Příklad 3.2. (1)

Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & -5 & -3 \\ -5 & 22 & 2 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 25 \\ 27 \\ 33 \end{bmatrix}.$$

Použijte SOR metodu. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu, parametr $\omega = 1.1$ a zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:

Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{SOR}} = (\omega\mathbf{M} + \mathbf{D})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{N}]$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{SOR}} = (\omega\mathbf{M} + \mathbf{D})^{-1}\omega\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}$ je dolní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ po odečtení diagonály a $\mathbf{N}$ je horní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ bez diagonály. Pro výpočet pomocí tohoto zápisu je potřeba invertovat trojúhelníkovou matici, což sice nepředstavuje problém, nicméně to přidává tolik výpočetních operací, že by takto popsaná metoda nebyla efektivní.
Využijeme iterační formuli ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \tfrac{1.1}{11}\left(25 + 5x_2^{(n)} + 3x_3^{(n)}\right) + (1-1.1)x_1^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} &= \tfrac{1.1}{22}\left(27 + 5x_1^{(n+1)} - 2x_3^{(n)}\right) + (1-1.1)x_2^{(n)} \\ x_3^{(n+1)} &= \tfrac{1.1}{7}\left(33 + 3x_1^{(n+1)} - 2x_2^{(n+1)}\right) + (1-1.1)x_3^{(n)} \end{aligned}$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 25 & 27 & 33 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 23.4 & 1.2 & 12.54 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 25.8$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4.522 & 1.1065 & 5.7158 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 18.878$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 4.3158 & 1.7467 & 6.0998 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.64022$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 4.7717 & 1.7583 & 6.2727 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.45593$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 4.7838 & 1.7428 & 6.2659 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.015432$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 4.7728 & 1.7423 & 6.2616 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.010948$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 4.7724 & 1.7427 & 6.2617 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.00046124$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (2)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 19 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 14 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Použijte Jakobiho metodu v podobě iterační formule $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{H}^{\mathbf{J}}\mathbf{x}_n + \mathbf{g}^{\mathbf{J}}$. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu. Zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{J}} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{N})$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{J}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}+\mathbf{N} = \mathbf{A}-\mathbf{D}$. Tedy

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}+\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

a iterační matice jsou

$$\mathbf{H}^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{19} & 0 & -\frac{1}{19} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{14} & 0 & 0 & -\frac{3}{14} \\ -\frac{5}{9} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{6}{19} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{8}{9} \end{bmatrix}$$

Iterační proces provádíme pomocí formule $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{H}^{\mathbf{J}}\mathbf{x}_n + \mathbf{g}^{\mathbf{J}}$. Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -0.31579 & -1 & -3.4286 & -4.4444 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 12.4444$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.65497 & 1.0741 & 1.4937 & 2.2072 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 6.6516$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.086561 & -0.034531 & -0.27831 & 0.027105 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 2.1801$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.318 & 0.32882 & 0.39185 & 0.93357 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.90647$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.23204 & 0.17774 & 0.11495 & 0.58161 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.35196$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.26647 & 0.2364 & 0.22107 & 0.72166 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.14005$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.25292 & 0.21306 & 0.17876 & 0.66716 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.054499$$

$$\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 0.25825 & 0.22214 & 0.19528 & 0.68879 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.021628$$

$$\mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 0.25615 & 0.21854 & 0.18874 & 0.68032 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.008464$$

$$\mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 0.25698 & 0.21995 & 0.1913 & 0.68367 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0033424$$

Příklad 3.2. (3)
Nalezněte extrém funkce $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Použijte metodu největšího spádu. Jako počáteční aproximaci užijte pravou stranu a zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační formuli píšeme

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{t}^{(n)}\mathbf{d}^{(n)},$$

kde

$$\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b} \quad \text{a} \quad \mathbf{t}^{(n)} = \frac{\mathbf{d}^{(n)T}\mathbf{d}^{(n)}}{\mathbf{d}^{(n)T}\mathbf{A}\mathbf{d}^{(n)}}$$

