

**OBSAH**

<b>1. Matematické nástroje fyziky.....</b>	<b>5</b>
<b>1.1 Filosofická stránka matematiky aneb Hilbert versus množiny .....</b>	<b>5</b>
<b>1.2 Základní pojmy algebry .....</b>	<b>6</b>
1.2.1 Od kartézského součinu k zobrazení aneb co na střední škole ještě bylo .....	6
1.2.2 Od operace k unitárnímu prostoru aneb co se dozvíte až na vysoké škole .....	7
1.2.3 Konstrukce množiny $\mathbb{Z}_p$ .....	8
<b>1.3 Matice.....</b>	<b>9</b>
1.3.1 Definice a základní operace .....	9
1.3.2 Použití matic při řešení soustav rovnic .....	11
<b>1.4 Determinanty.....</b>	<b>12</b>
1.4.1 Definice, základní vlastnosti .....	12
1.4.2 Výpočet determinantů vyšších stupňů.....	12
1.4.2.1 Součin prvků na hlavní diagonále .....	13
1.4.2.2 Rozvoj podle daného sloupce nebo řádku.....	13
1.4.3 Použití determinantů .....	15
<b>1.5 Systémy souřadnic .....</b>	<b>15</b>
1.5.1 Kartézský systém souřadnic .....	15
1.5.2 Polární souřadnice.....	16
1.5.3 Cylindrické (válcové) souřadnice .....	17
1.5.4 Sférické (kulové) souřadnice.....	17
<b>1.6 Transformace kartézského systému souřadnic .....</b>	<b>18</b>
1.6.1 Kartézský systém souřadnic v rovině.....	18
1.6.1.1 Posunutí.....	18
1.6.1.2 Otočení .....	19
1.6.1.3 Posunutí a otočení .....	20
1.6.2 Kartézský systém souřadnic v 3D prostoru.....	21
1.6.2.1 Posunutí.....	21
1.6.2.2 Otočení .....	21
<b>1.7 Matematické vyjadřování a zanedbávání.....</b>	<b>21</b>
1.7.1 Matematické vyjádření slovního projevu .....	21
1.7.2 Přibližné vztahy aneb co lze zanedbat.....	22
1.7.3 Zjednodušení matematických výrazů.....	22
1.7.3.1 Kroneckerův symbol .....	22
1.7.3.2 Levi-Civitův symbol .....	22
1.7.3.3 Einsteinovo sumační pravidlo .....	22
<b>1.8 Součiny s vektory; pravidlo pravé ruky.....</b>	<b>23</b>
1.8.1 Skalární součin .....	23
1.8.2 Vektorový součin .....	24
1.8.3 Pravidlo pravé ruky .....	24
1.8.4 Smíšený součin .....	25
1.8.5 Výrazy obsahující smíšený součinů .....	25
<b>1.9 Komplexní čísla .....</b>	<b>26</b>
1.9.1 Zavedení komplexních čísel.....	26
1.9.2 Početní operace s komplexními čísly .....	26
1.9.3 Absolutní hodnota a grafické znázornění komplexních čísel.....	27
1.9.4 Goniometrický tvar komplexních čísel .....	28
1.9.5 Exponenciální tvar komplexních čísel .....	28
1.9.6 Kvadratické rovnice řešené v oboru komplexních čísel.....	29
1.9.7 Binomické rovnice .....	29
<b>1.10 Diferenciální počet .....</b>	<b>29</b>
1.10.1 Elementární funkce .....	29
1.10.2 Limita funkce .....	30
1.10.2.1 Základní pojmy, zavedení pojmu limita.....	30
1.10.2.1.1 Limita v bodě .....	31
1.10.2.1.2 Jednostranná limita .....	33

1.10.2.1.3	Nevlastní limity funkce v bodě .....	33
1.10.2.1.4	Limita funkce v nevlastním bodě .....	34
1.10.2.2	Důležité limity .....	36
1.10.2.3	Užití limity funkce .....	37
1.10.2.3.1	Asymptoty grafu funkce .....	37
1.10.2.3.2	Tečna grafu funkce .....	38
1.10.3	Spojítost funkce .....	39
1.10.3.1	Spojítost v bodě a v intervalu .....	39
1.10.3.2	Spojité funkce na uzavřených intervalech .....	40
1.10.4	Derivace funkce .....	40
1.10.4.1	Fyzikální význam derivace .....	41
1.10.4.2	Definice derivace .....	41
1.10.4.3	Derivace vyšších řádů .....	42
1.10.4.4	Vlastnosti derivace .....	42
1.10.4.5	Derivace elementárních a složených funkcí .....	43
1.10.4.6	Funkce více proměnných .....	44
1.10.4.6.1	Nástin definice funkce více proměnných .....	44
1.10.4.6.2	Parciální derivace funkce více proměnných .....	44
1.10.5	Průběh funkce .....	45
1.10.5.1	Věty o spojitosti .....	45
1.10.5.2	Monotónnost funkce a derivace .....	46
1.10.5.3	Extrémy funkce a derivace .....	46
1.10.5.4	Stacionární body .....	47
1.10.5.5	Extrémy funkce a druhá derivace .....	47
1.10.5.6	Konvexnost a konkávnost funkce .....	48
1.10.5.7	Inflexní body .....	48
1.10.5.8	Vyšetřování průběhu funkce .....	49
1.10.6	Užití diferenciálního počtu .....	49
<b>1.11</b>	<b>Integrální počet .....</b>	<b>49</b>
1.11.1	Historický úvod .....	49
1.11.2	Primitivní funkce .....	49
1.11.2.1	Zavedení primitivní funkce .....	49
1.11.2.2	Primitivní funkce elementárních funkcí .....	50
1.11.2.3	Integrační metody .....	50
1.11.2.3.1	Per partes .....	50
1.11.2.3.2	Substituční metoda .....	51
1.11.3	Určitý integrál .....	52
1.11.3.1	Pojem určitý integrál .....	52
1.11.3.2	Definice určitého integrálu .....	53
1.11.3.3	Výpočty určitých integrálů .....	53
1.11.3.3.1	Substituce v určitém integrálu .....	54
1.11.3.3.2	Metoda per partes v určitém integrálu .....	54
1.11.4	Užití integrálního počtu .....	55
1.11.4.1	Obsah rovinného obrazce .....	55
1.11.4.1.1	Útvar omezený grafem jedné funkce .....	55
1.11.4.1.2	Útvar omezený grafem více funkcí .....	55
1.11.4.2	Objem rotačního tělesa .....	56
1.11.4.3	Délka křivky .....	57
1.11.4.4	Povrch rotačního tělesa .....	58
<b>1.12</b>	<b>Tenzory .....</b>	<b>59</b>
1.12.1	Skaláry .....	59
1.12.2	Vektory .....	60
1.12.3	Tenzory 2. řádu .....	61
1.12.3.1	Tenzorová algebra aneb základní vlastnosti a operace s tenzory 2. řádu .....	61
1.12.3.2	Symetrické a antisymetrické tenzory .....	62
1.12.3.3	Izotropní tenzory .....	63
1.12.4	Levi-Civitův symbol (tenzor) .....	63
1.12.5	Tenzor napětí .....	63
1.12.6	Tenzorová analýza .....	65
1.12.6.1	Hamiltonův operátor nabla .....	65
1.12.6.2	Gradient, divergence, rotace .....	65
1.12.6.3	Fyzikální význam .....	66
<b>2.</b>	<b>Fyzikální aplikace matematiky .....</b>	<b>68</b>

<b>2.1</b>	<b>Názvosloví fyzikálních veličin .....</b>	<b>68</b>
<b>2.2</b>	<b>Tuhé těleso .....</b>	<b>68</b>
2.2.1	Tuhé těleso a jeho pohyby .....	68
2.2.2	Kinetická energie tuhého tělesa .....	68
2.2.3	Výpočet momentů setrvačnosti .....	69
2.2.3.1	Obdélníková deska .....	69
2.2.3.2	Obruč .....	70
2.2.3.3	Obal válce .....	70
2.2.3.4	Kruhová deska .....	70
2.2.3.5	Plný váleček .....	70
2.2.3.5.1	Výpočet na základě momentu setrvačnosti kruhové desky .....	70
2.2.3.5.2	Výpočet bez znalosti momentu setrvačnosti kruhové desky .....	71
2.2.3.6	Koule .....	71
2.2.3.7	Kužel .....	72
2.2.4	Přehled momentů setrvačnosti některých těles .....	72
2.2.5	Steinerova a Königova věta .....	72
2.2.6	Setrvačníky .....	73
2.2.6.1	Volný setrvačnick .....	73
2.2.6.2	Eulerovy úhly .....	73
<b>2.3</b>	<b>Fourierova transformace .....</b>	<b>74</b>
2.3.1	Matematický popis .....	74
2.3.2	Odvození koeficientů .....	75
2.3.3	Praktický výpočet .....	76
<b>2.4</b>	<b>Trasfigurace elektrického obvodu .....</b>	<b>77</b>
2.4.1	Sériové spojení rezistorů .....	77
2.4.2	Paralelní spojení rezistorů .....	77
2.4.3	Přeměna (trasfigurace) trojúhelníka na hvězdu .....	77
2.4.4	Přeměna (trasfigurace) hvězdy a na trojúhelník .....	78
<b>2.5</b>	<b>Kvantová fyzika .....</b>	<b>79</b>
2.5.1	Historicko - fyzikální úvod .....	79
2.5.1.1	Od Démokrita k Millikanovi .....	79
2.5.1.2	První modely atomů .....	80
2.5.1.3	Objev atomového jádra .....	80
2.5.2	Složení jádra .....	81
2.5.2.1	Objev neutronu .....	81
2.5.2.2	Číslo popisující atomové jádro .....	81
2.5.3	Záření absolutně černého tělesa .....	81
2.5.3.1	***Vztahy popisující vyzařování absolutně černého tělesa .....	82
2.5.4	Planckova kvantová hypotéza .....	82
2.5.5	Foton .....	83
2.5.6	Vlnové vlastnosti částic .....	84
2.5.6.1	De Broglieho hypotéza .....	84
2.5.6.2	Vlnová funkce .....	85
2.5.6.3	Praktické využití vlnových vlastností částic .....	85
2.5.7	Vznik a základy kvantové mechaniky .....	86
2.5.8	Kvantová čísla .....	87
2.5.9	Spin .....	88
2.5.10	Bohrův model atomu .....	88
2.5.11	Princip nerozlišitelnosti částic a Pauliho (vylučovací) princip .....	89
2.5.12	Exkurze do vysokoškolské kvantové fyziky .....	90
2.5.12.1	Kvantová fyzika versus klasická fyzika .....	90
2.5.12.2	Základní postuláty kvantové mechaniky .....	91
2.5.12.3	Superpozice .....	92
2.5.13	Schrödingerova rovnice a kolaps vlnové funkce .....	93
2.5.13.1	Popis bez matematiky .....	93
2.5.13.2	... a trochu (vysokoškolské) matematiky .....	94
2.5.14	Heisenbergovy relace neurčitosti .....	95
2.5.14.1	První Heisenbergova relace neurčitosti .....	95
2.5.14.2	Druhá Heisenbergova relace neurčitosti .....	96
2.5.14.3	Měření v oblasti mikroobjektů .....	96
2.5.15	Tunelový jev .....	96
2.5.16	***Einstein versus kvantová mechanika .....	97

2.5.17 \*\*\*Schrödingerova kočka..... 97

# 1. MATEMATICKÉ NÁSTROJE FYZIKY

## 1.1 Filosofická stránka matematiky aneb Hilbert versus množiny

Matematika během svého vývoje postupně prošla třemi krizemi, které ovlivnily další vývoj a většinou nejen matematiky, ale i věd příbuzných. Zpočátku vývoje prvních vědeckých poznatků totiž se totiž většinou „vědec“ (učenec) zabýval vědou bez rozdílu zájmu. Takže v historických a životopisných dílech můžeme najít o daném učenci, že to byl matematik, astronom, filosof, lékař, řečník, právník, teolog, ... později (když se začala zhruba od 14. století rozvíjet fyzika) i fyzik. Postupem času, jak se zvětšovalo množství poznatků, které byly z daných oborů objeveny, začali se i vědci (učenci) specializovat, takže později se v životopisech setkáme „jen“ s matematikem a fyzikem, fyzikem a astronomem, právníkem, teologem a politikem (náhrada starověkých řečníků), ...

