$$f(-9) = -1942, \quad f(5) = 802.$$

Rovnice má právě 3 řešení: $x_1 \in (-\infty, -9)$**,** $x_2 \in (-9, 5)$**,** $x_3 \in (5, \infty)$**.**

Příklad 8 (13)

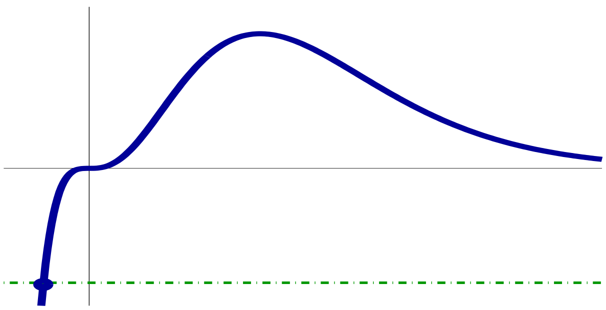
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$x^3 e^{-x} = -\frac{459}{20}\, e^{-3}$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

$D_f = \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$



$$f(x) = x^3 e^{-x},$$
$$f'(x) = (3\,x^2 - x^3)\, e^{-x},$$
$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = 3$$
$$f(0) = 0, \quad f(3) = 27\, e^{-3}.$$

Rovnice má právě 1 řešení: $x_1 \in (-\infty, 0)$.

Příklad 8 (14)

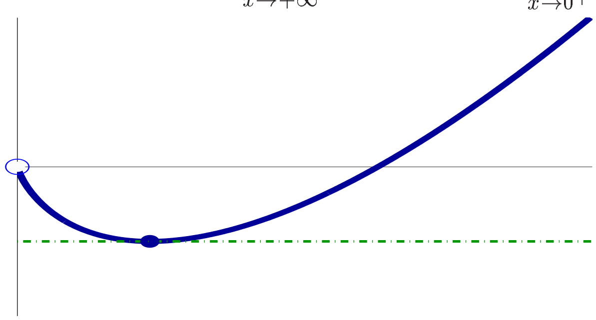
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$x\, \ln 6\, x = -\frac{1}{6e}$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

$D_f = (0, +\infty): \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0.$



$$f(x) \;=\; x\, \ln 6\, x, \quad x > 0.$$
$$f'(x) \;=\; 1 + \ln 6\, x, \quad x > 0.$$
$$f'(x) = 0 \iff x = \tfrac{1}{6e};$$
$$f\left(\tfrac{1}{6e}\right) = -\tfrac{1}{6e} \quad (\doteq 0.061313)$$

Rovnice má právě 1 řešení: $x_1 = \frac{1}{6}\, e^{-1}$.

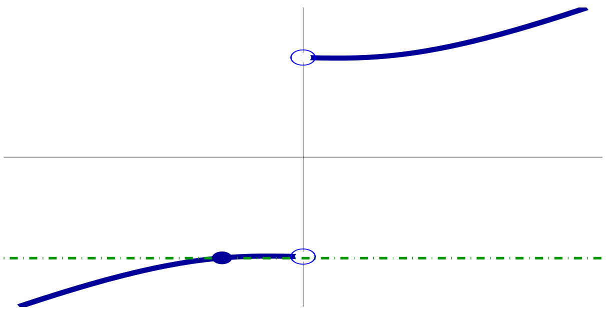
Příklad 8 (15)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\frac{12}{17}\,x + 3\,\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{x}\right) = -4.7831$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\frac{3}{2}\pi \; (\doteq \pm 4.7124).$



$$f(x) = \frac{12}{17}\,x + 3\,\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$$f'(x) = \frac{12}{17}\,\frac{x^2-1}{x^2+16}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

tj. $f'(x) = 0 \iff x = \pm 1;$

$f(-1) \doteq -4.6833, \quad f(1) \doteq 4.6833.$

Rovnice má právě 1 řešení: $x_1 \in (-\infty, -1)$.

Příklad 8 (16)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$6\sin t + 6\cosh t = 0.16$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

Rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.