První iteraci tedy provedeme tak, že spočítáme směr spádu (gradient) $\mathbf{d}^{(0)}$, tedy

$$\mathbf{d}^{(0)} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Jako další operaci spočítáme délku pohybu po vektoru $\mathbf{d}^{(0)}$, tedy

$$\mathbf{t}^{(0)} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix}} = \frac{212}{1684} = 0.12589.$$

Hodnotu $\mathbf{x}^{(1)}$ potom získáme pomocí

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 0.12589\begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49644 \\ 0.23753 \end{bmatrix}.$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max\limits_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.49644 & 0.23753 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 1.7625$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.19883 & 0.32256 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.2976$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.18066 & 0.25894 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.063621$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.16991 & 0.26201 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.010743$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.16926 & 0.25971 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0022965$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.16887 & 0.25982 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.00038778$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (4)
Nalezněte extrém funkce $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Použijte metodu největšího spádu. Jako počáteční aproximaci užijte pravou stranu a zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační formuli píšeme

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{t}^{(n)}\mathbf{d}^{(n)},$$

kde

$$\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b} \quad \text{a} \quad \mathbf{t}^{(n)} = \frac{\mathbf{d}^{(n)T}\mathbf{d}^{(n)}}{\mathbf{d}^{(n)T}\mathbf{A}\mathbf{d}^{(n)}}$$

První iteraci tedy provedeme tak, že spočítáme směr spádu (gradient) $\mathbf{d}^{(0)}$, tedy

$$\mathbf{d}^{(0)} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Jako další operaci spočítáme délku pohybu po vektoru $\mathbf{d}^{(0)}$, tedy

$$\mathbf{t}^{(0)} = \frac{\begin{bmatrix} 10 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 10 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix}} = \frac{296}{1712} = 0.1729.$$

Hodnotu $\mathbf{x}^{(1)}$ potom získáme pomocí

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 0.1729\begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.27103 \\ 0.57944 \end{bmatrix}.$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max\limits_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \left[\begin{array}{cc} 0.27103 & 0.57944 \end{array}\right]^T, \qquad \varepsilon = 2.4206$$

$$\mathbf{x}_2 = \left[\begin{array}{cc} 0.34147 & 0.52913 \end{array}\right]^T, \qquad \varepsilon = 0.07044$$

$$\mathbf{x}_3 = \left[\begin{array}{cc} 0.33888 & 0.5255 \end{array}\right]^T, \qquad \varepsilon = 0.0036207$$

$$\mathbf{x}_4 = \left[\begin{array}{cc} 0.33899 & 0.52543 \end{array}\right]^T, \qquad \varepsilon = 0.00010537$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (5)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 23 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

Použijte SOR metodu. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu, parametr $\omega = 1.4$ a zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{SOR}} = (\omega\mathbf{M} + \mathbf{D})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{N}]$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{SOR}} = (\omega\mathbf{M} + \mathbf{D})^{-1}\omega\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}$ je dolní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ po odečtení diagonály a $\mathbf{N}$ je horní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ bez diagonály. Pro výpočet pomocí tohoto zápisu je potřeba invertovat trojúhelníkovou matici, což sice nepředstavuje problém, nicméně to přidává tolik výpočetních operací, že by takto popsaná metoda nebyla efektivní.
Využijeme iterační formuli ve tvaru

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(n+1)} & = & \frac{1.4}{15}(30) + (1-1.4)x_1^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} & = & \frac{1.4}{15}(23) + (1-1.4)x_2^{(n)} \\ x_3^{(n+1)} & = & \frac{1.4}{15}(32) + (1-1.4)x_3^{(n)} \end{array}$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \left[\begin{array}{ccc} 30 & 23 & 32 \end{array}\right]^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \left[\begin{array}{ccc} -9.2 & -7.0533 & -9.8133 \end{array}\right]^T, \qquad \varepsilon = 41.8133$$

$$\mathbf{x}_2 = \left[\begin{array}{ccc} 6.48 & 4.968 & 6.912 \end{array}\right]^T, \qquad \varepsilon = 16.7253$$