Zmíněné 3 krize matematiky byly tyto:

1. krize matematiky - objevila se během tzv. hrdinského věku řecké matematiky (6. - 4. století př. n. l.). Její příčinou byl objev nesouměřitelnosti úseček, tj. nemožnost vyjádření všech čísel (úseček) pomocí poměrů (tj. pomocí čísel racionálních) - např. strana čtverce a jeho úhlopříčka (poměr je  $1 : \sqrt{2}$ ). Tento objev vycházel přímo z učení pythagorejců, kteří se snažili veškeré dění ve světě převést na čísla, takže se čísla zabývali důkladně. Hlavním jejich představitelem byl Pythagoras (asi 570- 500 př. n. l.).
2. krize matematiky - přelom 18. a 19. století; souvisí s nepřesným zaváděním „nekonečně malých“ a „nekonečně velkých“ veličin v souvislosti se zpřehledněním a zpřesňováním základů matematické analýzy („ $\varepsilon - \delta$  akrobatika“ - definice limit, derivací, ... jsou vystavěny právě na základě „nekonečně malých“ a „nekonečně velkých“ veličin).
3. krize matematiky - konec 19. století, kdy ruský matematik George Cantor (1845 - 1918) zavádí teorii množin (vychází v roce 1874). Vybudováním teorie množin se objevila řada paradoxů, které se snažily teorii množin vyvrátit. Problém byl v samotné axiomatické výstavbě teorie množin. Tato (zatím poslední) krize matematiky trvá v podstatě dodnes.

Problém, na základě něhož v podstatě vznikla třetí krize matematiky, souvisí úzce teorií množin. Ta operuje s pojmem „nekonečno“ a to bylo právě příčinou řady obtíží a paradoxů. Při zavádění pojmu „nekonečno“ jsou možné dva přístupy:

1. nekonečno potenciální (v možnosti) - přístup starších matematiků, kdy nekonečné množiny (např. množina přirozených čísel) byla budována postupným přidáváním dalších prvků: z množiny  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  vytvořím množinu  $\{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$ , z ní pak množinu  $\{1, 2, 3, \dots, n, n+1, n+2\}$ , ...; přitom platí:  $\{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\} \subset \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, n+2\} \subset \dots$
2. nekonečno aktuální (v uskutečnění) - přístup, který převažuje dnes a který vychází z toho, že všechny nekonečné množiny, které matematikové potřebují, jsou již vytvořeny

První známky aktuálního nekonečna se začínají objevovat ve filosofii na přelomu starověku a novověku - německý matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1. 7. 1646 - 14. 11. 1716) patří k prvním zastáncům aktuálního nekonečna. Problém s nekonečnými množinami vzniká ale už dříve. Galileo Galilei (15. 2. 1564 - 8. 1. 1642) konstruuje (nekonečné) množiny  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$  a  $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$ . Mezi těmito množinami existuje vzájemně jednoznačné zobrazení (druhá mocnina resp. druhá odmocnina). Jinými slovy existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$  na svoji podmnožinu  $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$ . To je ale přitom ve sporu s Euklidovým axiomem (postulátem), který říká, že celek je vždy větší než část.

Bernard Bolzano (1781 - 1848) přistupuje k celé problematice nekonečen s teologickými argumenty (kromě matematikem je i profesorem teologie na Karlově Univerzitě). Tento teologický argument se týká právě nekonečných množin s aktuálním přístupem: vytvořená (již existující) nekonečná množina vyžaduje (aby byla uchována) nekonečnou mysl. Tu má jedině Bůh, který sice může nekonečné množiny (přirozená čísla, ...) vytvořit, ale otázkou je, jestli to chce.

Poté, co v roce 1874 publikoval George Cantor svojí teorii množin, problémy s nekonečny se projeví ještě více. Teorie množin obsahuje všechny množiny a tedy i množin nekonečné. A řada matematiků se bránila jejímu přijetí - měly podobně rozporuplné pocity jako Galileo Galilei při konstruování svých dvou množin.

Typickým příkladem, který se v této souvislosti objevuje jako „důkaz“ neplatnosti teorie množin a na kterém je založena řada dalších paradoxů, je případ holiče ve městě. Ve městě žije holič, který některé obyvatele holí, někteří se holí sami. Každý obyvatel se tedy nechává holit buď holičem nebo se holí sám (nekombinuje obě metody). Cílem je rozdělit město do dvou disjunktích množin (množin s prázdným průnikem), podle toho, jestli je holí holič nebo se holí sami. Kam ale s holičem? Holiče holí holič a přitom se ale holí sám!

Jiným příkladem je tzv. Russelův paradox: zavedeme množinu  $M$  jako množinu všech množin  $X$ , pro které platí, že množina  $X$  nepatří do  $X$ , tj.  $M = \{X; X \notin X\}$ . A co množina  $M$ ? Pokud  $M \in M$ , pak to znamená (podle konstrukce množiny  $M$ ), že  $M \notin M$ . Pokud budeme předpokládat, že  $M \notin M$ , pak (opět podle zavedení množiny  $M$ ) dojdeme k závěru, že  $M \in M$ .

Nepříjemné na celé situaci bylo, že tyto uvedené spory a paradoxy se začaly objevovat v době, kdy celá matematika teorii množin už používala a začala na ní budovat další závěry.

Pokusem o záchranu nejen teorie množin se stala **axiomatická výstavba matematiky**. Za axiom bylo v ranných matematických dobách (Euklides a jeho *Základy*) považováno tvrzení intuitivně jasné, které není třeba dokazovat. Na počátku 20. století se význam axiom posunul: je to tvrzení, které je vybraný pro daný účel a z něhož se potom odvozují další tvrzení a závěry. Hlavním iniciátorem tohoto snažení byl německý matematik a fyzik David Hilbert (23. 1. 1862 - 14. 2. 1943), který formalizoval matematiku, tzn. že zavedl

1. systém symbolů (jakousi abecedu) používanou matematiky (latinská a řecká písmena, číslice, symboly, ...)
2. pravidla podle kterých se z abecedy tvoří slova (např.  $x + y$ ,  $y + + / - ab + +$ ), (...)

Hilbertův formalismus říká, že matematik si nesmí nic představovat - pro něj existují jen axiomy, na základě nichž a platných pravidel se provádí důkazy „složitějších“ tvrzení, ... Matematika se tím odloučila od reálného světa. Reálný svět popisuje fyzika. Fyzik, pokud pustí ve výšce jednoho metru nad podlahou kámen, ví, že kámen spadne na podlahu pod vlivem tíhové síly Země. Dost těžko může rozvíjet teorii, která bude popisovat, jak puštěný kámen bude levitovat nebo dokonce prorazí strop a vyletí směrem vzhůru, protože to neodpovídá realitě. Matematik tuto šílenou teorii budovat může, protože díky Hilbertovu formalismu nemá matematická teorie žádnou spojitost s praxí.

Součástí Hilbertovy práce byly tyto podmínky na matematickou teorii:

1. nezávislost axiomů - jsou některé matematické teorie, kde se závislé axiomy vyskytují a je to ku prospěchu věci
2. úplný systém - matematická teorie musí být úplná (např. je možné dokázat platnost tvrzení  $T$  nebo jeho negaci)
3. bezesporný systém - v tomto systému není možné dokázat zároveň platnost tvrzení  $T$  i jeho negaci

Na základě těchto požadavků a základních axiomů by bylo možné budovat jakoukoliv teorii. Hilbert věřil, že je posledním skutečným matematikem, který „něco vymyslel“. Byl přesvědčen, že je možné nalézt mechanické pravidlo pro hledání důkazu a část svého života věnoval hledání tohoto pravidla. Kdyby toto pravidlo skutečně našel, pak by se velmi podstatným způsobem snížila role matematiků - ti by se stali jen pomocníky strojů, které by hledali důkazy nových tvrzení, formulovali tvrzení nová, ...

Začátkem třicátých let 20. století Kurt Gödel dokázal větu o neúplnosti, čímž zhrotil Hilbertovy představy o „konci matematiků“. Gödel využil konečný systém axiomů a navrhl větu, která odkazovala sama na sebe a kterou lze jednoduše formulovat takto:

**V:** Tato věta není dokazatelná.

Pokud by byl Gödel schopen tuto větu dokázat, věta by byla nepravdivá a to by byl problém. Žádná dobrá množina axiomů nemůže by totiž neměla umožnit dokázat tvrzení, které je nepravdivé. Pokud by naopak tuto větu nebylo možné dokázat, byla by věta pravdivá, ale to není možné v rámci dané teorii dokázat. Matematika je tedy neúplná a Gödelova věta se tak stává nejdůležitějším milníkem (pokrokem) v matematice dvacátého století.

Věta o neúplnosti tedy říká, že když máme k dispozici nějakou matematickou teorii (popsatelnou axiomami, formulami, ...), která obsahuje aritmetiku přirozených nebo celých čísel a která je bezesporná, pak tato teorie nemůže být úplná. Jinými slovy v této teorii je možné formálními prostředky dané teorie dokázat platnost tvrzení  $T$  i jeho negace nebo danými prostředky není možné dokázat ani tvrzení  $T$  ani jeho negaci. Jistá náprava by se mohla na první pohled zdát v tom, že jedno z problematických tvrzení vezeme jako základní axiom. Tím zvětšíme teorii, ale přesto se zde vyskytne další nedokazatelné tvrzení.

Problém je v tom, že bezespornost dané teorie není možné dokázat v rámci této teorie, ale až v rámci teorii širší. O té ale dopředu nevíme jestli je nebo není bezesporná. (Např. bezespornost reálných čísel není možné dokázat v rámci reálných čísel, ale až v rámci čísel komplexních - viz definici komplexních čísel jako dvojice čísel reálných v odstavci 1.9.1)

## 1.2 Základní pojmy algebry

Algebra je část matematiky, která se zabývá různými matematickými strukturami (grupy, tělesa, vektorové prostory, okruhy, obory integrity, ...), vztahy mezi těmito strukturami, zobrazeními mezi jednotlivými strukturami. Zabývá se těmito strukturami jak na obecné úrovni, tak potom na konkrétních aplikacích (např. matice a řešení lineárních rovnic a jejich soustav; ...). Pro další výklad bude nezbytné seznámit se základními pojmy z lineární algebry.

### 1.2.1 Od kartézského součinu k zobrazení aneb co na střední škole ještě bylo

Začneme se základní definicí, od níž se odvíjí vše ostatní: kartézský součin.

**D:** KARTÉZSKÝ SOUČIN MNOŽIN  $A$  A  $B$  JE MNOŽINA VŠECH USPOŘÁDANÝCH DVOJIC  $[x; y]$  TAKOVÝCH, ŽE  $x \in A$  A ZÁROVEŇ  $y \in B$ . ZNAČÍ SE  $A \times B$ .

Pokud se budeme zabývat speciální případem kartézského součinu, ve kterém každý prvek má maximálně jeden obraz, budeme mluvit o zobrazení.

**D:** **ZOBRAZENÍ MNOŽINY  $A$  DO MNOŽINY  $B$**  JE PODMNOŽINA KARTÉZSKÉHO SOUČINU  $A \times B$ , PRO JEJÍŽ USPOŘÁDANÉ DVOJICE  $[x_1; y_1], [x_2; y_2]$  PLATÍ:  $y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ .

Speciálním případem zobrazení je pak zobrazení prosté, kdy každému obrazu odpovídá maximálně jeden vzor.

**D:** ZOBRAZENÍ  $U$  SE NAZÝVÁ **PROSTÉ**, PŘÁVĚ TEHDY KDYŽ PRO LIBOVOLNÉ DVA PRVKY  $y_1 = U(x_1)$  A  $y_2 = U(x_2)$  ZOBRAZENÍ  $U$  PLATÍ:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$ .

Jestliže se jedná o zobrazení množiny  $A$  na množinu  $B$ , které je prosté, mluvíme o vzájemně jednoznačném zobrazení  $A$  na  $B$ .

## 1.2.2 Od operace k unitárnímu prostoru aneb co se dozvíte až na vysoké škole

K důležitým strukturám, které se zavádějí právě v algebře, je nutné zavést i pojem operace.

**D:** NECHĚŤ  $G$  JE NEPRÁZNÁ MNOŽINA. **OPERACÍ** (BINÁRNÍ OPERACÍ) NA MNOŽINĚ  $G$  SE ROZUMÍ KTERÉKOLIV ZOBRAZENÍ  $f: G \times G \rightarrow G$ .