Levou stranu rovnice chápeme jako reálnou funkci jedné reálné proměnné.
Tj. $\quad f(t) = 6\sin t + 6\cosh t, \quad D_f = \mathbb{R}.$

Funkce f je dána součtem dvou zdola omezených funkcí a proto je také zdola omezená. Ukážeme, že v tomto případě rozhodne o řešitelnosti rovnice právě zdola omezený obor hodnot funkce f:

$$\begin{aligned}
&f_1(t) = 6\sin t, \;\ldots\ldots\ldots \quad D_{f_1} = D_f, \quad H_{f_1} = \langle -6, 6\rangle\,,\\
&f_2(t) = 6\cosh t, \;\ldots\ldots\ldots \quad D_{f_2} = D_f, \quad H_{f_2} = \langle 6, +\infty)\,,\\
\Longrightarrow \quad &f(t) = 6\sin t + 6\cosh t, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad H_f \subseteq \langle 0, +\infty)\,.
\end{aligned}$$

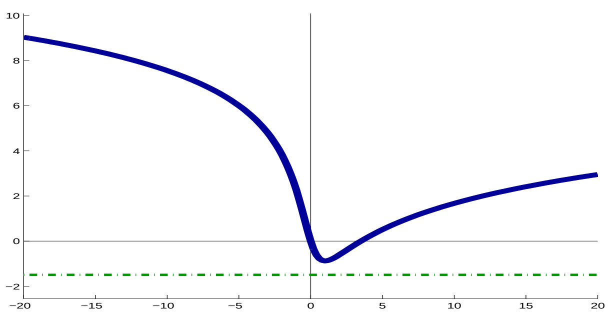
A vzhledem k tomu, že pravá strana rovnice $p = 0.16$ není prvkem oboru hodnot H_f funkce f *(platí dokonce* $0.16 \notin \langle 0, +\infty)$*)* nemá zkoumaná nelineární rovnice žádné řešení v oboru reálných čísel.

Příklad 8 (17)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\ln(x^2 + 1) - 2\,\mathrm{arctg}\,(x) = -1.50$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
Rovnice nemá řešení.



Na levou stranu rovnice se díváme jako na reálnou funkci jedné reálné proměnné:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - 2\,\mathrm{arctg}\,(x).$$

Funkce $f(x)$ ($D_f = \mathbb{R}$) je spojitá a diferencovatelná na celém D_f. Ze znalosti jejího grafu budeme schopni rozhodnout o řešitelnosti zadané nelineární rovnice.

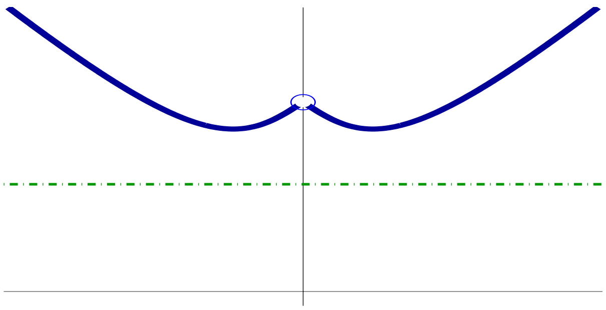
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = 0 \iff 2\,\dfrac{x-1}{x^2+1} = 0 \iff x = 1.$
- $f(1) = \ln(2) - \frac{1}{2}\,\pi.$

Příklad 8 (18)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\left| \frac{32}{113}\,x + 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{8}{x}\right) \right| = 3.5575$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f(x) = 2\,\pi\ (\doteq \mathit{6.2832}).$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{32}{113}\,x + 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{8}{x}\right), & x > 0, \\ -\frac{32}{113}\,x - 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{8}{x}\right), & x < 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{32}{113}\,\frac{x^2-49}{x^2+64}, & x > 0, \\ -\frac{32}{113}\,\frac{x^2-49}{x^2+64}, & x < 0. \end{cases}$$

tj. $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 7$;

$f(-7) \doteq 5.3902, \quad f(7) \doteq 5.3902$

Rovnice nemá řešení.

Příklad 8 (19)

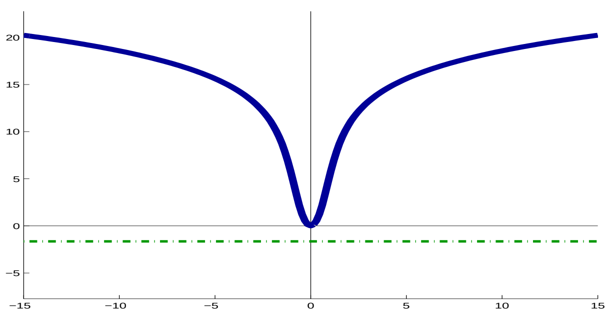
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\ln(x^4 + 1) + 6\,\mathrm{arctg}\,(x^2) = -1.64$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

Rovnice nemá řešení.