$$\mathbf{x}_3 = \left[\begin{array}{ccc} 0.208 & 0.15947 & 0.22187 \end{array}\right]^T, \qquad \varepsilon = 6.6901$$

$$\mathbf{x}_4 = \left[\begin{array}{ccc} 2.7168 & 2.0829 & 2.8979 \end{array}\right]^T, \qquad \varepsilon = 2.6761$$

$$\mathbf{x}_5 = \left[\begin{array}{ccc} 1.7133 & 1.3135 & 1.8275 \end{array}\right]^T, \qquad \varepsilon = 1.0704$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 2.1147 & 1.6213 & 2.2557 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.42817$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 1.9541 & 1.4982 & 2.0844 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.17127$$

$$\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 2.0184 & 1.5474 & 2.1529 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.068507$$

$$\mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 1.9927 & 1.5277 & 2.1255 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.027403$$

$$\mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 2.0029 & 1.5356 & 2.1365 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.010961$$

Příklad 3.2. (6)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 24 & 8 & 7 \\ 5 & 30 & 7 \\ 3 & 10 & 23 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Použijte Jakobiho metodu v podobě iterační formule $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{H}^{\mathbf{J}}\mathbf{x}_n + \mathbf{g}^{\mathbf{J}}$. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu. Zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{J}} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{N})$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{J}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}+\mathbf{N} = \mathbf{A}-\mathbf{D}$. Tedy

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}+\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 7 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

a iterační matice jsou

$$\mathbf{H}^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{24} \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{7}{30} \\ -\frac{3}{23} & -\frac{10}{23} & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{3}{23} \end{bmatrix}$$

Iterační proces provádíme pomocí formule $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{H}^{\mathbf{J}}\mathbf{x}_n + \mathbf{g}^{\mathbf{J}}$. Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 3 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1.4583 & -2.2667 & -2.4783 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 11.4583$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1.895 & 0.92132 & 1.3062 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 3.7844$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -0.2714 & -0.52061 & -0.51732 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 2.1665$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.74109 & 0.26594 & 0.39219 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 1.0125$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.21363 & -0.11503 & -0.081855 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.52746$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.47888 & 0.083494 & 0.15258 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.26525$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.34433 & -0.015416 & 0.03167 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.13455$$

$$\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 0.41257 & 0.035222 & 0.092224 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.068236$$

$$\mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 0.37803 & 0.0097196 & 0.061308 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.034541$$

$$\mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 0.39555 & 0.02269 & 0.076901 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.017518$$

Příklad 3.2. (7)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 29 & -1 & -3 \\ -1 & 28 & -3 \\ -3 & -3 & 32 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Použijte Gaussovu-Seidelovu metodu. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu. Zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{GS}} = -(\mathbf{M}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{N}$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{GS}} = (\mathbf{M}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}$ je dolní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ po odečtení diagonály a $\mathbf{N}$ je horní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ bez diagonály. Pro výpočet pomocí tohoto zápisu je potřeba invertovat trojúhelníkovou matici, což sice nepředstavuje problém, nicméně to přidává tolik výpočetních operací, že by takto popsaná metoda nebyla efektivní.
Využijeme iterační formuli ve tvaru