Máme-li na neprázdne množině  $G$  definovanou nějakou operaci (např. operaci  $*$  - „hvězdička“), můžeme zavést uspořádanou dvojici  $(G, *)$ , která se nazývá **grupoid**. Aby byl grupoid grupou, což je důležitý pojem pro další výklad, musí být splněny určité podmínky.

**D:** GRUPOID  $(G, *)$  SE NAZÝVÁ **GRUPA**, JSOU-LI SPLNĚNY NÁSLEDUJÍCÍ PODMÍNKY:

1. PRO VŠECHNA  $g_1, g_2 \in G$  PLATÍ:  $g_1 * g_2 \in G$ ,
2. PRO VŠECHNA  $g_1, g_2, g_3 \in G$  PLATÍ:  $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$  (ASOCIATIVNÍ ZÁKON),
3. EXISTUJE NEUTRÁLNÍ PRVEK  $n \in G$  TAKOVÝ, ŽE PRO KAŽDÝ PRVEK  $g \in G$  PLATÍ:  
 $g * n = n * g = g$ ,
4. PRO KAŽDÝ PRVEK  $g \in G$  EXISTUJE SYMETRICKÝ PRVEK  $s \in G$  TAK, ŽE PLATÍ:  
 $g * s = s * g = n$ .

Pokud navíc pro všechna  $g_1, g_2 \in G$  platí  $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$  hovoří se o **komutativní (Abelově) grupě**.

Právě uvedená definice grupy je oproti ostatním (uvedeným dříve) složitější, ale pokusíme se jí rozebrat. První bod říká, že pokud provedeme na libovolné dva prvky z množiny  $G$  definovanou operaci, výsledek musí být také prvkem z množiny  $G$ . Druhý bod je vyjádřením asociativního zákona. Třetí a čtvrtý bod definují jisté „speciální“ prvky v množině  $G$ , které dávají grupám řadu výhod. Jedná se ale o učivo, které překračuje rámec tohoto článku.

V definici grupy jsou tyto „speciální“ prvky popsány v obecné podobě, i když se většinou pracuje s konkrétními případy:

1. pro grupu s operací „+“ (tj. sčítání) se neutrální prvek nazývá **nulový** a symetrický prvek je prvek **opačný**
2. pro grupu s operací „·“ (tj. násobení) se neutrální prvek nazývá **jednotkový** a symetrický prvek je prvek **inverzní**.

Příklady grup jsou tyto grupoidy  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ , ... ale už ne  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  (neexistuje prvek inverzní),  $(\mathbb{N}, +)$  (neexistuje prvek opačný), ...

Další algebraickou strukturou je těleso, které můžeme zavést pomocí grup.

**D:** NECHĚŤ  $T$  JE NEPRÁZNÁ MNOŽINA, NA KTERÉ JSOU DEFINOVÁNY DVĚ OPERACE: SČÍTÁNÍ A NÁSOBENÍ.  $(T, +, \cdot)$  JE **TĚLESO**, JSOU-LI SPLNĚNY NÁSLEDUJÍCÍ PODMÍNKY:

1. PRO VŠECHNA  $t_1, t_2, t_3 \in T$  PLATÍ:  $t_1 \cdot (t_2 + t_3) = t_1 \cdot t_2 + t_1 \cdot t_3$  (DISTRIBUTIVNÍ ZÁKON),
2.  $(T, +)$  JE KOMUTATIVNÍ GRUPA,
3.  $(T - \{0\}, \cdot)$  JE (KOMUTATIVNÍ) GRUPA.

Jako příklady těles je možné uvést  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  a  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ . Další příklady (s nimiž se pracuje v algebře) pro nás nejsou žádným přínosem.

Další strukturou, s níž pracuje i kvantová fyzika, je vektorový prostor.

**D:** NECHĚŤ  $(T, +, \cdot)$  JE TĚLESO. ŘEKNEME, ŽE  $V$  JE **VEKTOROVÝ PROSTOR** NAD TĚLESEM  $T$ , JESTLIŽE  $V$  JE NEPRÁZNÁ MNOŽINA, NA NÍŽ JSOU DEFINOVÁNY OPERACE SČÍTÁNÍ A ODCÍTÁNÍ A

PRO VŠECHNA  $\lambda \in T$  A VŠECHNA  $v \in V$  JE DEFINOVÁN PRVEK  $\lambda v \in V$ , PŘÍČEMŽ PLATÍ:

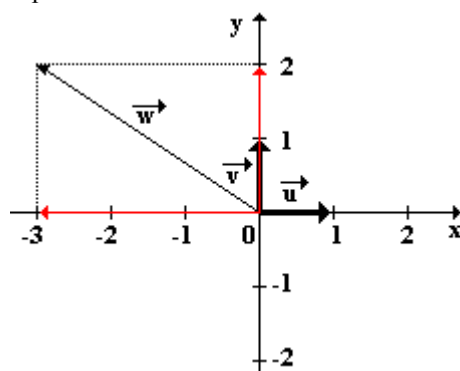
1.  $(V, +)$  JE KOMUTATIVNÍ GRUPA,
2. PRO VŠECHNA  $\alpha, \beta \in T$  A PRO VŠECHNA  $v \in V$  JE  $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ ,
3. PRO VŠECHNA  $\alpha, \beta \in T$  A PRO VŠECHNA  $v \in V$  JE  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ ,
4. PRO VŠECHNA  $\alpha \in T$  A PRO VŠECHNA  $u, v \in V$  JE  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ,
5. PRO VŠECHNA  $v \in V$  JE  $1 \cdot v = v$ .

Prvky vektorového prostoru se nazývají **vektory**, prvky tělesa, nad kterým je vektorový prostor definován, jsou **skaláry**. Prvky vektorového prostoru nemusí být vektory v běžném slova smyslu, tj. „úsečky se šipkou“. Jako vektory (tj. prvky vektorového prostoru) mohou vystupovat např. reálná čísla, ... Příklady vektorových prostorů: komplexní čísla (viz odstavec 1.9) lze chápat jako vektorový prostor nad tělesem reálných čísel, reálná čísla je možné chápat také jako vektorový prostor nad tělesem reálných čísel, ...

Každý vektorový prostor má svoji **bázi**. Jedná se o skupinu vektorů, která má tyto vlastnosti:

1. pomocí vektorů báze je možné vyjádřit libovolný vektor z daného vektorového prostoru (odborně se říká, že uvažovaná skupina vektorů generuje celý vektorový prostor)
2. vektory jsou lineárně nezávislé, tj. žádný vektor báze není lineární kombinací ostatních vektorů
3. počet vektorů báze je roven dimenzi daného vektorového prostoru

To, co na první pohled zní učeně, si lze velice jednoduše představit např. v kartézské soustavě souřadnic v rovině. Rovinu je možné chápat jako prostor dimenze 2 (má 2 nezávislé směry, tj. dvě osy). Jako vektory báze tohoto prostoru, tj. roviny, lze volit např. vektory  $\vec{u} = (1; 0)$  a  $\vec{v} = (0; 1)$ . Pomocí těchto dvou vektorů, které jsou lineárně nezávislé (jeden není lineární kombinací druhého, tj. v tomto případě není jeden násobkem druhého), je možné vyjádřit skutečně všechny vektory. Tak např. vektor  $\vec{w} = (-3; 2)$  můžeme napsat jako tuto lineární kombinaci vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ :  $\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v} = -3(1; 0) + 2(0; 1) = (-3; 0) + (0; 2) = (-3; 2)$  (viz obr. 1). Analogicky je možné postupovat v případě libovolného jiného vektoru.



obr. 1

Je třeba si uvědomit, že zvolená báze (tj. vektory  $\vec{u} = (1; 0)$  a  $\vec{v} = (0; 1)$ ) není jediná. Existuje nekonečné množství dalších, ale tato je nejjednodušší - říkáme, že je **ortonormální**:

1. vektory báze jsou **ortogonální** (kolmé)
2. vektory báze jsou **normované**, tj. jejich velikost je jedna

Pokud to je možné vždy se v daném vektorovém prostoru volí ortonormální báze, protože vektory takové báze mají „jednoduché“ souřadnice, s nimiž se provádějí výpočty snadně, navíc v případě euklidovského prostoru vektory leží na osách kartézského systému.

**D: UNITÁRNÍM PROSTOREM** SE ROZUMÍ DVOJICE  $(V, g)$ , KDE  $V$  JE VEKTOROVÝ PROSTOR A  $g$  SKALÁRNÍ SOUČIN. PRO KAŽDÉ  $u, v \in V$  JE  $g(u, v)$  SKALÁRNÍ SOUČIN UVEDENÝCH DVOU VEKTORŮ  $u, v$ .

ŘEKNEME, ŽE VEKTORY  $u, v \in V$  JSOU NAVZÁJEM **ORTOGONÁLNÍ (KOLMÉ)**, POKUD  $g(u, v) = 0$ .

### 1.2.3 Konstrukce množiny $\mathbb{Z}_p$

Pro pevně zvolené přirozené číslo  $p$  a celé číslo  $m$  je možné zkonstruovat množinu  $\overline{m}_p = \{n \in \mathbb{Z}; n \bmod p = m \bmod p\}$ , tj. množinu, která obsahuje čísla, která mají při dělení číslem  $p$  stejný zbytek jako při dělení číslem  $m$ . Příklady uvedených množin:

1.  $\overline{0}_3 = \overline{3}_3 = \{\dots; -6; -3; 0; 3; 6; 9; \dots\}$
2.  $\overline{1}_3 = \overline{4}_3 = \{\dots; -5; -2; 1; 4; 7; 10; \dots\}$
3.  $\overline{2}_3 = \overline{5}_3 = \{\dots; -4; -1; 2; 5; 8; 11; \dots\}$
4. ...

Symbolem  $\mathbb{Z}_p$  se pak značí množina všech různých množin  $\overline{m}_p$  pro  $m \in \mathbb{Z}$ :  $\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}_p; \overline{1}_p; \overline{2}_p; \dots; \overline{p-1}_p\}$ . Je-li  $p$  prvočíslo a pokud dodefinujeme  $\overline{m}_p + \overline{h}_p = \overline{m+h}_p$  a  $\overline{m}_p \cdot \overline{h}_p = \overline{m \cdot h}_p$  pro



$h \in \mathbb{Z}$ , je možné dokázat, že tímto způsobem jsou korektním způsobem na množině  $\mathbb{Z}_p$  definovány operace sčítání a násobení, při nichž je  $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$  těleso.

Poznámka: Při sčítání a násobení čísel tvaru  $\overline{m}_p$  se postupuje stejně jako v případě, že bychom pracovali v číselné soustavě o základu  $p$ . Např.  $\overline{2}_3 + \overline{2}_3 = \overline{4}_3 = \overline{1}_3$ ,  $\overline{2}_5 \cdot \overline{4}_5 = \overline{8}_5 = \overline{3}_5$ , ...

## 1.3 Matice

### 1.3.1 Definice a základní operace

V tomto odstavci zmíníme základní informace o maticích a operacích, které je možné s maticemi provádět.

**D:** NECHĚŤ  $m, n \in \mathbb{N}$ . **MATICÍ**  $A$  SESTAVENOU Z PRVKŮ TĚLESA  $T$  ROZUMÍME ZOBRAZENÍ

$$A: m \times n \rightarrow T, A: (i, j) \rightarrow a_{ij} \in T. \text{ TATO MATICE SE ZNAČÍ } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ NEBO}$$

$A = (a_{ij})$ . MNOŽINU VŠECH TAKOVÝCH MATIC BUDEME ZNAČIT  $T^{m \times n}$ . O MATICÍCH Z MNOŽINY  $T^{m \times n}$  ŘÍKÁME, ŽE MAJÍ  $m$  ŘÁDKŮ A  $n$  SLOUPCŮ, TJ. JDE O MATICE TYPU  $(m, n)$ .

V PŘÍPADĚ, ŽE  $m = n$ , HOVOŘÍME O ČTVERCOVÉ MATICI STUPNĚ  $n$ .

Důležitým pojmem u matice je její hodnota:

**D:** **HODNOST MATICE**  $M$  TYPU  $(m, n)$  UDÁVÁ MAXIMÁLNÍ POČET LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝCH ŘÁDKŮ, KTERÝ JE ROVEN MAXIMÁLNÍMU POČTU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝCH SLOUPCŮ DANÉ MATICE. ZNAČÍ SE  $h(M)$ .