Na levou stranu rovnice se díváme jako na reálnou funkci jedné reálné proměnné:

$$f(x) = \ln(x^4 + 1) + 6\,\mathrm{arctg}\,(x^2).$$

Funkce $f(x)$ ($D_f = \mathbb{R}$) je spojitá a diferencovatelná na celém D_f. Ze znalosti jejího grafu budeme schopni rozhodnout o řešitelnosti zadané nelineární rovnice.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 4\,\dfrac{x\,(x^2+3)}{x^4+1} = 0 \Longleftrightarrow x \in \left\{0,\ \sqrt{-1}\sqrt{3},\ -\sqrt{-1}\sqrt{3}\right\}$.
- $f(0) = 0,\ f(\sqrt{-1}\sqrt{3}) = \ln(10) - 6\,\mathrm{arctg}\,(3),\ f(-\sqrt{-1}\sqrt{3}) = \ln(10) - 6\,\mathrm{arctg}\,(3)$.

Příklad 8 (20)

Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$3\,y^2 + 4\,|\mathrm{arctg}\,y| = 15.62$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

Rovnice má právě dvě řešení v oboru reálných čísel.

Levou stranu rovnice chápeme jako reálnou funkci jedné reálné proměnné.
Tj. $f(y) = 3\,y^2 + 4\,|\mathrm{arctg}\,y|, \quad D_f = \mathbb{R}.$

Funkce f je dána součtem dvou sudých funkcí, které jsou ostře klesající na $(-\infty, 0\rangle$ a ostře rostoucí na $\langle 0, +\infty)$. Vyšetříme obor hodnot funkce f:

$$f_1(y) = 3\,y^2, \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; D_{f_1} = D_f, \quad H_{f_1} = \langle 0, +\infty)\,,$$
$$f_2(y) = 4\,|\mathrm{arctg}\,y|, \;\ldots\ldots\; D_{f_2} = D_f, \quad H_{f_2} = \langle 0, 2\,\pi)\,,$$
$$\Longrightarrow \quad f(y) = 3\,y^2 + 4\,|\mathrm{arctg}\,y|, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad H_f = \langle 0, +\infty)\,.$$

Pravá strana rovnice $p = 15.62$ je prvkem oboru hodnot H_f funkce f.
Funkce f je sudá, ale také ostře monotónní na $\langle 0, +\infty)$.
Protože řešením není $x_0 = 0$, musí být řešením nějaké $x_0 > 0$. Potom ale i $-x_0$ je řešením, protože f je sudá. Zkoumaná nelineární rovnice tak má právě dvě různá řešení v oboru reálných čísel (tj. x_0 a $-x_0$).

Příklad 8 (21)

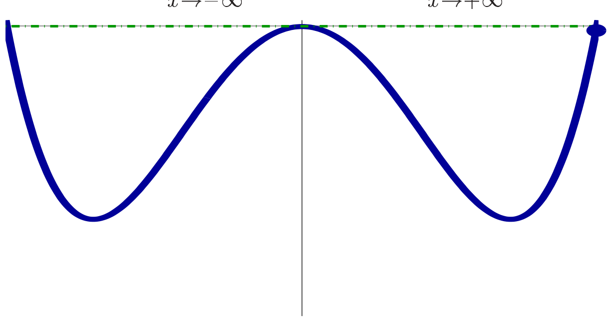
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$3\,x^4 - 150\,x^2 - 6 = -2.85$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

$D_f = \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty.$



$$f(x) = 3\,x^4 - 150\,x^2 - 6,$$
$$f'(x) = 12\,x^3 - 300\,x,$$
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-5, 0, 5\}$$
$$f(-5) = -1881, \quad f(0) = -6, \quad f(5) = -1881.$$

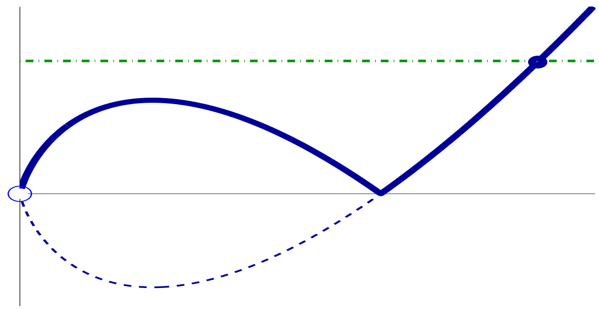
Rovnice má právě 2 řešení: $x_1 \in (-\infty, -5)$**,** $x_2 \in (5, \infty)$**.**

Příklad 8 (22)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$|\, x \ln 3\, x| = 0.17413$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = (0, +\infty):\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0.$



$$f(x) = \begin{cases} x \ln 3\, x, & x \in \left\langle \frac{1}{3}, +\infty \right), \\ -x \ln 3\, x, & x \in \left(0, \frac{1}{3}\right). \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \ln 3\, x, & x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right), \\ -1 - \ln 3\, x, & x \in \left(0, \frac{1}{3}\right). \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{3e};$

