Příklad 2.1.1.1 (1)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím sloupcové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 3 \\ -6 & 19 & -8 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.33333 \\ 0.33333 \\ 0.33333 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -6 & 19 & -8 & 1 & -15 \\ 0 & 2.3333 & -2.6667 & 3.3333 & -12 \\ 0 & 1.3333 & -1.6667 & 2.3333 & -8 \\ 0 & 5.3333 & -3.6667 & -3.6667 & -4 \end{array}\right];$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.25 \\ -0.4375 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -6 & 19 & -8 & 1 & -15 \\ 0 & 5.3333 & -3.6667 & -3.6667 & -4 \\ 0 & 0 & -0.75 & 3.25 & -7 \\ 0 & 0 & -1.0625 & 4.9375 & -10.25 \end{array}\right];$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.70588 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -6 & 19 & -8 & 1 & -15 \\ 0 & 5.3333 & -3.6667 & -3.6667 & -4 \\ 0 & 0 & -1.0625 & 4.9375 & -10.25 \\ 0 & 0 & 0 & -0.23529 & 0.23529 \end{array}\right];$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (2)
Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím sloupcové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 7 & 3 \\ 4 & -5 & -10 & -25 \\ -8 & -2 & -22 & -16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -33 \\ -15 \\ -115 \\ -4 \end{bmatrix};$$

Řešení:
1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -8 & -2 & -22 & -16 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & -17 \\ 0 & -6 & -21 & -33 & -117 \\ 0 & -2 & -7 & -10 & -35 \end{array}\right];$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.16667 \\ -0.33333 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -8 & -2 & -22 & -16 & -4 \\ 0 & -6 & -21 & -33 & -117 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right];$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -8 & -2 & -22 & -16 & -4 \\ 0 & -6 & -21 & -33 & -117 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right];$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (3)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím celkové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ -8 & -9 & -3 & 2 \\ -8 & -3 & -4 & -5 \\ 20 & 6 & -1 & 13 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -13 \\ 8 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v matici začínající na indexu $(1,1)$ a končící na indexu $(4,4)$. Provedeme případnou záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek řádku, takto vynulujeme prvky pod diagonálou, čímž vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.4 \\ -0.2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 20 & 6 & -1 & 13 & 8 \\ 0 & -6.6 & -3.4 & 7.2 & 2.2 \\ 0 & -0.6 & -4.4 & 0.2 & -9.8 \\ 0 & 1.8 & 1.2 & -1.6 & 1.4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v matici začínající na indexu $(2,2)$ a končící na indexu $(4,4)$. Provedeme případnou záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek řádku, takto vynulujeme prvky pod diagonálou, čímž vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.027778 \\ 0.22222 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 20 & 13 & -1 & 6 & 8 \\ 0 & 7.2 & -3.4 & -6.6 & 2.2 \\ 0 & 0 & -4.3056 & -0.41667 & -9.8611 \\ 0 & 0 & 0.44444 & 0.33333 & 1.8889 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix};$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v matici začínající na indexu $(3,3)$ a končící na indexu $(4,4)$. Provedeme případnou záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek řádku, takto vynulujeme prvky pod diagonálou, čímž vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.10323 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 20 & 13 & -1 & 6 & 8 \\ 0 & 7.2 & -3.4 & -6.6 & 2.2 \\ 0 & 0 & -4.3056 & -0.41667 & -9.8611 \\ 0 & 0 & 0 & 0.29032 & 0.87097 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix};$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

Příklad 2.1.1.1 (4)
Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím celkové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 13 & 8 & -3 \\ -1 & -6 & -10 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -34 \\ 45 \\ 20 \end{bmatrix};$$

Řešení:
1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v matici začínající na indexu $(1,1)$ a končící na indexu $(4,4)$. Provedeme případnou záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek řádku, takto vynulujeme prvky pod diagonálou, čímž vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.23077 \\ 0.46154 \\ -0.30769 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 13 & 4 & 8 & -3 & -34 \\ 0 & 0.076923 & -0.84615 & -0.30769 & 3.8462 \\ 0 & 0.84615 & -6.3077 & -2.3846 & 29.3077 \\ 0 & -0.23077 & -6.4615 & -5.0769 & 30.4615 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v matici začínající na indexu $(2,2)$ a končící na indexu $(4,4)$. Provedeme případnou záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek řádku, takto vynulujeme prvky pod diagonálou, čímž vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.97619 \\ -0.13095 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 13 & 8 & 4 & -3 & -34 \\ 0 & -6.4615 & -0.23077 & -5.0769 & 30.4615 \\ 0 & 0 & 1.0714 & 2.5714 & -0.42857 \\ 0 & 0 & 0.10714 & 0.35714 & -0.14286 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix};$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v matici začínající na indexu $(3,3)$ a končící na indexu $(4,4)$. Provedeme případnou záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek řádku, takto vynulujeme prvky pod diagonálou, čímž vytváříme dolní trojúhelníkovou

matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.13889 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 13 & 8 & -3 & 4 & -34 \\ 0 & -6.4615 & -5.0769 & -0.23077 & 30.4615 \\ 0 & 0 & 2.5714 & 1.0714 & -0.42857 \\ 0 & 0 & 5.5511e-17 & -0.041667 & -0.083333 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix};$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix};$$

Příklad 2.1.1.1 (5)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím řádkové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 5 & -2 \\ 20 & -13 & -19 & 6 \\ 5 & -2 & -7 & 6 \\ -15 & 12 & 11 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 63 \\ -238 \\ -92 \\ 127 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 3 & 5 & -2 & 63 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 14 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -29 \\ 0 & 3 & -4 & 9 & -62 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4.5 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -5 & -2 & 5 & 3 & 63 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1.5 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix};$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.5 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -5 & -2 & 3 & 5 & 63 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 2.5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (6)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím řádkové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 & -5 \\ 10 & 12 & -9 & -15 \\ -5 & -9 & 8 & 18 \\ 20 & 22 & -17 & -18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -16 \\ -34 \\ 34 \\ -44 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 5 & 5 & -2 & -5 & -16 \\ 0 & 2 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 6 & 13 & 18 \\ 0 & 2 & -9 & 2 & 20 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.2 \\ -1.8 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 5 & -2 & 5 & -5 & -16 \\ 0 & -5 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1.6 & 7 & 15.6 \\ 0 & 0 & -1.6 & 11 & 23.6 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.5714 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & -5 & 5 & -16 \\ 0 & -5 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -1.6 & 15.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.91429 & -0.91429 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix};$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (7)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody bez pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & 1 \\ 12 & 5 & 7 & -3 \\ -12 & -17 & 3 & 11 \\ 15 & -2 & 15 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 28 \\ 15 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Opisujeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) 1. řádku a tímto postupem vytváříme horní trojúhelníkovou matici.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 12 & 5 & 7 & -3 & -2 \\ -12 & -17 & 3 & 11 & 28 \\ 15 & -2 & 15 & 1 & 15 \end{array}\right];$$

2. fáze: Opisujeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) 2. řádku a tímto postupem vytváříme horní trojúhelníkovou matici.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -9 & 7 & 7 & 16 \\ 0 & -12 & 10 & 6 & 30 \end{array}\right];$$

3. fáze: Opisujeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) 3. řádku a tímto postupem vytváříme horní trojúhelníkovou matici.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -3 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -10 \end{array}\right];$$

Matice v horním trojůhelníkový tvaru:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -3 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right];$$

. Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (8)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím řádkové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ -12 & 5 & -6 & -20 \\ 6 & 0 & 9 & 1 \\ -12 & 2 & -13 & -14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ -65 \\ -16 \\ -31 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -0.25 \\ 3.5 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -10 \\ 0 & 0.25 & 8.5 & 5.25 & -18.75 \\ 0 & -1.5 & -6 & -1.5 & 7.5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod

digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.125 \\ 1.5 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0.25 & -1.125 & 2.5 \\ 0 & 0 & -1.5 & 3 & -7.5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.6667 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1.125 & 0.25 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.83333 & -0.83333 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (9)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody bez pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -8 & 2 \\ -8 & -11 & 3 & -4 \\ -2 & -11 & -18 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 20 \\ -15 \\ 56 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Opisujeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) 1. řádku a tímto postupem vytváříme horní trojúhelníkovou matici.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 6 & 3 & -8 & 2 & 20 \\ -8 & -11 & 3 & -4 & -15 \\ -2 & -11 & -18 & 0 & 56 \end{array}\right];$$

2. fáze: Opisujeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) 2. řádku a tímto postupem vytváříme horní trojúhelníkovou matici.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -2 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -5 & -1 & 14 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & -9 & -19 & 1 & 58 \end{array}\right];$$

3. fáze: Opisujeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) 3. řádku a tímto postupem vytváříme horní trojúhelníkovou matici.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -2 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -5 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -21 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 16 \end{array}\right];$$

Matice v horním trojůhelníkový tvaru:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -2 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -5 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right];$$

. Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (10)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím sloupcové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & -14 \\ -4 & -5 & -6 & 10 \\ -10 & -8 & -20 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -23 \\ 17 \\ -2 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 \\ -0.4 \\ -0.2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -10 & -8 & -20 & 4 & -2 \\ 0 & 2.2 & -4 & -11.6 & -24.2 \\ 0 & -1.8 & 2 & 8.4 & 17.8 \\ 0 & -0.4 & 1 & 2.2 & 4.4 \end{array}\right];$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.81818 \\ 0.18182 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -10 & -8 & -20 & 4 & -2 \\ 0 & 2.2 & -4 & -11.6 & -24.2 \\ 0 & 0 & -1.2727 & -1.0909 & -2 \\ 0 & 0 & 0.27273 & 0.090909 & 1.7764e-15 \end{array}\right];$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.21429 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -10 & -8 & -20 & 4 & -2 \\ 0 & 2.2 & -4 & -11.6 & -24.2 \\ 0 & 0 & -1.2727 & -1.0909 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -0.14286 & -0.42857 \end{array}\right];$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (11)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím řádkové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 8 \\ -5 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ -13 \\ 3 \\ -30 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1.5 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & -4 & -6 \\ 0 & 2.5 & 6.5 & 0.5 & -16.5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2.1667 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0.33333 & 2.6667 & -5.6667 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.3333 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & 1 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.33333 & -0.33333 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (12)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím řádkové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -8 & -23 & 36 & -5 \\ -8 & 4 & -18 & -18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 91 \\ -70 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1.3333 \\ -1.6667 \\ -6 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -3 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3.6667 & 5.6667 & -0.66667 & 14.6667 \\ 0 & -19.6667 & 32.6667 & -4.6667 & 87.6667 \\ 0 & 16 & -30 & 4 & -82 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.7647 \\ 5.2941 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 5.6667 & -3.6667 & -0.66667 & 14.6667 \\ 0 & 0 & 1.4706 & -0.82353 & 3.1176 \\ 0 & 0 & -3.4118 & 0.47059 & -4.3529 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.32 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 5.6667 & -3.6667 & -0.66667 & 14.6667 \\ 0 & 0 & 1.4706 & -0.82353 & 3.1176 \\ 0 & 0 & -4.4409e-16 & -1.44 & 2.88 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (13)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím sloupcové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & -4 \\ -4 & -11 & -3 & -15 \\ -4 & -8 & -4 & -14 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -18 \\ -64 \\ -60 \\ -6 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.25 \\ -1 \\ 0.25 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & -11 & -3 & -15 & -64 \\ 0 & -0.25 & -0.25 & -0.25 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -4.75 & -0.75 & -3.75 & -22 \end{array}\right];$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.63158 \\ -0.052632 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -4 & -11 & -3 & -15 & -64 \\ 0 & -4.75 & -0.75 & -3.75 & -22 \\ 0 & 0 & -1.4737 & -1.3684 & -9.8947 \\ 0 & 0 & -0.21053 & -0.052632 & -0.84211 \end{array}\right];$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.14286 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -4 & -11 & -3 & -15 & -64 \\ 0 & -4.75 & -0.75 & -3.75 & -22 \\ 0 & 0 & -1.4737 & -1.3684 & -9.8947 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14286 & 0.57143 \end{array}\right];$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (14)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím řádkové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & -5 \\ 10 & 17 & -3 & 28 \\ 10 & 17 & -5 & 32 \\ 8 & 6 & -12 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 25 \\ -156 \\ -168 \\ -4 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5.6 \\ 6.4 \\ 2.4 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -5 & -3 & 1 & -2 & 25 \\ 0 & 0.2 & 2.6 & -1.2 & -16 \\ 0 & -2.2 & 1.4 & -2.8 & -8 \\ 0 & -1.2 & -9.6 & 3.2 & 56 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.53846 \\ 3.6923 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 1 & -3 & -2 & 25 \\ 0 & 2.6 & 0.2 & -1.2 & -16 \\ 0 & 0 & -2.3077 & -2.1538 & 0.61538 \\ 0 & 0 & -0.46154 & -1.2308 & -3.0769 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 1 & -3 & -2 & 25 \\ 0 & 2.6 & 0.2 & -1.2 & -16 \\ 0 & 0 & -2.3077 & -2.1538 & 0.61538 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & -3.2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 & -5 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (15)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím sloupcové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & -5 \\ 20 & -13 & 0 & 15 \\ 8 & -8 & 9 & 15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ -29 \\ 113 \\ 66 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ -0.2 \\ -0.4 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 20 & -13 & 0 & 15 & 113 \\ 0 & 0.4 & -1 & -2 & -6.4 \\ 0 & 0.6 & -2 & -2 & -4.6 \\ 0 & -2.8 & 9 & 9 & 20.8 \end{array}\right];$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.21429 \\ 0.14286 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 20 & -13 & 0 & 15 & 113 \\ 0 & -2.8 & 9 & 9 & 20.8 \\ 0 & 0 & -0.071429 & -0.071429 & -0.14286 \\ 0 & 5.5511e-17 & 0.28571 & -0.71429 & -3.4286 \end{array}\right];$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 sloupci. Provedeme záměnu řádků, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme prohozený řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku a tímto postupem vynulujeme prvky pod digonálou, čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 20 & -13 & 0 & 15 & 113 \\ 0 & -2.8 & 9 & 9 & 20.8 \\ 0 & 5.5511e-17 & 0.28571 & -0.71429 & -3.4286 \\ 0 & 1.3878e-17 & 0 & -0.25 & -1 \end{array}\right];$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (16)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím řádkové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ -4 & 25 & 0 & -9 \\ -4 & 45 & 17 & 1 \\ 5 & -40 & -9 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 23 \\ 174 \\ -79 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -5 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 43 \\ 0 & 5 & 26 & 28 & 210 \\ 0 & -3 & -17 & -12 & -111 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4.6667 \\ 2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -5 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 43 \\ 0 & 0 & 2.6667 & 0.33333 & 9.3333 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -25 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.625 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} -5 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 43 \\ 0 & 0 & 2.6667 & 0.33333 & 9.3333 \\ 0 & 0 & 0 & -0.125 & -0.5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T.$$