Příklad: hodnota matice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  je  $h(M) = 1$ , pro matici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  je  $h(A) = 2$ , ...

Hodnota matice  $A$  se nezmění (tj. z matice  $A$  vytvoříme novou matici  $B$  o téže hodnotě), pokud s řádky resp. sloupci provedeme některou z těchto **elementárních úprav**:

1. napíšeme řádky (resp. sloupce) matice  $A$  v jiném pořadí
2. násobíme některý řádek (resp. sloupec) matice  $A$  nenulovým skalárem
3. přidáme k matici  $A$  řádek (resp. sloupec), který je lineární kombinací ostatních řádků (resp. sloupců)
4. vynecháme v matici  $A$  řádek (resp. sloupec), který je lineární kombinací ostatních řádků (resp. sloupců)
5. přičteme k některému řádku (resp. sloupci) matice  $A$  lineární kombinaci ostatních řádků (resp. sloupců)

V tom případě se matice nazývají **ekvivalentní matice**.

Operace, které je možné provádět s maticemi jsou tyto:

**D:** PRO MATICE  $A = (a_{ij})$  A  $B = (b_{ij})$  TYPY  $(m, n)$  SE DEFINUJE **SOUČET MATIC**  $A + B$  JAKO MATICE  $C$  TYPY  $(m, n)$ , PRO KTEROU PLATÍ:  $C = (c_{ij})$ , KDE  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  PRO  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**D:** PRO MATICI  $A = (a_{ij})$  TYPY  $(m, n)$  A  $\lambda \in T$  SE DEFINUJE **NÁSOBEK MATICE  $A$  SKALÁREM  $\lambda$**   $\lambda A$  JAKO MATICE  $D$  TYPY  $(m, n)$ , PRO KTEROU PLATÍ:  $D = (d_{ij})$ , KDE  $d_{ij} = \lambda a_{ij}$  PRO  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**D:** PRO MATICE  $A = (a_{ij})$  TYPY  $(m, n)$  A  $B = (b_{ij})$  TYPY  $(n, k)$  SE DEFINUJE **SOUČIN MATIC**  $AB$  JAKO MATICE  $F$  TYPY  $(m, k)$ , PRO KTEROU PLATÍ:  $F = (f_{ij})$ , KDE  $f_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}$  PRO  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**Poznámka:** Formuli  $f_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}$  z definice součinu dvou matic lze opsat slovy tak, že násobíme  $i$ -tý řádek matice  $A$   $j$ -tým řádkem matice  $B$ .

### Násobení matic není obecně komutativní.

Tak jako v grupách a tělesech (viz odstavec 1.2.2) existoval jednotkový prvek, existuje „jednotkový prvek“ i pro matice - je jí jednotková matice:

$$\mathbf{D: MATICE } E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ SE NAZÝVÁ } \underline{\text{JEDNOTKOVÁ MATICE}} \text{ STUPNĚ } m.$$

Podobně jako existoval v grupách a tělesech (viz odstavec 1.2.2) prvek inverzní k danému prvku, existuje „inverzní prvek“ i pro matice - je jí inverzní matice:

**D:** ČTVERCOVÁ MATICE  $M^{-1}$ , PRO KTEROU PLATÍ  $M^{-1} \cdot M = M \cdot M^{-1} = E$ , SE NAZÝVÁ INVERZNÍ MATICE KE ČTVERCOVÉ MATICI  $M$ .

Najít inverzní matici  $M^{-1}$  k matici  $M$  je možné několika způsoby:

1. pomocí násobení dvou matic (přesně podle definice inverzní matice a definice násobení matic) s tím, že budeme řešit soustavu několika rovnic, v nichž neznámé budou jednotlivé koeficienty hledané inverzní matice  $M^{-1}$
2. „fintou“, která spočívá v tom, že si napíšeme danou matici  $M$  a jednotkovou matici do „velké matice“ ( $M:E$ ) a pomocí povolených úprav matic (násobení řádku, přičtení řádku k jinému řádku, výměna řádků, ...) dojdeme do tvaru, kdy jednotková matice  $E$  bude „v levé části velké matice“ - „v pravé části velké matice“ pak bude matice  $M^{-1}$ , tj. ( $E:M^{-1}$ )

**Příklad:** Nalezněte inverzní matici k matici  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Řešení:** K nalezení inverzní matice k matici  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$  použijeme právě popsanou „fintu“. Podle návodu

vytvoříme matici  $\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ , kterou budeme dále upravovat:  $\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$   
 $\left( \begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right)$ . Inverzní matice k matici  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$  je tedy matice  $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ .

Tuto matici je možné dále upravit na tvar  $M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Pro inverzní matice platí tato pravidla:

1.  $(M^{-1})^{-1} = M$
2.  $(\lambda M)^{-1} = \frac{1}{\lambda} M^{-1}$ , kde  $\lambda \in T$  je skalár
3.  $(M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_{n-1} \cdot M_n)^{-1} = M_n^{-1} \cdot M_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot M_2^{-1} \cdot M_1^{-1}$

Na základě existence inverzní matice se matice dělí do dvou disjunktních skupin:

**D:** MATICE, K NÍŽ EXISTUJE INVERZNÍ MATICE, SE NAZÝVÁ REGULÁRNÍ MATICE. V OPAČNÉM PŘÍPADĚ SE NAZÝVÁ SINGULÁRNÍ.

Při počítání s matice je možné se též setkat s maticí transponovanou:

**D:** NECHŤ MATICE  $M = (a_{ij})$  JE TYPU  $(m, n)$ . MATICÍ TRANSPONOVANOU K MATICI  $A$  ROZUMÍME MATICI  $M^T = (b_{ij})$  TYPU  $(n, m)$ , KDE  $(b_{ij}) = (a_{ji})$  PRO  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . TRA

**Příklad:** maticí transponovanou k matici  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  je matice  $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Pro transponované matice platí tato pravidla:

4.  $(M^T)^T = M$
5.  $(\lambda M)^T = \lambda M^T$ , kde  $\lambda \in T$  je skalár
6.  $(M_1 + M_2 + \dots + M_{n-1} + M_n)^T = M_1^T + M_2^T + \dots + M_{n-1}^T + M_n^T$
7.  $(M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_{n-1} \cdot M_n)^T = M_n^T \cdot M_{n-1}^T \cdot \dots \cdot M_2^T \cdot M_1^T$

### 1.3.2 Použití matic při řešení soustav rovnic

Při řešení soustavy rovnic hraje důležitou úlohu matice stupňovitého tvaru:

**D:** MATICE  $M$  TYPU  $(m, n)$  SE NAZÝVÁ **MATICE STUPŇOVITÉHO TVARU**, MÁ-LI TVAR:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1i_1} & * & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & a_{2i_2} & * & \dots & * \\ \vdots & & \dots & & & & \vdots & & * \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & a_{ki_k} & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & & \dots & & \dots & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{KDE } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n,$$

$k \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_{1i_1} \neq 0 \wedge a_{2i_2} \neq 0 \wedge \dots \wedge a_{ki_k} \neq 0$  A \* ZNAČÍ LIBOVOLNÝ PRVEK Z TĚLESA  $T$ .

Speciálním případem matice stupňovitého tvaru je matice trojúhelníková.

Významnou roli hrají matice při řešení soustavy rovnic, kdy maticový zápis výrazně zpřehlední řešení této soustavy a elimineje možnost vzniku chyby.

Uvažme soustavu  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ve tvaru:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \quad \text{kde } a_{ij}, b_1, b_2, \dots, b_m \in T$$

**D:** SOUSTAVA ROVNIC SE NAZÝVÁ **HOMOGENNÍ**, JESTLIŽE  $b_i = 0$  PRO  $i = 1, 2, \dots, m$ . SOUSTAVA ROVNICE SE NAZÝVÁ **NEHOMOGENNÍ**, JESTLIŽE  $b_i \neq 0$  ALESPŇ PRO JEDEN INDEX  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Pro snadné určení řešitelnosti dané soustavy rovnic se zavádí dvě matice:

**D:** MATICE  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$  SE NAZÝVÁ **MATICE SOUSTAVY ROVNIC**. MATICE

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$
 SE NAZÝVÁ **ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY ROVNIC**.

Na základě hodnoty matice soustavy rovnic a hodnoty rozšířené matice soustavy rovnic je možné určit počet řešení dané **nehomogenní soustavy rovnic** (matematicky se jedná o **Frobeniovu větu**):

1.  $h(A) = h(A^*) = n$  - soustava rovnic má právě jedno řešení
2.  $h(A) = h(A^*) < n$  - soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení
3.  $h(A) \neq h(A^*)$  - soustava rovnic nemá žádné řešení.

**Homogenní soustava rovnic** má vždy netriviální řešení (alespoň jedno z  $x_i$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$  je nenulové), právě když  $h(A) < n$ .

Postup, kterým je možné pomocí maticového zápisu vyřešit soustavu  $m$  rovnic o  $n$  neznámých, formuloval už Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Na jeho počest se tato metoda nazývá **Gaussova eliminační metoda**:

1. pomocí elementárních úprav převést matici rozšířenou matici soustavy rovnic na matici stupňovitého tvaru
2. v případě, že má soustava řešení, pak  $m - n$  neznámých (je-li  $m - n > 0$ ) zvolit jako parametr (pokud  $m = n$  tento krok odpadá)
3. pomocí tzv. zpětného chodu dopočítávat jednotlivé neznámé „odspodu“ matice stupňovitého tvaru - vypočítat a dosadit do řádku o jeden výše

## 1.4 Determinanty

### 1.4.1 Definice, základní vlastnosti

Determinant je pojem, který souvisí přímo s maticemi. Jedná se o číslo, které ze **čtvercové** matice získáme předem definovaným způsobem. Nejjednodušší je determinant matice druhého stupně.

**D:** NECHŤ  $T$  JE TĚLESO A  $a, b, c, d \in T$ . **DETERMINANTEM MATICE DRUHÉHO STUPNĚ**  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

ROZUMÍME PRVEK  $ad - bc \in T$ . ZÁPIS:  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

*Poznámka:* Determinant matice  $A$  bývá někdy zvykem značit též  $\det A$ .

Podobným způsobem je možné vypočítat i determinant matice třetího stupně. Výpočet tohoto determinantu je možný pomocí **Sarrusova pravidla**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Pamatovat si Sarrusovo pravidlo

v tomto tvaru je asi dost náročné (i když jistou závislost pro vytvoření nějaké mnemotechnické pomůcky by se jistě podařilo nalézt). Rozumnější je uvědomit si, že se jedná o jakési zobecnění výpočtu determinantu druhého

stupně. Stačí si determinant  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  přepsat do pomocného tvaru  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$  a nyní už řešit

analogicky jako determinant matice druhého stupně. Na třech „diagonálách“, které míří „zleva shora doprava dolů“ vynásobíme prvky a vzniklé součiny sečteme. Na třech „diagonálách“, které jdou „zleva zdola doprava nahoru“ opět vynásobíme prvky a vzniklé součiny sečteme. Tento výsledek odečteme od součtu získaného z diagonál jdoucích „zleva shora doprava dolů“ a determinant je vypočtený.

**Příklad:** Vypočtete determinant matice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Řešení:** Determinant si přepíšeme v pomocném tvaru  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$  a nyní už můžeme počítat:

$1 \cdot 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 4 \cdot 2 - 0 \cdot (-3) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-1)$ . Po vyčíslení dostaneme:  $4 - 3 + 0 + 8 + 0 + 2 = 11$ .

Tedy  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 11$ .