$f\left(\frac{1}{3e}\right) = \frac{1}{3e}$ $(\doteq 0.12263)$

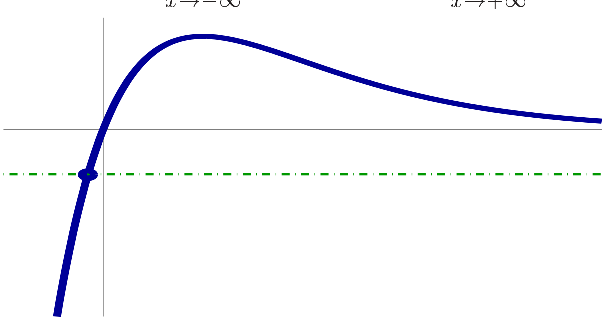
Rovnice má právě 1 řešení: $x_1 \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$.

Příklad 8 (23)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$x\, e^{-2\,x} = -\frac{7}{80}$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R}:\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$



$f(x) = x\, e^{-2\,x},$
$f'(x) = (1 - 2\,x)\, e^{-2\,x},$
$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\, e^{-1}.$

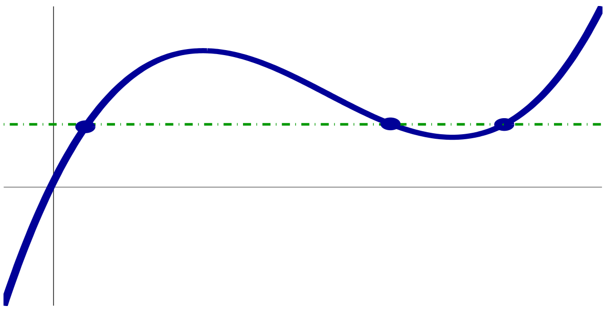
Rovnice má právě 1 řešení: $x_1 \in (-\infty, 0)$.

Příklad 8 (24)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$2\,x^3 - 33\,x^2 + 144\,x + 8 = 90.75$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty.$



$$f(x) = 2\,x^3 - 33\,x^2 + 144\,x + 8,$$
$$f'(x) = 6\,x^2 - 66\,x + 144,$$
$$f'(x) = 0 \iff x = 3 \ \vee\ x = 8$$
$$f(3) = 197, \quad f(8) = 72.$$

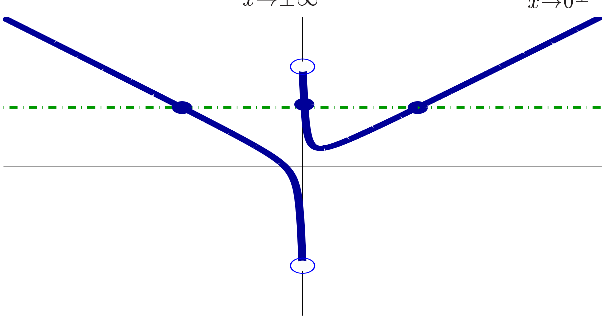
Rovnice má právě 3 řešení: $x_1 \in (-\infty, 3)$**,** $x_2 \in (3, 8)$**,** $x_3 \in (8, \infty)$**.**

Příklad 8 (25)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\left|\frac{7}{50}\,x\right| + 7\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = 6.4844$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}: \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\frac{7}{2}\,\pi \ (\doteq \pm\mathit{10.996}).$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{7}{50}\,x + 7\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ -\frac{7}{50}\,x + 7\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), & x < 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{7}{50}\,\frac{x^2-49}{x^2+1}, & x > 0, \\ -\frac{7}{50}\,\frac{x^2+51}{x^2+1}, & x < 0. \end{cases}$$

tj. $f'(x) = 0 \iff x = 7; \quad f(7) \doteq \mathit{1.9733}$

Rovnice má právě 3 řešení: $x_1 \in (-\infty, 0)$**,** $x_2 \in (0, 7)$**,** $x_3 \in (7, \infty)$**.**

Příklad 8 (26)

Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$-3\,t + 6\,e^{-t} = -6.45$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

Rovnice má právě jedno řešení v oboru reálných čísel.