$$\begin{aligned}
x_1^{(n+1)} &= \tfrac{1}{29}\left(11 + 1x_2^{(n)} + 3x_3^{(n)}\right)\\
x_2^{(n+1)} &= \tfrac{1}{28}\left(9 + 1x_1^{(n+1)} + 3x_3^{(n)}\right)\\
x_3^{(n+1)} &= \tfrac{1}{32}\left(7 + 3x_1^{(n+1)} + 3x_2^{(n+1)}\right)
\end{aligned}$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 7 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1.4138 & 1.1219 & 0.45647 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 9.5862$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.46522 & 0.38695 & 0.29864 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.94857$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.42355 & 0.36855 & 0.29301 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.041671$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.42233 & 0.36791 & 0.29283 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.001217$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.42229 & 0.36789 & 0.29283 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 4.0381e-05$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (8)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 3 & 14 & 3 \\ 1 & 3 & 24 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Použijte SOR metodu. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu, parametr $\omega = 1.4$ a zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{SOR}} = (\omega\mathbf{M} + \mathbf{D})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{N}]$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{SOR}} = (\omega\mathbf{M} + \mathbf{D})^{-1}\omega\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}$ je dolní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ po odečtení diagonály a $\mathbf{N}$ je horní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ bez diagonály. Pro výpočet pomocí tohoto zápisu je potřeba invertovat trojúhelníkovou matici, což sice nepředstavuje problém, nicméně to přidává tolik výpočetních operací, že by takto popsaná metoda nebyla efektivní.
Využijeme iterační formuli ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \tfrac{1.4}{13}\left(4 - 3x_2^{(n)} - 1x_3^{(n)}\right) + (1-1.4)x_1^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} &= \tfrac{1.4}{14}\left(6 - 3x_1^{(n+1)} - 3x_3^{(n)}\right) + (1-1.4)x_2^{(n)} \\ x_3^{(n+1)} &= \tfrac{1.4}{24}\left(6 - 1x_1^{(n+1)} - 3x_2^{(n+1)}\right) + (1-1.4)x_3^{(n)} \end{aligned}$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -3.7538 & -2.4738 & -1.3981 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 8.4738$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2.8821 & 1.1443 & 0.54086 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 6.636$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1.15 & 0.32502 & 0.14386 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 4.0321$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.77028 & 0.19575 & 0.21327 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 1.9203$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.036447 & 0.44679 & 0.18438 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.73384$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.25199 & 0.29038 & 0.21073 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.21554$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.21347 & 0.35659 & 0.19085 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.066215$$

$$\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 0.20962 & 0.33722 & 0.20242 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.019369$$

$$\mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 0.21617 & 0.33953 & 0.197 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0065491$$

$$\mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 0.21339 & 0.34107 & 0.19906 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0027839$$

Příklad 3.2. (9)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & -5 & 4 \\ -5 & 13 & -3 \\ 4 & -3 & 21 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Použijte Gaussovu-Seidelovu metodu. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu. Zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{GS}} = -(\mathbf{M}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{N}$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{GS}} = (\mathbf{M}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}$ je dolní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ po odečtení diagonály a $\mathbf{N}$ je horní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ bez diagonály. Pro výpočet pomocí tohoto zápisu je potřeba invertovat trojúhelníkovou matici, což sice nepředstavuje problém, nicméně to přidává tolik výpočetních operací, že by takto popsaná metoda nebyla efektivní.
Využijeme iterační formuli ve tvaru

$$\begin{aligned}
x_1^{(n+1)} &= \tfrac{1}{16}\left(12 + 5x_2^{(n)} - 4x_3^{(n)}\right) \\
x_2^{(n+1)} &= \tfrac{1}{13}\left(14 + 5x_1^{(n+1)} + 3x_3^{(n)}\right) \\
x_3^{(n+1)} &= \tfrac{1}{21}\left(16 - 4x_1^{(n+1)} + 3x_2^{(n+1)}\right)
\end{aligned}$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 16 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1.125 & 5.2019 & 1.2908 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 14.7092$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2.0529 & 2.1644 & 0.68007 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 3.0376$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1.2563 & 1.7171 & 0.7679 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.79656$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1.0946 & 1.6751 & 0.79271 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.16174$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 1.0753 & 1.6734 & 0.79615 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.01931$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 1.0739 & 1.6737 & 0.79645 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0013901$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 1.0739 & 1.6738 & 0.79646 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 7.1626e-05$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (10)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 16 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 11 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Použijte Jakobiho metodu v podobě iterační formule $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{H}^{\mathbf{J}}\mathbf{x}_n + \mathbf{g}^{\mathbf{J}}$. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu. Zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{J}} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{N})$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{J}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}+\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$. Tedy

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}+\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a iterační matice jsou

$$\mathbf{H}^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{5}{16} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{2}{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{9}{16} \\ \frac{10}{11} \end{bmatrix}$$