### 1.4.2 Výpočet determinantů vyšších stupňů

Determinant čtvercové matice vyššího stupně než tři se počítá podle jistých pravidel. Odvození těchto pravidel jde ale za rámec středoškolské matematiky a nebudeme je zde proto uvádět. Připomeneme vlastnosti determinantů:

1. determinant jednotkové matice je 1
2. výměnou libovolných dvou řádků se změní znaménko determinantu
3. má-li matice libovolné dva řádky stejné, pak její determinant je nulový
4. vynásobením libovolného řádku matice nenulovým skalárem  $\lambda$  se determinant příslušné matice zvýší  $\lambda$ -krát

5. determinant singulární matice je nulový; determinant regulární matice je nenulový

### 1.4.2.1 Součin prvků na hlavní diagonále

V případě, že je nutné vypočítat determinant vyššího než třetího stupně, je možné použít následující pravidlo: Upravíme-li determinant do trojúhelníkového tvaru, tj. pod hlavní diagonálou jsou samé nuly, je hodnota determinantu rovna součinu prvků na hlavní diagonále. Při úpravách je třeba dbát na to, abychom hodnotu determinantu nezvyšovali. Zejména bod 4 z právě uvedených vlastností determinantů by mohl působit potíže. Je tedy možné násobit libovolným nenulovým reálným číslem  $\lambda$  libovolný řádek determinantu. Pokud ale s řádkem nic neprovádíme, hodnota determinantu se  $\lambda$ -krát zvýší. Násobíme-li řádek, který potom přičítáme k dalšímu, není nutné provádět žádné korekce při výpočtu determinantu - jeho hodnota se tím nemění.

Konkrétněji asi vše vysvětlí následující příklad.

**Příklad:** Vypočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

**Řešení:** Determinant vypočteme zejména s využitím bodu 4 uvedeného ve vlastnostech determinantů. Aby se hodnota determinantu nezměnila, je třeba uvažovaným skalárem  $\lambda$  determinant ihned vydělit:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-3) = \frac{1}{(-3)^4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -8 \end{vmatrix} \cdot (-2) =$$

$$= \frac{1}{(-3)^4 \cdot 5^3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -36 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -21 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -36 \end{vmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{(-3)^4 \cdot 5^3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -36 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -35 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(-3)^4 \cdot 5^3 \cdot (-4)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -36 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 135 \end{vmatrix} \cdot (-4) = \frac{3 \cdot (-5) \cdot (-36) \cdot (-20) \cdot 135}{(-3)^4 \cdot 5^3 \cdot (-4)} = 36$$

Problematika  $\lambda$ - násobku snad vynikla a byla vysvětlena. Ve třetím kroku, kde se násobí třetí řádek determinantu skalárem  $\left(-\frac{1}{6}\right)$  se žádná korekce na výpočet determinantu neprovádí, protože tento třetí řádek přičítáme k řádku čtvrtému a pátému. V ostatních případech je nutné korekce provést, protože vždy násobíme řádek, do něhož se přičítá, tj. se řádkem samotným se vlastně jakoby nehýbe.

### 1.4.2.2 Rozvoj podle daného sloupce nebo řádku

Dříve než začneme s výpočtem determinantu pomocí rozvoje podle daného sloupce resp. řádku, je třeba zavést některé důležité pojmy.

**D:** NECHŤ MATICE  $A = (a_{ij})$  JE TYPU  $(m, n)$ . VZNIKNE-LI MATICE  $M$  TAK, ŽE Z MATICE  $A$  VYNECHÁME ŘÁDKY  $i_1, i_2, \dots, i_h$  A SLOUPCE  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , BUDEME PSÁT  $M = A^g \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_h \\ j_1, j_2, \dots, j_k \end{pmatrix}$  A BUDEME ŘÍKAT, ŽE MATICE  $M$  JE **SUBMATICE** MATICE  $A$ .

**Příklad:** Je dána matice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Určete  $A^g \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  a  $A^g \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Řešení:** Submatice  $A^g \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  vznikne z matice  $M$  vynecháním 1. a 3. řádku a 2. a 3. sloupce, tedy z matice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Proto dostáváme: } A^g \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Analogickým postupem dostaneme:  $A^g \begin{pmatrix} 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Pomocí submatice dané matice je možné zavést též subdeterminant a algebraický doplněk.

**D:** NECHĚT  $M$ , MATICE TYPU  $(k, k)$ , JE SUBMATICE MATICE  $A$  TYPU  $(m, n)$ , KDE  $1 \leq k \leq \min(m, n)$ . PRVEK  $\det M = |M|$  SE NAZÝVÁ **SUBDETERMINANT** MATICE  $A$ .

**D:** NECHĚT MATICE  $A = (a_{ij})$  JE TYPU  $(m, n)$ . PRO SUBMATICI  $M = A^g \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  ZAVÁDÍME

$$A_{ij}^+ = \det M = \det A^g \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \text{ A DÁLE DEFINUJEME } A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^+, \text{ PŘÍČEMŽ PRVEK } A_{ij} \text{ SE NAZÝVÁ}$$

**ALGEBRAICKÝ DOPLNĚK** PRVKU  $a_{ij}$  V MATICI  $A$ .

Nyní je možné napsat rozvoj determinantu pomocí daného sloupce: Pro matici typu  $A$  typu  $(m, m)$  a pro  $i$ , pro které  $1 \leq i \leq m$ , platí:  $\det A = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \dots + a_{mi}A_{mi}$ .

Analogicky je možné postupovat při rozvoji determinantu pomocí daného řádku: Pro matici typu  $A$  typu  $(m, n)$  a pro  $i$ , pro které  $1 \leq i \leq m$ , platí:  $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{im}A_{im}$ .

Tento způsob výpočtu determinantu je možné použít v případě determinantů vyšších stupňů, které obsahují v některém sloupci či řádku „velké množství nul“. V ten okamžik se výpočet determinantu výrazně urychlí. Nicméně tato pravidla mají obecnou platnost.

**Příklad:** Vypočtete determinant matice  $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

**Řešení:** Vzhledem k tomu, že se jedná o determinant čtvrtého stupně, nemůžeme použít Sarrusovo pravidlo. To bychom mohli použít až na determinanty třetího stupně, které vzniknou po rozvoji determinantu dané matice např. podle prvního sloupce:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} =$$

$$= a_{11}A_{11}^+ (-1)^{1+1} + a_{21}A_{21}^+ (-1)^{2+1} + a_{31}A_{31}^+ (-1)^{3+1} + a_{41}A_{41}^+ (-1)^{4+1} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \text{(nyní použijeme Sarrusovo pravidlo)}$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3[(-1) \cdot (-3) \cdot (-2) + 5 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 0 - ((-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \cdot 5)] -$$

$$- [2 \cdot (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 0 - ((-1) \cdot (-3) \cdot 2 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \cdot (-1))] +$$

$$+ [2.5.2 + (-1).1.2 + 2.(-1).(-3) - (2.5.2 + (-3).1.2 + 2.(-1).(-1))] =$$

$$= 3(-16+17) - (14-10) + (24-16) = 3 - 4 + 8 = 7$$

### 1.4.3 Použití determinantů

Význam determinantů spočívá v jejich použití při řešení soustavy rovnic. Kromě Gaussovy eliminační metody (viz odstavec 1.3.2) je možné k řešení soustavy  $m$  rovnic o  $n$  neznámých, kde  $m = n$ , použít

**Cramerovo pravidlo:** Platí:  $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$ , kde  $\Delta$  je determinant matice soustavy lineárních rovnic (viz odstavec 1.3.2) a  $\Delta_i$  je determinant matice, kterou získáme z matice soustavy lineárních rovnic tak, že  $i$ -tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran soustavy lineárních rovnic.

Otázkou je, zda se jedná o velkou výhodu. Řešit např. soustavu 5 rovnic o 5 neznámých znamená při použití Cramerova pravidla vyřešit 6 determinantů pátého stupně. Možná, že Gaussovou eliminační metodou se dostaneme k výsledku dříve ... Ale to závisí na konkrétních prvcích matice - pokud jich bude „několik na správných místech“ nulových, výpočet determinantů se zjednoduší.

## 1.5 Systémy souřadnic

V matematice a ve fyzice je třeba vyšetřovat různé úlohy, které se výrazně zjednoduší, pokud si úlohu překreslíme do systému souřadnic. Podle zadání úlohy a způsobu výpočtu je možné volit z několika systémů souřadnic.

### 1.5.1 Kartézský systém souřadnic

Za název kartézského systému souřadnic je zodpovědný francouzský filosof, matematik, fyzik a fyziolog René Descartes (1596 -1650), který začal v matematice jako první hledat souvislosti mezi geometrií a algebrou. Proto byl po něm pojmenován nejjednodušší systém souřadnic. Soustava souřadnic (a nejen kartézská) slouží jednak geometrickému náhledu na danou situaci a jednak umožňuje pomocí algebraických struktur a pravidel počítat základní veličiny spojené s tímto systémem souřadnic.

Kartézská soustava souřadnic v rovině (resp. prostoru) je tvořena dvěma (resp. třemi) navzájem kolmými osami  $x$  a  $y$  (resp.  $x$ ,  $y$  a  $z$ ), které se protínají v počátku soustavy souřadnic  $O$ . Tímto způsobem je zvolena **ortogonální (pravoúhlá) soustava souřadnic**, která je speciálním případem tzv. kosoúhlé soustavy souřadnic, kde souřadnicové osy svírají libovolný úhel. Tento obecný případ ale probírat nebudeme, protože se používá jen ve zcela výjimečných případech.

Pomocí dvou (resp. tří) vektorů  $\vec{e}_1$  a  $\vec{e}_2$  (resp.  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  a  $\vec{e}_3$ ), které leží postupně na osách  $x$  a  $y$  (resp.  $x$ ,  $y$  a  $z$ ) zvolíme tzv. bázi kartézského systému souřadnic, tj. vektory, pomocí nichž je možné vyjádřit souřadnice jakéhokoliv bodu a vektoru v daném kartézském systému souřadnic (obšírněji je báze popsána v odstavci 1.2.2). Zvolíme-li uvažované vektory tak, aby  $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$  a  $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$ , získáme tzv. **normované** vektory, tj. vektory, které mají jednotkovou velikost, tj.  $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ .

Tímto způsobem byl vytvořen **ortonormální** (ortogonální a normovaný) systém souřadnic.

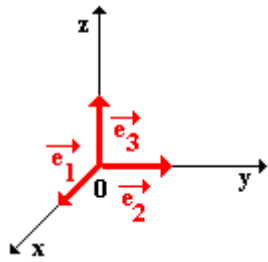
„Speciality“ kartézských souřadnic:

1. jedna z uvažovaných souřadnic je konstantní - získáme rovinu, která je kolmá k ose, jejíž souřadnice je konstantní (např. všechny body, pro něž  $z = 7$  vytvoří rovinu, která je kolmá k ose  $z$  a tuto osu protíná v bodě  $z = 7$ )
2. dvě souřadnice konstantní - získáme přímku, která je rovnoběžná s třetí osou (např. všechny body, pro které je  $x = 5$  a  $y = -2$  vytvoří přímku rovnoběžnou s osou  $z$ , která protne rovinu  $xy$  v bodě  $[5; -2]$ )

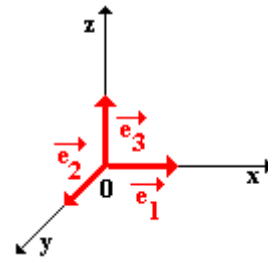
Kartézské souřadnice v třírozměrném prostoru se dále rozlišují na:

1. pravotočivé - viz obr. 2; v takovém systému souřadnic platí:  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$
2. levotočivé - viz obr. 3; pro vektory báze  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  a  $\vec{e}_3$  platí:  $\vec{e}_3 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_1$

Rozdíl mezi pravotočivým a levotočivým kartézským systémem souřadnic se běžně příliš neprojevuje. Rozdíly se objevují v okamžiku, kdy počítáme nějaký příklad (vektory, derivace, ...) po složkách. Pravotočivý systém se většinou používá ve fyzice, levotočivý v matematice.



obr. 2



obr. 3

### 1.5.2 Polární souřadnice

Polární souřadnice jsou souřadnice rovinné. Jsou určeny počátkem (pólem)  $O$  a polární osou  $o$ , která prochází počátkem (pólem)  $O$ . Polohu libovolného bodu  $A$  určíme v polárních souřadnicích (viz obr. 4):

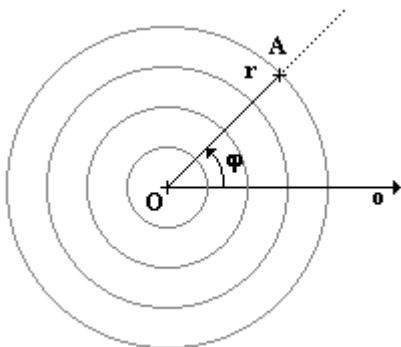
1. vzdáleností  $r$  bodu  $A$  od pólu  $O$ ; jedná se o velikost vektoru  $\overline{OA}$ , který se nazývá **polohový vektor (rádius vektor, průvodič)**;  $r$  je reálné nezáporné číslo
2. základní velikostí orientovaného úhlu  $\varphi$ , který se nazývá **polární úhel (argument, amplituda)**; úhel  $\varphi$  je z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  (otevřenost intervalu u hodnoty  $2\pi$  je z důvodu zabránění duplicitám)

Poloha bodu  $A$  je tedy dána v podstatě poloměrem kružnice se středem v bodě  $O$ , na níž bod  $A$  leží, a úhlem, který svírá v kladném směru jeho průvodič s osou  $o$ . Tímto způsobem je tedy zavedena polární soustava souřadnic  $Or\varphi$ .