Levou stranu rovnice chápeme jako reálnou funkci jedné reálné proměnné.
Tj. $\quad f(t) = -3\,t + 6\,e^{-t}, \quad D_f = \mathbb{R}.$

Funkce f je dána součtem dvou ostře klesajících funkcí a proto je také ostře klesající. Vyšetříme obor hodnot funkce f:

$$f_1(t) = -3\,t, \;\ldots\ldots\; D_{f_1} = D_f, \quad H_{f_1} = \mathbb{R},$$
$$f_2(t) = 6\,e^{-t}, \;\ldots\ldots\; D_{f_2} = D_f, \quad H_{f_2} = (0, +\infty)\,,$$
$$\Longrightarrow \quad f(t) = -3\,t + 6\,e^{-t}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad H_f = \mathbb{R}.$$

Funkce f je ostře monotónní a pravá strana rovnice $p = -6.45$ je prvkem oboru hodnot H_f funkce f *(tj.* $-6.45 \in H_f = \mathbb{R}$*)*. A proto má zkoumaná nelineární rovnice právě jedno řešení v oboru reálných čísel.

Příklad 8 (27)

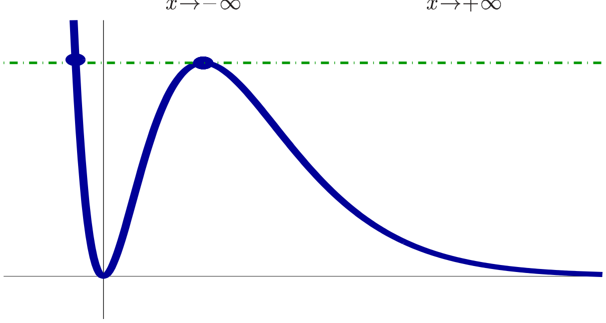
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\frac{x^2}{e^{7\,x}} = \frac{4}{49}\,e^{-2}$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

$D_f = \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$



$$f(x) = x^2 e^{-7\,x},$$
$$f'(x) = (2\,x - 7\,x^2)\,e^{-7\,x},$$
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \;\vee\; x = \tfrac{2}{7}$$
$$f(0) = 0, \quad f(\tfrac{2}{7}) = \tfrac{4}{49}\,e^{-2}.$$

Rovnice má právě 2 řešení: $x_1 \in (-\infty, 0)$**,** $x_2 = \frac{2}{7}$**.**

Příklad 8 (28)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$2\ln(2+t) + 6\sqrt{4-t^2} = -1$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
Rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.

Levou stranu rovnice chápeme jako reálnou funkci jedné reálné proměnné.
Tj. $\quad f(t) = 2\ln(2+t) + 6\sqrt{4-t^2}, \quad D_f = \emptyset.$

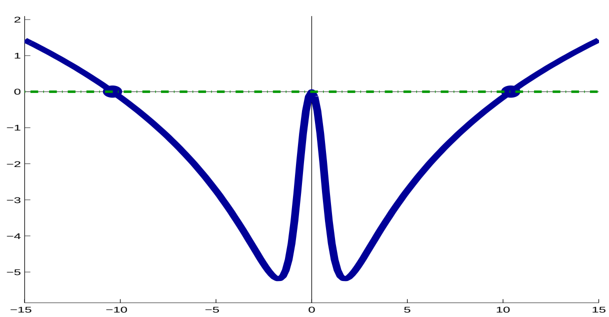
Vzhledem k tomu, že definičním oborem funkce f je prázdná množina, nemá zkoumaná nelineární rovnice žádné řešení v oboru reálných čísel.

Příklad 8 (29)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\ln(x^4+1) - 6\,\mathrm{arctg}\,(x^2) = 0$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
Rovnice má právě 3 řešení: $x_1 \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $x_2 = 0$, $x_3 \in \left(\sqrt{3}, \infty\right)$.



Na levou stranu rovnice se díváme jako na reálnou funkci jedné reálné proměnné:

$$f(x) = \ln(x^4+1) - 6\,\mathrm{arctg}\,(x^2).$$

Funkce $f(x)$ ($D_f = \mathbb{R}$) je spojitá a diferencovatelná na celém D_f. Ze znalosti jejího grafu budeme schopni rozhodnout o řešitelnosti zadané nelineární rovnice.