Příklad 2.1.1.1 (17)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím celkové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & -3 & -9 \\ -15 & -25 & 12 & 43 \\ -9 & -13 & 11 & 26 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 42 \\ 51 \\ -253 \\ -139 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v matici začínající na indexu $(1, 1)$ a končící na indexu $(4, 4)$. Provedeme případnou záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek řádku, takto vynulujeme prvky pod diagonálou, čímž vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek

na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.2093 \\ 0.11628 \\ -0.60465 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 43 & -25 & 12 & -15 & -253 \\ 0 & -0.23256 & -0.48837 & -0.13953 & -1.9535 \\ 0 & 1.093 & 3.3953 & 1.2558 & 12.5814 \\ 0 & 2.1163 & 3.7442 & 0.069767 & 13.9767 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v matici začínající na indexu $(2,2)$ a končící na indexu $(4,4)$. Provedeme případnou záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek řádku, takto vynulujeme prvky pod diagonálou, čímž vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.90683 \\ 0.13043 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 43 & 12 & -25 & -15 & -253 \\ 0 & 3.7442 & 2.1163 & 0.069767 & 13.9767 \\ 0 & 0 & -0.82609 & 1.1925 & -0.093168 \\ 0 & -5.5511e-17 & 0.043478 & -0.13043 & -0.13043 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v matici začínající na indexu $(3,3)$ a končící na indexu $(4,4)$. Provedeme případnou záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek řádku, takto vynulujeme prvky pod diagonálou, čímž vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.10938 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|c} 43 & 12 & -15 & -25 & -253 \\ 0 & 3.7442 & 0.069767 & 2.1163 & 13.9767 \\ 0 & 0 & 1.1925 & -0.82609 & -0.093168 \\ 0 & -5.5511e-17 & 0 & -0.046875 & -0.14063 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix};$$

Příklad 2.1.1.1 (18)

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, pomocí Gaussovy eliminační metody s využitím řádkové pivotace:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 2 \\ 8 & -6 & 2 & 1 \\ -4 & 13 & 0 & 10 \\ -4 & -19 & -8 & -21 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 51 \\ -128 \end{bmatrix};$$

Řešení:

1. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 1 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 1. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & 2 & 2 & 19 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & -17 \\ 0 & 12 & 2 & 12 & 70 \\ 0 & -20 & -6 & -19 & -109 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

2. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 2 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 2. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & 2 & 2 & 19 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & -17 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 19 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -24 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

3. fáze: Najdeme v absolutní hodnotě největší prvek v 3 řádku.Provedeme záměnu sloupců, námi nalezený prvek tedy bude na diagonále. Opíšeme 3. řádek a k následujícím řádkům přičítáme příslušný násobek (vektor na levé straně) řádku, takto vynulujeme prvky pod digonálou čímž postupně vytváříme dolní trojúhelníkovou matici. Záměnou sloupců jsme prohodili neznámé v řešení, pořadí naznámých udává řádek na pravé straně straně.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & 2 & 2 & 19 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & -17 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

Zpětných chodem určíme řešení :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}^T.$$