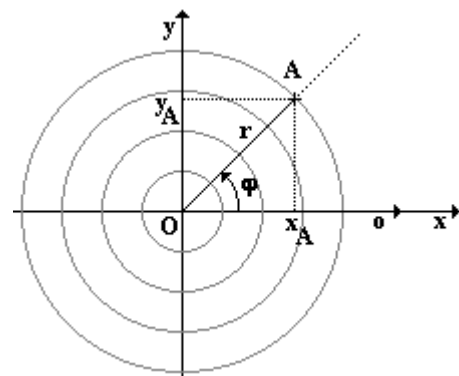
„Speciality“ polárních souřadnic:

1.  $r = konst.$  - získáme body, které leží na kružnici o poloměru  $r$  se středem v počátku
2.  $\varphi = konst.$  - získáme body, které leží polopřímce procházející počátkem  $O$ , která svírá s osou  $o$  kladně orientovaný úhel  $\varphi$

Chceme-li vyjádřit polární souřadnice bodu  $A = [r; \varphi]$  v kartézské soustavě souřadnic, tj. určit  $A = [x_A; y_A]$ , je možné použít obr. 5. Z tohoto obrázku je možné určit:  $x_A = r \cos \varphi$  a  $y_A = r \sin \varphi$ .



obr. 4



obr. 5

Pro opačný převod, tj. převod z kartézské soustavy souřadnic do polární soustavy souřadnic, je možné též použít obr. 5 a právě odvozené vztahy. Z obrázku je zřejmé, že  $r = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ , což vyplývá i ze vztahů  $x_A = r \cos \varphi$  a  $y_A = r \sin \varphi$ , které stačí dát na druhou a sečíst. Z těchto vztahů je možné podílem vyjádřit i úhel

$$\varphi: \frac{y_A}{x_A} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Tento vztah je třeba ale ještě okomentovat, protože funkce tangens je nespojitá a pro některé hodnoty je nedefinovaná:

1.  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_A}{y_A}$  pro  $x_A > 0$  a  $y_A > 0$
2.  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  pro  $x_A = 0$  a  $y_A > 0$
3.  $\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{x_A}{y_A}$  pro  $x_A < 0$  a  $y_A \in \mathbb{R}$
4.  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$  pro  $x_A = 0$  a  $y_A < 0$

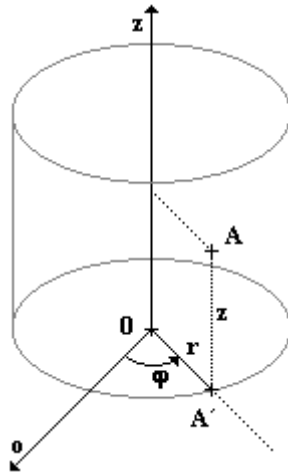


$$5. \quad \varphi = 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{x_A}{y_A} \text{ pro } x_A > 0 \text{ a } y_A < 0$$

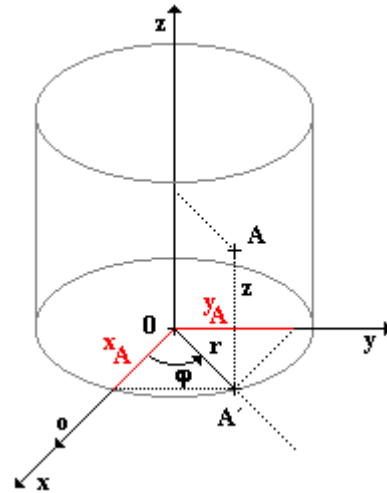
Právě uvedený rozpis není nutné si pamatovat, stačí jen přemýšlet a vědět, že hodnota úhlu  $\varphi$  je z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$ .

### 1.5.3 Cylindrické (válcové) souřadnice

V odstavci 1.5.2 byly popsány polární souřadnice v rovině. Jejich třírozměrnou analogií jsou souřadnice cylindrické (válcové). K rovině, v níž jsou zavedeny polární souřadnice, vedeme kolmici z počátkem (pólem) polárních souřadnic  $O$  (viz obr. 6). Polární souřadnice  $r$  a  $\varphi$  pak jsou souřadnicemi průmětu  $A'$  daného bodu  $A$  do roviny, v níž jsou polární souřadnice zavedeny. Tímto způsobem je tedy zavedena cylindrická (válcová) soustava souřadnic  $Or\varphi z$ .



obr. 6



obr. 7

„Speciality“ cylindrických souřadnic:

1.  $r = \text{konst.}$  - získáme body, které leží na rotačních válcových plochách se společnou osou  $z$
2.  $\varphi = \text{konst.}$  - získáme body, které leží v polorovinách, jejichž hraničními přímkami je osa  $z$
3.  $z = \text{konst.}$  - získáme body, které leží v rovinách kolmých k ose  $z$

Chceme-li nyní vyjádřit souřadnice bodu  $A = [r; \varphi; z]$  v kartézské soustavě souřadnic, tj. určit  $A = [x; y; z]$  je možné postupovat podle obrázku obr. 7. Z obrázku je vidět, že pro  $x$ -ovou a  $y$ -ovou souřadnice libovolného bodu, jehož souřadnice jsou udány pomocí cylindrického systému souřadnic, platí:  $x = r \cos \varphi$  a  $y = r \sin \varphi$ . Tedy naprosto totéž, jako pro převod souřadnic polárních na kartézské (viz odstavce 1.5.2). Třetí souřadnice zůstává beze změny, tedy  $z = z$ .

Pro inverzní převod, tj. převod souřadnic kartézských na souřadnice cylindrické, je situace opět podobná jako v odstavci 1.5.2. Pro libovolný bod, jehož souřadnice v kartézské soustavě souřadnic jsou  $A = [x; y; z]$  po převodu do cylindrických souřadnic platí:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  a  $z = z$ . Diskuse pro úhel  $\varphi$  je uvedena v odstavci 1.5.2. Když si ale uvědomíme definiční obor úhlu  $\varphi$  a vlastnosti funkce tangens, je možné všechny případy (znaménka souřadnic  $x$ ,  $y$  a nulovost souřadnice  $x$ ) dát dohromady bez jakýchkoliv problémů.

*Poznámka:* V případě, že by kartézský systém byl levotočivý, dojde k záměně  $x$ -ové a  $y$ -ové souřadnice.

### 1.5.4 Sférické (kulové) souřadnice

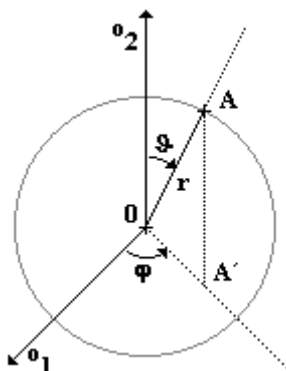
Sférické (kulové) souřadnice je možné zavést následujícím způsobem. V prostoru zvolíme rovinu a v ní bod  $O$ , který bude počátkem sférické soustavy souřadnic. Bodem  $O$  pak v této zvolené rovině vedeme polopřímku  $o_1$ . Dále vedeme bodem  $O$  přímku  $o_2$  kolmo ke zvolené rovině. Polohu libovolného bodu  $A$  v této soustavě souřadnic určíme (viz obr. 8):

1. vzdáleností  $r$  bodu  $A$  od počátku  $O$  soustavy souřadnic; jedná se o velikost vektoru  $\overline{OA}$ , který se nazývá **polohový vektor (radius vektor, průvodič)**;  $r$  je reálné nezáporné číslo
2. velikostí orientovaného úhlu  $\varphi$ , který svírá polopřímka  $o_1$  s polopřímkou  $OA'$ , kde  $A'$  je průmět bodu  $A$  do zvolené roviny; úhel  $\varphi$  je z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  (otevřenost intervalu u hodnoty  $2\pi$  je z důvodu zabránění duplicitám)

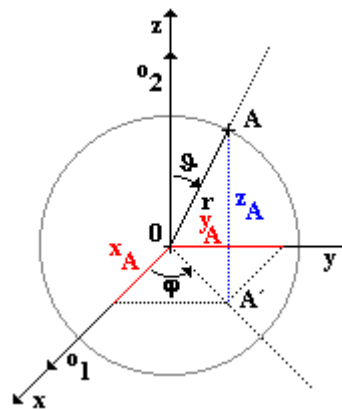
3. velikostí orientovaného úhlu  $\vartheta$ , který svírá polopřímka  $OA$  s přímkou  $o_2$ ; úhel  $\vartheta$  je z intervalu  $\langle 0; \pi \rangle$

„Speciality“ sférických souřadnic:

1.  $r = konst.$  - získáme body, které leží na soustředných kulových plochách se středem v počátku  $O$
2.  $\varphi = konst.$  - získáme body, které leží v polorovinách, jejichž hraničními přímkami je přímka  $o_2$
3.  $\vartheta = konst.$  - získáme body, které leží na rotačních kuželových plochách s vrcholem v počátku  $O$  a s osou splývající s přímkou  $o_2$



obr. 8



obr. 9

Chceme-li nyní vyjádřit souřadnice bodu  $A = [r; \varphi; \vartheta]$  v kartézské soustavě souřadnic, tj. určit  $A = [x; y; z]$ , je možné postupovat podle obr. 9. Z tohoto obrázku je možné určit  $x$ -ovou,  $y$ -ovou a  $z$ -ovou souřadnici libovolného bodu. Nejprve je třeba určit vzdálenost počátku  $O$  sférických souřadnic od průmětu daného bodu do roviny polárních souřadnic, tj. do roviny  $xy$  (na obrázku se jedná o průmět bodu  $A$  - bod  $A'$ ). Tato vzdálenost je  $|OA'| = |OA| \sin \vartheta = r \sin \vartheta$ . Nyní je možné již určit  $x$ -ovou souřadnici daného bodu:  $x = |OA'| \cos \varphi = r \sin \vartheta \cos \varphi$ . Analogicky pro  $y$ -ovou souřadnici dostáváme:  $y = |OA'| \sin \varphi = r \sin \vartheta \sin \varphi$ . Souřadnice  $z$  je nejjednodušší:  $z = r \cos \vartheta$ .

Zpětný převod, tj. převod ze souřadnic kartézských do sférických vyplývá rovněž z obr. 9. Platí:  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Úhel  $\varphi$  z intervalu  $\langle 0; 2\pi \rangle$  lze určit na základě platnosti těchto dvou vztahů:

$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  a  $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Konečně pro úhel  $\vartheta$  z intervalu  $\langle 0; \pi \rangle$  platí následující podmínky,

z nichž je možné úhel  $\vartheta$  určit:  $\sin \vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,  $\cos \vartheta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  a

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

*Poznámka:* V případě, že by kartézský systém byl levotočivý, dojde k záměně  $x$ -ové a  $y$ -ové souřadnice.

## 1.6 Transformace kartézského systému souřadnic

Nejběžněji používaným systémem souřadnic a nejjednodušším na výpočty je kartézský systém souřadnic (viz odstavec 1.5.1). Někdy je též účelné systém souřadnic transformovat tak, aby lépe vyhovoval řešení dané úlohy. Výklad provedeme pouze pro kartézský systém souřadnic. Ten je možné transformovat:

1. **posunutím** - posunutím celého systému souřadnic tak, že počátek soustavy souřadnic přejde do bodu o souřadnicích  $[x_0; y_0]$
2. **otočením** - otočení kolem daného bodu (v nejjednodušším případě kolem počátku kartézského systému souřadnic) o úhel  $\alpha$

### 1.6.1 Kartézský systém souřadnic v rovině

Kartézský systém souřadnic v rovině je dán dvěma navzájem kolmými osami  $x$  a  $y$  a počátkem  $O$ : hovoříme o kartézském systému souřadnic  $Oxy$ .