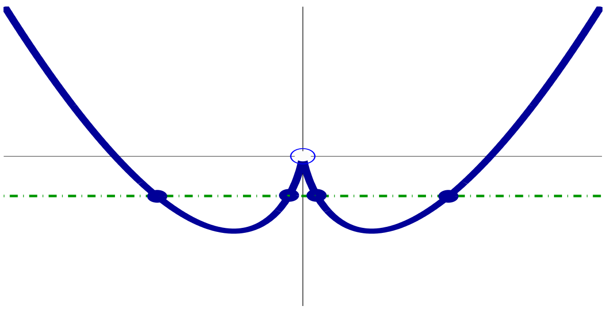
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = 0 \iff 4\,\dfrac{x\,(x^2-3)}{x^4+1} = 0 \iff x \in \left\{0,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}\right\}.$
- $f(0) = 0,\ \ f(\sqrt{3}) = \ln(10) - 6\,\mathrm{arctg}\,(3),\ \ f(-\sqrt{3}) = \ln(10) - 6\,\mathrm{arctg}\,(3).$

Příklad 8 (30)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$|x| \ln |6x| = -0.032496$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = 0.$



$$f(x) = \begin{cases} x \ln(+6x), & x > 0, \\ -x \ln(-6x), & x < 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \ln(+6x), & x > 0, \\ -1 - \ln(-6x), & x < 0. \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{6e};$

$f\left(\pm\frac{1}{6e}\right) = -\frac{1}{6e} \quad (\doteq -0.061313)$

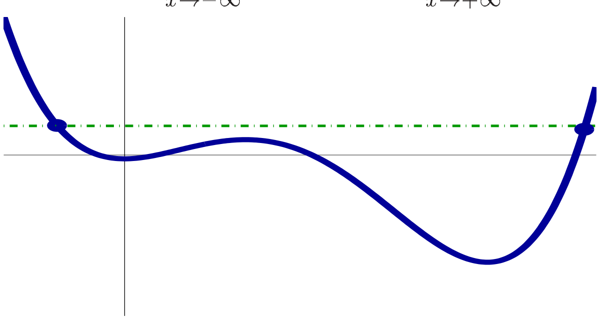
Rovnice má právě 4 řešení:
$x_1 \in \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}e^{-1}\right)$, $x_2 \in \left(-\frac{1}{6}e^{-1}, 0\right)$, $x_3 \in \left(0, \frac{1}{6}e^{-1}\right)$, $x_4 \in \left(\frac{1}{6}e^{-1}, \frac{1}{6}\right)$.

Příklad 8 (31)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$3x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 1 = 7.60$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty.$



$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 1,$
$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x,$

$f'(x) = 0 \iff x \in \{0, 1, 3\}$

$f(0) = -1, \quad f(1) = 4, \quad f(3) = -28.$

Rovnice má právě 2 řešení: $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (3, \infty)$.

Příklad 8 (32)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$-3\,\ln y + 6\,e^{-y} = 20.62$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
Rovnice má právě jedno řešení v oboru reálných čísel.

Levou stranu rovnice chápeme jako reálnou funkci jedné reálné proměnné.
Tj. $\quad f(y) = -3\,\ln y + 6\,e^{-y}, \quad D_f = (0, +\infty)$.

Funkce f je dána součtem dvou ostře klesajících funkcí a proto je také ostře klesající. Vyšetříme obor hodnot funkce f:

$$\begin{aligned} f_1(y) &= -3\,\ln y, \;\ldots\ldots \quad D_{f_1} = D_f, \qquad H_{f_1} = \mathbb{R}, \\ f_2(y) &= 6\,e^{-y}, \;\ldots\ldots\ldots \quad D_{f_2} = D_f, \qquad H_{f_2} = (0, 6)\,, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad f(y) = -3\,\ln y + 6\,e^{-y}, \quad D_f = (0, +\infty)\,, \quad H_f = \mathbb{R}.$$

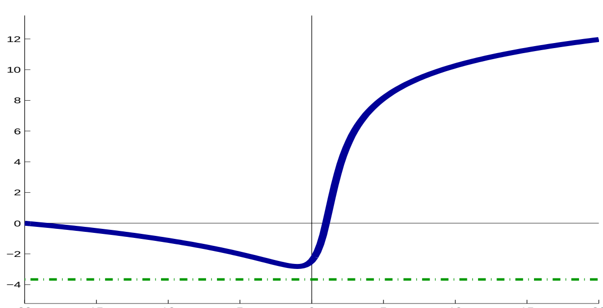
Funkce f je ostře monotónní a pravá strana rovnice $p = 20.62$ je prvkem oboru hodnot H_f funkce f *(tj.* $20.62 \in H_f = \mathbb{R}$*)*. A proto má zkoumaná nelineární rovnice právě jedno řešení v oboru reálných čísel.

Příklad 8 (33)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\ln(x^2 - 2\,x + 2) + 4\,\mathrm{arctg}\,(x - 1) = -3.67$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
Rovnice nemá řešení.