Iterační proces provádíme pomocí formule $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{H}^{\mathbf{J}}\mathbf{x}_n + \mathbf{g}^{\mathbf{J}}$. Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -5.5 & -1.6429 & -4.625 & -0.36364 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 13.625$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2.8504 & 0.57792 & 1.8543 & 1.2078 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 8.3504$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -0.41208 & 0.24119 & -0.27635 & 0.80401 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 3.2625$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.51319 & 0.32771 & 0.33764 & 0.86524 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.92527$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.25049 & 0.31459 & 0.17963 & 0.84951 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.26269$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.31467 & 0.31796 & 0.2205 & 0.85189 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.064171$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.29808 & 0.31745 & 0.21083 & 0.85128 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.01659$$

$$\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 0.30189 & 0.31758 & 0.21322 & 0.85137 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0038184$$

$$\mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 0.30095 & 0.31756 & 0.21268 & 0.85135 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.00094428$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (11)

Nalezněte extrém funkce $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Použijte metodu největšího spádu. Jako počáteční aproximaci užijte pravou stranu a zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:

Iterační formuli píšeme

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{t}^{(n)}\mathbf{d}^{(n)},$$

kde

$$\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b} \quad \text{a} \quad \mathbf{t}^{(n)} = \frac{\mathbf{d}^{(n)^T}\mathbf{d}^{(n)}}{\mathbf{d}^{(n)^T}\mathbf{A}\mathbf{d}^{(n)}}$$

První iteraci tedy provedeme tak, že spočítáme směr spádu (gradient) $\mathbf{d}^{(0)}$, tedy

$$\mathbf{d}^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Jako další operaci spočítáme délku pohybu po vektoru $\mathbf{d}^{(0)}$, tedy

$$\mathbf{t}^{(0)} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}} = \frac{25}{75} = 0.33333.$$

Hodnotu $\mathbf{x}^{(1)}$ potom získáme pomocí

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 0.33333 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.3333 \end{bmatrix}.$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1.3333 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 1.6667$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.58333 & 1.3333 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.41667$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.58333 & 1.1944 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.13889$$
$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.54861 & 1.1944 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.034722$$
$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.54861 & 1.1829 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.011574$$
$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.54572 & 1.1829 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0028935$$
$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.54572 & 1.1819 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.00096451$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (12)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 23 & 7 & 3 \\ 7 & 14 & 0 \\ 3 & 0 & 28 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Použijte Gaussovu-Seidelovu metodu. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu. Zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{GS}} = -(\mathbf{M}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{N}$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{GS}} = (\mathbf{M}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}$ je dolní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ po odečtení diagonály a $\mathbf{N}$ je horní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ bez diagonály. Pro výpočet pomocí tohoto zápisu je potřeba invertovat trojúhelníkovou matici, což sice nepředstavuje problém, nicméně to přidává tolik výpočetních operací, že by takto popsaná metoda nebyla efektivní.
Využijeme iterační formuli ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \tfrac{1}{23}\left(9 - 7x_2^{(n)} - 3x_3^{(n)}\right) \\ x_2^{(n+1)} &= \tfrac{1}{14}\left(9 - 7x_1^{(n+1)}\right) \\ x_3^{(n+1)} &= \tfrac{1}{28}\left(9 - 3x_1^{(n+1)}\right) \end{aligned}$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -3.5217 & 2.4037 & 0.69876 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 12.5217$$
$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -0.43141 & 0.85856 & 0.36765 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 3.0903$$
$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.082049 & 0.60183 & 0.31264 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.51346$$
$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.16736 & 0.55918 & 0.3035 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.08531$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.18153 & 0.55209 & 0.30198 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.014174$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.18389 & 0.55091 & 0.30173 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.002355$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.18428 & 0.55072 & 0.30168 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.00039129$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (13)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 19 & -5 & 4 \\ -5 & 20 & 3 \\ 4 & 3 & 15 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 29 \\ 24 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Použijte SOR metodu. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu, parametr $\omega = 1.1$ a zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{SOR}} = (\omega\mathbf{M} + \mathbf{D})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{N}]$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{SOR}} = (\omega\mathbf{M} + \mathbf{D})^{-1}\omega\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}$ je dolní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ po odečtení diagonály a $\mathbf{N}$ je horní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ bez diagonály. Pro výpočet pomocí tohoto zápisu je potřeba invertovat trojúhelníkovou matici, což sice nepředstavuje problém, nicméně to přidává tolik výpočetních operací, že by takto popsaná metoda nebyla efektivní.
Využijeme iterační formuli ve tvaru