#### 1.6.1.1 Posunutí

Při posunutí přechází kartézský systém souřadnic  $Oxy$  na systém souřadnic  $Ox'y'$  jak je ukázáno na obr.

10.

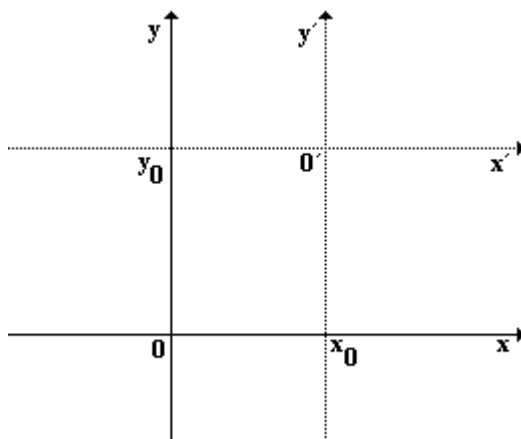
Při přechodu od kartézského systému  $Ox'y'$  ke kartézskému systému  $Oxy$  platí následující transformační vztahy:  $x = x' + x_0$  a  $y = y' + y_0$ .

Při přechodu od nečárkovaného systému k čárkovanému systému platí vztahy, které z předchozích získáme jednoduchou matematickou úpravou:  $x' = x - x_0$  a  $y' = y - y_0$ .

Bod o souřadnicích  $[x_0; y_0]$  (v nečárkovaném systému souřadnic) určuje bod, do kterého se posunul počátek čárkovaného systému souřadnic.

S využitím maticového počtu (viz odstavec 1.3) je možné výše uvedené transformační vztahy vyjádřit takto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ resp. } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$



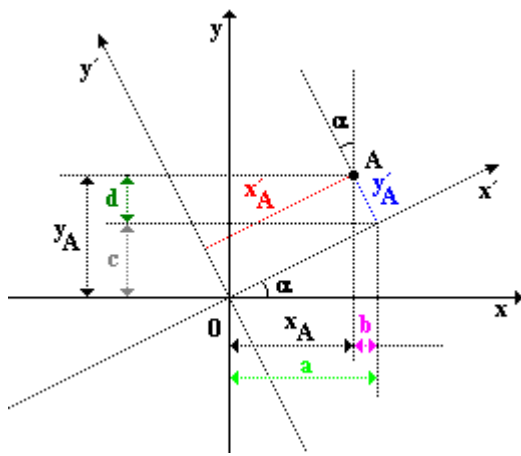
obr. 10

### 1.6.1.2 Otočení

Otočení kartézského systému souřadnic kolem daného bodu je operace složitější. Nicméně i zde platí relativně jednoduché vztahy, které je možné odvodit z obr. 11.

Bod  $A$  má v čárkované soustavě souřadnic (tj. v té, která byla oproti nečárkované soustavě otočena o úhel  $\alpha$  v kladném smyslu) souřadnice  $A = [x'_A; y'_A]$ . Tentýž bod má v nečárkované (původní) soustavě souřadnic souřadnice  $A = [x_A; y_A]$ . Z obr. 11 je vidět, že pro  $x$ -ové souřadnice platí:  $x_A = a - b = x'_A \cos \alpha - y'_A \sin \alpha$ . Analogicky pro  $y$ -ové souřadnice lze psát:  $y_A = c + d = x'_A \sin \alpha + y'_A \cos \alpha$ .

Je tedy možné napsat transformační rovnice při přechodu od čárkované soustavy souřadnic k nečárkované:  $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$  a  $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$ . Tyto transformační rovnice je možné zapsat s využitím matic (viz odstavec 1.3):  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .



obr. 11

Matice, která vystupuje v právě zformulovaném zápisu, tj. matice  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  bývá v algebře nazývána matice přechodu od jedné soustavy souřadnic k jiné. Ve skutečnosti se jedná o matici přechodu od jedné báze k bázi druhé, ale v tomto speciálním případě je možné hovořit jen o souřadnicích. Není to zcela přesné, ale postačující. Podrobněji je o bázích pojednáno v odstavci 1.2.2.

Při hledání inverzní transformace (tedy transformaci, která odpovídá přechodu od nečárkovaných k čárkovaným souřadnicím) je možné postupovat trojím způsobem:

1. zopakovat právě provedené odvození s drobnějšími úpravami
2. využít maticového zápisu transformačního vztahu a k matici přechodu najít matici inverzní
3. při záměně souřadnic  $x$  a  $y$  za souřadnice  $x'$  a  $y'$  nahradit úhel  $\alpha$  úhlem  $-\alpha$  a uvědomit si, že funkce sinus je lichá, zatímco funkce kosinus sudá

Vzhledem k tomu, že odvozování z obrázku by bylo hodně podobné, jako odvození ukázané, a záměna úhlu za úhel opačný je velmi triviální, použijeme druhý způsob: najdeme inverzní matici k matici  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  s využitím znalostí z odstavce 1.3.1. Tento způsob volíme proto, abychom si uvědomili použitelnost inverzních matic a zopakovali si jejich výpočet.

**Příklad:** Najděte inverzní matici k matici  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

**Řešení:** Použijeme metodu pomocí jednotkové matice:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 1 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|cc} \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|cc} \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right) \approx$$

$$\approx \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 & 0 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 0 & 1 - \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 0 & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \end{array} \right) \approx$$

$$\approx \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ 1 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right). \text{ Tedy inverzní matice k matici } \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ je matice}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Nyní je možné napsat transformační rovnici pro přechod od nečárkovaných souřadnic k čárkovaným:  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Zjistit, jak budou vypadat rovnice pro  $x'$  a  $y'$  je již triviální - stačí provést naznačené násobení dvou matic a dostaneme:  $x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$  a  $y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$ .

Následující příklad ukazuje, kde je možné se s tímto typem transformace soustavy souřadnic setkat.

**Příklad:** Napište obecnou rovnici elipsy, která má tyto vlastnosti: střed elipsy je v počátku soustavy souřadnic, její hlavní osa svírá s osou  $x$  úhel  $30^\circ$ , délka hlavní poloosy je 5 a délka vedlejší poloosy je 3.

**Řešení:** Než napíšeme obecnou rovnici elipsy v souřadnicích  $x$  a  $y$ , nejprve vyřešíme jednodušší úlohu: napíšeme rovnici elipsy v souřadnicích  $x'$  a  $y'$ , přičemž osa  $x'$  svírá s osou  $x$  požadovaný úhel  $30^\circ$ . Jinými slovy: v soustavě souřadnic  $Ox'y'$  leží hlavní poloosa v ose  $x'$ . Takovou elipsu ale není problém popsat obecnou

rovnici. Vyjdeme z rovnice středové, kterou pak upravíme na obecný tvar:  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2 \Rightarrow b^2 x'^2 + a^2 y'^2 - a^2 b^2 = 0$ . Po dosazení:  $9x'^2 + 25y'^2 - 225 = 0$ .

Nyní chceme napsat rovnici této elipsy v soustavě  $Oxy$ . K tomu budeme potřebovat transformační vztahy  $x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$  a  $y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$ . Ty nyní dosadíme do odvozené rovnice elipsy:

$$b^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + a^2 (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 - a^2 b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$b^2 x^2 \cos^2 \alpha + 2b^2 xy \sin \alpha \cos \alpha + b^2 y^2 \sin^2 \alpha + a^2 x^2 \sin^2 \alpha - 2a^2 xy \sin \alpha \cos \alpha + a^2 y^2 \cos^2 \alpha - a^2 b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha) + y^2 (b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha) + 2xy (b^2 - a^2) \sin \alpha \cos \alpha - a^2 b^2 = 0.$$

Už nyní je vidět, že v obecné rovnici elipsy přibyl navíc člen, který obsahuje součin  $xy$ . Po dosazení hodnot ze zadání dostaneme:

$$x^2 (9 \cos^2 30^\circ + 25 \sin^2 30^\circ) + y^2 (9 \sin^2 30^\circ + 25 \cos^2 30^\circ) + 2xy (9 - 25) \sin 30^\circ \cos 30^\circ - 225 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 \left( 9 \cdot \frac{3}{4} + 25 \cdot \frac{1}{4} \right) + y^2 \left( 9 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{3}{4} \right) + 2xy (9 - 25) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 225 = 0 \Rightarrow 52x^2 + 84y^2 - 32\sqrt{3}xy - 900 = 0 \Rightarrow$$

$$13x^2 + 21y^2 - 8\sqrt{3}xy - 225 = 0.$$

Obecná rovnice elipsy, která vyhovuje zadání, má tedy tvar  $13x^2 + 21y^2 - 8\sqrt{3}xy - 225 = 0$ .

### 1.6.1.3 Posunutí a otočení

Transformace uvedené v odstavcích 1.6.1.1 a 1.6.1.2 je možné kombinovat. Složená transformace nemusí být obecně komutativní, nicméně je možné odvodit transformační vztahy v konkrétním případě na základě pořadí skládání transformací.

V případě použití maticového zápisu pro otočení, je možné vztahy odvozovat velice lehce. Je třeba jen dávat pozor na prováděné matematické operace a na pořadí jednotlivých transformací:

1. posunutí a pak otočení:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  resp.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

2. otočení a pak posunutí:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' + x_0 \\ y' + y_0 \end{pmatrix}$  resp.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

## 1.6.2 Kartézský systém souřadnic v 3D prostoru

Kartézský systém souřadnic v prostoru je dán třemi navzájem kolmými osami  $x$ ,  $y$  a  $z$ , které se protínají v jednom bodě - tzv. počátku  $O$ : hovoříme o kartézském systému souřadnic  $Oxyz$ .

### 1.6.2.1 Posunutí

Při posunutí přechází kartézský systém souřadnic  $Oxyz$  na systém souřadnic  $Ox'y'z'$ . Situace je analogická jako při posunutí kartézského systému souřadnic v rovině (viz odstavec 1.6.1.1).

Při přechodu od kartézského systému  $Ox'y'z'$  ke kartézskému systému  $Oxyz$  platí následující transformační vztahy:  $x = x' + x_0$ ,  $y = y' + y_0$  a  $z = z' + z_0$ .

Při přechodu od nečárkovaného systému k čárkovanému systému platí vztahy, které z předchozích získáme jednoduchou matematickou úpravou:  $x' = x - x_0$ ,  $y' = y - y_0$  a  $z' = z - z_0$ .

Bod o souřadnicích  $[x_0; y_0; z_0]$  (v nečárkovaném systému souřadnic) určuje bod, do kterého se posunul počátek čárkovaného systému souřadnic.

S využitím matic (podrobněji o maticích je pojednáno v odstavci 1.3) je možné právě uvedené transformační vztahy vyjádřit takto: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ resp. } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

### 1.6.2.2 Otočení

Otočení kartézské soustavy  $Oxyz$ , při kterém přejde na soustavu  $Ox'y'z'$ , je náročné na představu i na správné zakreslení. Proto vztahy, které toto otočení popisují nebudeme odvozovat, ale pouze napíšeme jejich výslednou podobu.

Při přechodu od kartézského systému  $Ox'y'z'$  ke kartézskému systému  $Oxyz$  resp. od kartézského systému  $Oxyz$  ke kartézskému systému  $Ox'y'z'$ , platí následující transformační vztahy:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 & \text{resp.} & & x' &= x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 \\ y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 & & & y' &= x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 \\ z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 & & & z' &= x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3, \end{aligned}$$

kde

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  jsou velikosti úhlů, které svírá kladná poloosa  $x'$  s kladnými poloosami  $x, y, z$ ;

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  jsou velikosti úhlů, které svírá kladná poloosa  $y'$  s kladnými poloosami  $x, y, z$ ;

$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  jsou velikosti úhlů, které svírá kladná poloosa  $z'$  s kladnými poloosami  $x, y, z$ .

Hodnoty uvedených devíti úhlů nejsou samozřejmě nezávislé. Platí následující vztahy (další je možné získat cyklickou záměnou):

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 &= 1 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 &= 0 \\ \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 &= 1 & \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 &= 0 \end{aligned}$$

S využitím maticového počtu (o kterém je detailně pojednáno v odstavci 1.3) je možné právě uvedené transformační vztahy přepsat ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ resp. } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tato transformace je nesmírně důležitá pro zavedení tenzorů.