Na levou stranu rovnice se díváme jako na reálnou funkci jedné reálné proměnné:

$$f(x) = \ln(x^2 - 2\,x + 2) + 4\,\mathrm{arctg}\,(x - 1).$$

Funkce $f(x)$ ($D_f = \mathbb{R}$) je spojitá a diferencovatelná na celém D_f. Ze znalosti jejího grafu budeme schopni rozhodnout o řešitelnosti zadané nelineární rovnice.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2\,\dfrac{x+1}{x^2-2\,x+2} = 0 \Longleftrightarrow x = -1.$
- $f(-1) = \ln(5) - 4\,\mathrm{arctg}\,(2).$

Příklad 8 (34)

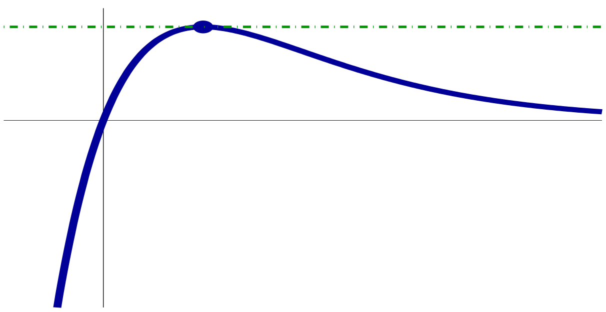
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\frac{x}{e^{5\,x}} = \frac{1}{5}\,e^{-1}$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

$D_f = \mathbb{R}: \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$



$f(x) = x\,e^{-5\,x},$
$f'(x) = (1-5\,x)\,e^{-5\,x},$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{5}$

$f(\frac{1}{5}) = \frac{1}{5}\,e^{-1}.$

Rovnice má právě 1 řešení: $x_1 = \frac{1}{5}$.

Příklad 8 (35)

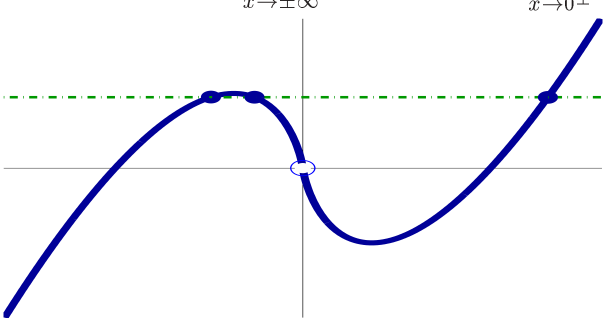
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$x\,\ln|6\,x| = 0.058248$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}: \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to0^\pm} f(x) = 0.$



$$f(x) = \begin{cases} x\,\ln(+6\,x), & x > 0, \\ x\,\ln(-6\,x), & x < 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \ln(+6\,x) + 1, & x > 0, \\ \ln(-6\,x) + 1, & x < 0. \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{6e}$

$f\left(\pm\frac{1}{6e}\right) = \mp\frac{1}{6e} \quad (\doteq \mp 0.061313)$

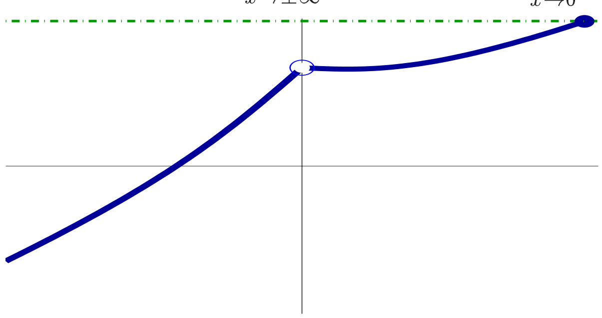
Rovnice má právě 3 řešení: $x_1 \in \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\, e^{-1}\right)$, $x_2 \in \left(-\frac{1}{6}\, e^{-1}, 0\right)$, $x_3 \in \left(\frac{1}{6}, \infty\right)$.

Příklad 8 (36)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\frac{9}{5}\, x + \left| 6 \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{x}\right) \right| = 13.902$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f(x) = +3\,\pi \ (\doteq 9.4248)$.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{5}\, x + 6 \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{x}\right), & x > 0, \\ \frac{9}{5}\, x - 6 \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{x}\right), & x < 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{9}{5}\, \frac{x^2-1}{x^2+9}, & x > 0, \\ \frac{9}{5}\, \frac{x^2+19}{x^2+9}, & x < 0. \end{cases}$$

tj. $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1; \quad f(1) \doteq 9.2943$

Rovnice má právě 1 řešení: $x_1 \in (1, \infty)$.