$$\begin{aligned}
x_1^{(n+1)} &= \tfrac{1.1}{19}\left(29 + 5x_2^{(n)} - 4x_3^{(n)}\right) + (1-1.1)x_1^{(n)} \\
x_2^{(n+1)} &= \tfrac{1.1}{20}\left(24 + 5x_1^{(n+1)} - 3x_3^{(n)}\right) + (1-1.1)x_2^{(n)} \\
x_3^{(n+1)} &= \tfrac{1.1}{15}\left(23 - 4x_1^{(n+1)} - 3x_2^{(n+1)}\right) + (1-1.1)x_3^{(n)}
\end{aligned}$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 29 & 24 & 23 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & -4.765 & 0.31763 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 28.765$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.18605 & 1.7953 & 1.2054 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 6.5603$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1.9009 & 1.4643 & 0.68638 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 1.7148$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1.7538 & 1.5426 & 0.76421 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.14709$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 1.7731 & 1.5273 & 0.75413 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.019345$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 1.7691 & 1.5293 & 0.75586 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0040432$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 1.7697 & 1.529 & 0.75558 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.00060643$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (14)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 3 & 11 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Použijte Jakobiho metodu v podobě iterační formule $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{H}^{\mathbf{J}}\mathbf{x}_n + \mathbf{g}^{\mathbf{J}}$. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu. Zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{J}} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{N})$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{J}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}+\mathbf{N} = \mathbf{A}-\mathbf{D}$. Tedy

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}+\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

a iterační matice jsou

$$\mathbf{H}^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{9}{11} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iterační proces provádíme pomocí formule $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{H}^{\mathbf{J}}\mathbf{x}_n + \mathbf{g}^{\mathbf{J}}$. Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max\limits_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0.54545 & -3.1429 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 10.1429$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.61275 & 1.3636 & 1.3377 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 4.4805$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -0.27627 & 0.65107 & 0.24051 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 1.0971$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} -0.012008 & 0.89353 & 0.7999 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.55939$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} -0.13576 & 0.82146 & 0.62049 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.17941$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} -0.096585 & 0.85521 & 0.68674 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.066245$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} -0.1117 & 0.84452 & 0.66108 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.025656$$

$$\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} -0.10606 & 0.84864 & 0.66998 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0088965$$

$$\mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} -0.10805 & 0.84711 & 0.6666 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0033767$$

$$\mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} -0.1073 & 0.84765 & 0.66783 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.001228$$

Příklad 3.2. (15)

Nalezněte extrém funkce $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Použijte metodu největšího spádu. Jako počáteční aproximaci užijte pravou stranu a zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:

Iterační formuli píšeme

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{t}^{(n)}\mathbf{d}^{(n)},$$

kde

$$\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b} \quad \text{a} \quad \mathbf{t}^{(n)} = \frac{\mathbf{d}^{(n)T}\mathbf{d}^{(n)}}{\mathbf{d}^{(n)T}\mathbf{A}\mathbf{d}^{(n)}}$$

První iteraci tedy provedeme tak, že spočítáme směr spádu (gradient) $\mathbf{d}^{(0)}$, tedy

$$\mathbf{d}^{(0)} = \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 27 \end{bmatrix}.$$

Jako další operaci spočítáme délku pohybu po vektoru $\mathbf{d}^{(0)}$, tedy

$$\mathbf{t}^{(0)} = \frac{\begin{bmatrix} -12 & 27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -12 \\ 27 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -12 & 27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -12 \\ 27 \end{bmatrix}} = \frac{873}{11466} = 0.076138.$$

Hodnotu $\mathbf{x}^{(1)}$ potom získáme pomocí

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 0.076138\begin{bmatrix} -12 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.91366 \\ 0.94427 \end{bmatrix}.$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.91366 & 0.94427 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 2.0557$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.11615 & 0.58982 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.7975$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.1985 & 0.40453 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.18529$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.12662 & 0.37258 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.071882$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.13405 & 0.35588 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.016701$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.12757 & 0.353 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0064791$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.12824 & 0.3515 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0015053$$

$$\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 0.12765 & 0.35124 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.00058398$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (16)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 5 & 18 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 19 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Použijte SOR metodu. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu, parametr $\omega = 1.1$ a zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{SOR}} = (\omega\mathbf{M} + \mathbf{D})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{N}]$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{SOR}} = (\omega\mathbf{M} + \mathbf{D})^{-1}\omega\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}$ je dolní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ po odečtení diagonály a $\mathbf{N}$ je horní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ bez diagonály. Pro výpočet pomocí tohoto zápisu je potřeba invertovat trojúhelníkovou matici, což sice nepředstavuje problém, nicméně to přidává tolik výpočetních operací, že by takto popsaná metoda nebyla efektivní.
Využijeme iterační formuli ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \tfrac{1.1}{7}\left(19 - 5x_2^{(n)}\right) + (1-1.1)x_1^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} &= \tfrac{1.1}{18}\left(14 - 5x_1^{(n+1)} + 1x_3^{(n)}\right) + (1-1.1)x_2^{(n)} \\ x_3^{(n+1)} &= \tfrac{1.1}{5}\left(15 + 1x_2^{(n+1)}\right) + (1-1.1)x_3^{(n)} \end{aligned}$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 19 & 14 & 15 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -9.9143 & 3.4016 & 2.5483 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 28.9143$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1.3045 & 0.27254 & 3.1051 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 11.2188$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2.6411 & 0.21105 & 3.0359 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 1.3367$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 2.5558 & 0.23905 & 3.049 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.085349$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 2.5423 & 0.24116 & 3.0482 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.013464$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 2.542 & 0.24099 & 3.0482 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.00031422$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (17)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Použijte Jakobiho metodu v podobě iterační formule $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{H}^\mathbf{J}\mathbf{x}_n + \mathbf{g}^\mathbf{J}$. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu. Zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^\mathbf{J} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{N})$ a $\mathbf{g}^\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}+\mathbf{N} = \mathbf{A}-\mathbf{D}$. Tedy

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}+\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a iterační matice jsou

$$\mathbf{H}^\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}^\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Iterační proces provádíme pomocí formule $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{H}^\mathbf{J}\mathbf{x}_n + \mathbf{g}^\mathbf{J}$. Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -0.4 & -1 & 0.75 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 5$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3625 & 1.35 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 1.3625$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.3275 & 0.0875 & 1.1 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.275$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.3825 & 0.18406 & 1.1681 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.096562$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.36319 & 0.16016 & 1.1544 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.023906$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.36797 & 0.16601 & 1.1592 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0058516$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.3668 & 0.1642 & 1.158 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0018047$$

$$\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 0.36716 & 0.16465 & 1.1583 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.00044512$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (18)
Nalezněte extrém funkce $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Použijte metodu největšího spádu. Jako počáteční aproximaci užijte pravou stranu a zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační formuli píšeme

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{t}^{(n)}\mathbf{d}^{(n)},$$

kde

$$\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{b} \quad \text{a} \quad \mathbf{t}^{(n)} = \frac{\mathbf{d}^{(n)T}\mathbf{d}^{(n)}}{\mathbf{d}^{(n)T}\mathbf{A}\mathbf{d}^{(n)}}$$

První iteraci tedy provedeme tak, že spočítáme směr spádu (gradient) $\mathbf{d}^{(0)}$, tedy

$$\mathbf{d}^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Jako další operaci spočítáme délku pohybu po vektoru $\mathbf{d}^{(0)}$, tedy

$$\mathbf{t}^{(0)} = \frac{\begin{bmatrix} 12 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 12 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}} = \frac{153}{756} = 0.20238.$$