Příklad 8 (37)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$2\, e^{|y|} + 6\, |y| = 4.62$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
Rovnice má právě dvě řešení v oboru reálných čísel.

Levou stranu rovnice chápeme jako reálnou funkci jedné reálné proměnné.
Tj. $\quad f(y) = 2\, e^{|y|} + 6\, |y|, \quad D_f = \mathbb{R}$.

Funkce f je dána součtem dvou sudých funkcí, které jsou ostře klesající na $(-\infty, 0\rangle$ a ostře rostoucí na $\langle 0, +\infty)$. Vyšetříme obor hodnot funkce f:

$$f_1(y) = 2\, e^{|y|}, \ \ldots\ldots \quad D_{f_1} = D_f, \quad H_{f_1} = \langle 2, +\infty),$$
$$f_2(y) = 6\, |y|, \ \ldots\ldots \quad D_{f_2} = D_f, \quad H_{f_2} = \langle 0, +\infty),$$
$$\Longrightarrow \quad f(y) = 2\, e^{|y|} + 6\, |y|, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad H_f = \langle 2, +\infty).$$

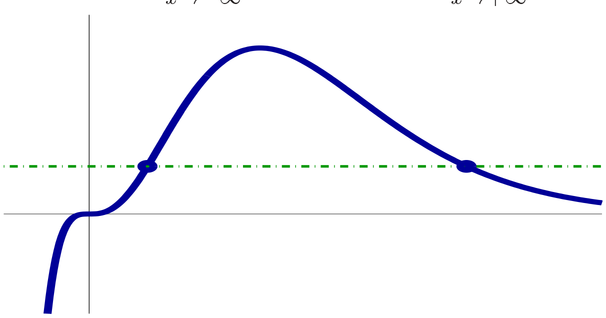
Pravá strana rovnice $p = 4.62$ je prvkem oboru hodnot H_f funkce f.
Funkce f je sudá, ale také ostře monotónní na $\langle 0, +\infty)$.
Protože řešením není $x_0 = 0$, musí být řešením nějaké $x_0 > 0$. Potom ale i $-x_0$ je řešením, protože f je sudá. Zkoumaná nelineární rovnice tak má právě dvě různá řešení v oboru reálných čísel (tj. x_0 a $-x_0$).

Příklad 8 (38)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\frac{x^3}{e^{3\,x}} = \frac{1}{70}$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$



$$f(x) = x^3 e^{-3\,x},$$
$$f'(x) = (3\,x^2 - 3\,x^3)\,e^{-3\,x},$$
$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \ \vee\ x = 1$$
$$f(0) = 0, \quad f(1) = e^{-3}.$$

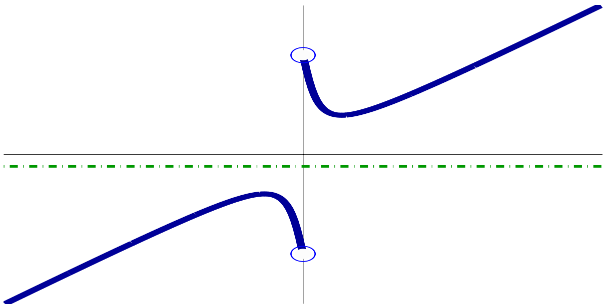
Rovnice má právě 2 řešení: $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, \infty)$.

Příklad 8 (39)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$\frac{1}{20}\,x + \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right) = -0.18653$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\frac{1}{2}\,\pi \ (\doteq \pm\mathit{1.5708}).$



$$f(x) = \frac{1}{20}x + \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{20}\frac{x^2-36}{x^2+4}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

tj. $f'(x) = 0 \iff x = \pm 6;$

$f(-6) \doteq -0.62175, \quad f(6) \doteq 0.62175.$

Rovnice nemá řešení.

Příklad 8 (40)
Rozhodněte, kolik řešení má v oboru reálných čísel nelineární rovnice:

$$4\ln(y+3) + 5\sqrt{9-y^2} = -10$$

Své rohodnutí pečlivě zdůvodněte a definujte intervaly $I_k \subset \mathbb{R}$, tak aby každý z nich obsahoval právě jedno řešení.

Řešení:
Rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.

Levou stranu rovnice chápeme jako reálnou funkci jedné reálné proměnné.
Tj. $f(y) = 4\ln(y+3) + 5\sqrt{9-y^2}, \quad D_f = \emptyset.$

Vzhledem k tomu, že definičním oborem funkce f je prázdná množina, nemá zkoumaná nelineární rovnice žádné řešení v oboru reálných čísel.