Hodnotu $\mathbf{x}^{(1)}$ potom získáme pomocí

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 0.20238 \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.57143 \\ 0.39286 \end{bmatrix}.$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \leq 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.57143 & 0.39286 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 2.4286$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.60663 & 0.25207 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.14079$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.59992 & 0.25039 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0067041$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.60002 & 0.25001 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.00038865$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (19)

Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 6 \\ 0 & 22 & -4 \\ 6 & -4 & 17 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Použijte Gaussovu-Seidelovu metodu. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu. Zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:

Iterační matice $\mathbf{H^{GS}} = -(\mathbf{M}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{N}$ a $\mathbf{g^{GS}} = (\mathbf{M}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}$ je dolní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ po odečtení diagonály a $\mathbf{N}$ je horní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ bez diagonály. Pro výpočet pomocí tohoto zápisu je potřeba invertovat trojúhelníkovou matici, což sice nepředstavuje problém, nicméně to přidává tolik výpočetních operací, že by takto popsaná metoda nebyla efektivní.

Využijeme iterační formuli ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \tfrac{1}{16}\left(12 - 6x_3^{(n)}\right) \\ x_2^{(n+1)} &= \tfrac{1}{22}\left(17 + 4x_3^{(n)}\right) \\ x_3^{(n+1)} &= \tfrac{1}{17}\left(18 - 6x_1^{(n+1)} + 4x_2^{(n+1)}\right) \end{aligned}$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \le 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 12 & 17 & 18 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -6 & 4.0455 & 4.1283 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 18$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -0.79813 & 1.5233 & 1.6989 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 5.2019$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.11289 & 1.0816 & 1.2735 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.91102$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.27245 & 1.0043 & 1.199 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.15955$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.30039 & 0.99072 & 1.1859 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.027943$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.30528 & 0.98835 & 1.1836 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0048937$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.30614 & 0.98793 & 1.1832 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.00085705$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.

Příklad 3.2. (20)
Vypočtěte $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -1 \\ -2 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 10 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 17 \\ 21 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Použijte Gaussovu-Seidelovu metodu. Jako počáteční aproximaci volte pravou stranu. Zastavovací podmínku vhodně zvolte.

Řešení:
Iterační matice $\mathbf{H}^{\mathbf{GS}} = -(\mathbf{M}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{N}$ a $\mathbf{g}^{\mathbf{GS}} = (\mathbf{M}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$, kde $\mathbf{D} = diag(\mathbf{A})$ a $\mathbf{M}$ je dolní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ po odečtení diagonály a $\mathbf{N}$ je horní trojúhelník matice $\mathbf{A}$ bez diagonály. Pro výpočet pomocí tohoto zápisu je potřeba invertovat trojúhelníkovou matici, což sice nepředstavuje problém, nicméně to přidává tolik výpočetních operací, že by takto popsaná metoda nebyla efektivní.
Využijeme iterační formuli ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \tfrac{1}{9}\left(17 + 2x_2^{(n)} + 1x_3^{(n)}\right) \\ x_2^{(n+1)} &= \tfrac{1}{7}\left(21 + 2x_1^{(n+1)} + 1x_3^{(n)}\right) \\ x_3^{(n+1)} &= \tfrac{1}{10}\left(24 + 1x_1^{(n+1)} + 1x_2^{(n+1)}\right) \end{aligned}$$

Zastavovací podmínku volíme $\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\| \le 10^{-3}$, kde $\|\mathbf{c}\| = \max_i\{|c_i|\}$, anebo ukončíme po 10 iteracích v případě pomalé konvergence.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 17 & 21 & 24 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 9.2222 & 9.0635 & 4.2286 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 19.7714$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4.3728 & 4.8535 & 3.3226 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 4.8494$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3.3366 & 4.428 & 3.1765 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 1.0362$$

$$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 3.2258 & 4.3754 & 3.1601 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.11079$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 3.2123 & 4.3693 & 3.1582 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.01349$$

$$\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 3.2107 & 4.3685 & 3.1579 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.0015936$$

$$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 3.2106 & 4.3684 & 3.1579 \end{bmatrix}^T, \qquad \varepsilon = 0.00018954$$

Poslední vektor je dobré přiblížení k hodnotě $\mathbf{x}$.