## 1.7 Matematické vyjadřování a zanedbávání

### 1.7.1 Matematické vyjádření slovního projevu

Ve fyzice se většina zákonů, které popisují určité jevy, vyjadřuje pomocí matematického zápisu (vztahu). U některých zákonů nebude třeba důležité přesné znění vztahu (nebo přesné znění je natolik matematicky komplikované a náročné na složitější partie matematiky, že není možné je zde uvést), ale bude zajímavé uvědomit si, na čem zkoumaná veličina závisí. Proto je dobré seznámit se s následujícími formulacemi:

1. veličina  $a$  závisí přímo úměrně na veličině  $b$  ( $a$  je přímo úměrné  $b$ ) - znamená, že s tím, jak roste (lineárně) veličina  $b$ , roste také lineárně  $a$ . Skutečnost, že veličina  $a$  je přímo úměrná veličině  $b$ , je možné zapsat tímto zápisem:  $a \approx b$  (např. obvod čtverce je přímo úměrný délce jeho strany - čím delší je strana čtverce, tím je větší i jeho obvod; ...).
2. veličina  $a$  je nepřímo úměrná veličině  $b$  - znamená, že s rostoucím  $b$   $a$  klesá (nebo naopak), čili čím větší  $b$ , tím menší  $a$ . Jako příklad lze uvést skupinu dělníků, kteří mají postavit dům: čím více bude dělníků, tím menší čas budou potřebovat na stavbu domu.

- konstantou úměrnosti mezi veličinou  $a$  a  $b$  je  $k$  - znamená, že veličinu  $a$  lze zapsat takto:  $a = kb$  (např. konstantou úměrnosti mezi obvodem kruhu a jeho průměrem je  $\pi$ , ...).
- veličina  $a$  je úměrná čtverci (druhé mocnině) veličiny  $b$  - znamená, že roste-li veličina  $b$  lineárně, roste veličina  $a$  jako druhá mocnina. Veličinu  $a$  lze v tomto případě zapsat zápisem:  $a = kb^2$  (např. obsah kruhu je úměrný druhé mocnině poloměru s konstantou úměrnosti  $\pi$ , ...).
- veličina  $a$  je úměrná  $n$ -té mocnině veličiny  $b$  - lze chápat tak, že roste-li veličina  $b$  lineárně, roste veličina  $a$  jako  $n$ -tá mocnina. Zápis veličiny  $a$ :  $a \approx b^n$  nebo  $a = kb^n$ . Přírodní zákony světa, v němž žijeme, jsou takové, že jen malá část veličin závisí na větší mocnině než 2 resp. 3.

### 1.7.2 Přibližné vztahy aneb co lze zanedbat

Ve fyzice se často postupuje tak, že z jednoho vztahu (zákona) se na základě dalšího zkoumání příslušného jevu odvozují vztahy, které popisují složitější vlastnosti daného jevu. Při odvozování některých závislostí se občas stane, že některé veličiny jsou natolik malé, že výsledek ovlivní velice nepatrně. Takové veličiny pak můžeme zanedbat a výpočet (i příslušný vzorec) si tak zjednodušit. Je ovšem nutno přihlížet, ne k tomu, jak je zanedbávaná veličina velká (resp. malá), ale k tomu, jak je velká (resp. malá) **vzhledem** k jiné veličině (konstantě). Populárně řečeno: „Je třeba dát pozor, abychom nevyklili vaničku i s dítětem“, tj. abychom nezanedbali něco, do zanedbat nelze.

Přibližné vztahy, které mnohdy usnadní výpočet, uvádíme spolu s jejich odvozením. Všechny uvedené vztahy platí pro  $|\varepsilon| \ll 1$ :

- $(1 \pm \varepsilon)^2 = 1 \pm 2\varepsilon + \varepsilon^2 \doteq 1 \pm 2\varepsilon$
- $\frac{1}{1 \pm \varepsilon} = \frac{1}{1 \pm \varepsilon} \cdot \frac{1 \mp \varepsilon}{1 \mp \varepsilon} = \frac{1 \mp \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \doteq \frac{1 \mp \varepsilon}{1} = 1 \mp \varepsilon$
- $\sqrt{1 \pm \varepsilon} \doteq \sqrt{1 \pm \varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(1 \pm \frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \left|1 \pm \frac{\varepsilon}{2}\right|$

### 1.7.3 Zjednodušení matematických výrazů

V matematice (a hlavně pak v jejích aplikacích jako je fyzika, elektrotechnika, ...) se často používají následující zjednodušení matematických zápisů.

#### 1.7.3.1 Kroneckerův symbol

Pro zkrácení některých typů zápisů se používá tzv. Kroneckerův symbol  $\delta_{ij}$ , který je definován takto:

- $\delta_{ij} = 0$ , jestliže  $i \neq j$
- $\delta_{ij} = 1$ , jestliže  $i = j$

**Příklad:** V kartézské soustavě souřadnic jsou dány tři vektory:  $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$  a  $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$ . Určete skalární součin libovolných dvou těchto vektorů.

**Řešení:** Podle zadání vektorů je zřejmé, že se jedná o vektory, které leží postupně na osách  $x$ ,  $y$  a  $z$  kartézského systému souřadnic a jejichž velikost je 1. Uvažované vektory jsou tedy vzájemně kolmé (a tím pádem lineárně nezávislé), takže tvoří bázi kartézské soustavy souřadnic (o bázi podrobněji v odstavci 1.2.2). Pro jejich skalární součin bude platit: skalární součin dvou stejných vektorů (podle definice z odstavce 1.8.1) bude 1, zatímco skalární součin dvou různých vektorů bude nulový (vektory jsou vzájemně kolmé). To je možné pomocí právě zavedeného symbolu zapsat takto:  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ .

Právě uvedený příklad byl poměrně jednoduchý, nicméně v řadě situací Kroneckerův symbol značně ulehčí zápis.

Kroneckerův symbol je vlastně jednotkový tenzor druhého řádu (viz detailně odstavce 1.12.3.3).

#### 1.7.3.2 Levi-Civítův symbol

Jedná se o další symbol, který (stejně jako Kroneckerovo delta - viz odstavce 1.7.3.1) může řadu příkladů zjednodušit. Vzhledem k tomu, že se opět (jako u Kroneckerova delta) jedná o tenzor, je tento symbol (tenzor) vysvětlen až v odstavci 1.12.4.

#### 1.7.3.3 Einsteinovo sumační pravidlo

Dříve než přistoupíme k vysvětlení Einsteinova sumačního pravidla, je třeba se zmínit o sumě a vysvětlit její matematické použití.

Pojem „suma“ (jak nabízí i praktické používání tohoto slova - zejména ve spojení s financemi) se týká součtu. Konkrétně pomocí sumy je možné zkrátit zápis některých výrazů:

1. Součet všech přirozených čísel od jedné do sta. Místo standardního zápisu  $1+2+3+\dots+100$  můžeme použít zápis pomocí sumy:  $\sum_{i=1}^{100} i$ , který čteme „suma  $i$  pro  $i$  od jedné do sta“.
2. Definice skalárního součinu dvou vektorů  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$  a  $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$  lze místo zápisu  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$  zjednodušit zápisem  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$ , který se čte: „suma  $u_i v_i$  pro  $i$  od jedné do tří“.
3. ...

Už samo použití sumačního znaménka je výrazným zkráceným zápisem daného matematického výrazu. Albert Einstein přišel s dalším zkrácením. Ve fyzice se většinou pracuje v třírozměrném kartézském systému souřadnic a proto se tedy často vyskytuje zápis, v němž vystupují výrazy  $\sum_{i=1}^3 x_{ii}$ ,  $\vec{e}_i$  pro  $i=1, 2, 3, \dots$ . Proto zavedl Einstein následující pravidla, která se souhrnně označují jako Einsteinovo sumační pravidlo:

1. každý index, který se v jednočlenu příslušného výrazu vyskytuje pouze **jednou**, může nabývat hodnot 1, 2, 3; př. výrazem  $x_i$  se rozumí trojice  $x_1, x_2, x_3$ ; zápisem  $x_{ij}$  se rozumí skupina veličin  $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}; \dots$
2. vyskytne-li se v jednočlenu výrazu též index **dvakrát**, rozumí se tím sčítání od 1 do 3; př. výrazem  $x_{ii}$  se rozumí zápis  $\sum_{i=1}^3 x_{ii} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ ; zápisem  $x_i y^j z_k$  se rozumí výraz

$$\sum_{i=1}^3 x_i y^i z_k = z_k \sum_{i=1}^3 x_i y^i = z_k (x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3); \dots$$

## 1.8 Součiny s vektory: pravidlo pravé ruky

Ve fyzice se používají i vektorové fyzikální veličiny. V rámci běžného studia fyziky se skutečnost, že daná fyzikální veličina je vektorová, projeví v jejím zobrazení („úsečka se šipkou“), v možnosti získání záporného výsledku při počítání (to pak znamená, že byla nakreslena opačně, než vyžadovala situace), ... (Skoro) nikdy se ale nevyužívá tento vektor při odvozování dalších různých vztahů. Důvodem je, že fyzika (i v tomto ohledu) předbíhá matematiku. Takže ve fyzice „se to okecá“ a teprve až průhled do matematiky ukáže zajímavé souvislosti.

Nezbytným předpokladem práce s vektory kromě základních operací jako je součet, rozdíl, násobek skalárním číslem a rozklad do dvou daných směrů je i znalost skalárního a vektorového součinu.

### 1.8.1 Skalární součin

**D: SKALÁRNÍ SOUČIN**  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  DVOU NENULOVÝCH VEKTORŮ  $\vec{u}$  A  $\vec{v}$  JE REÁLNÉ ČÍSLO  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$ , KDE  $\varphi$  JE ÚHEL SEVRĚNÝ UVAŽOVANÝMI VEKTORY. JE-LI ALESPŮŇ JEDEN Z VEKTORŮ NULOVÝ, DEFINUJEME  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

Jsou-li vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  definované v rovině a mají-li souřadnice  $\vec{u} = (u_x; u_y)$  a  $\vec{v} = (v_x; v_y)$ , je možné skalární součin těchto dvou vektorů vyjádřit ve tvaru  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$ .

Analogická je situace i pro dva vektory v prostoru - jen se přidá další souřadnice. Vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  pak mají souřadnice  $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$  a  $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$  a jejich skalární součin je možné vyjádřit ve tvaru  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$ .

Na základě definičního vztahu skalárního součinu je možné i určovat kolmost dvou nenulových vektorů. Skalární součin dvou vektorů je nulový v těchto případech:

1. alespoň jeden z vektorů je nulový (tj. alespoň jeden z vektorů má velikost 0)
2.  $\cos \varphi = 0$  - to ale znamená, že  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (vzhledem k tomu, že se jedná o úhel dvou vektorů nemá smysl uvažovat další řešení, protože úhel sevřený dvěma vektory leží v intervalu  $\langle 0; \pi \rangle$ )

Budou-li tedy dva vektory nenulové a přesto jejich skalární součin bude roven nule, znamená to jedno jediné: uvažované vektory svírají úhel  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , tj. jsou vzájemně kolmé.

### 1.8.2 Vektorový součin

Nejen v analytické geometrii v prostoru, ale i ve fyzice je často potřeba najít vektor  $\vec{w}$ , který by byl kolmý ke dvěma vektorům  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  v prostoru, které neleží na jedné přímce (tj. jsou lineárně nezávislé). Přitom

vektor  $\vec{u}$  má souřadnice  $\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$  a vektor  $\vec{v}$  souřadnice  $\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$ . Vektor kolmý k oběma vektorům je možné určit pomocí skalárního součinu. Skalární součin vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{w}$  musí být v tom případě nulový, stejně tak skalární součin vektorů  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$ . Musí tedy platit:  $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$  a zároveň  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ . Má-li vektor  $\vec{w}$  souřadnice  $\vec{w} = (w_x; w_y; w_z)$ , je možné skalární součiny rozepsat takto:

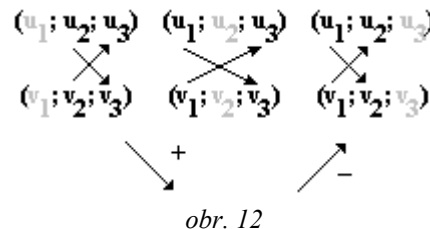
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0 \\ v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_x u_x w_x + v_x u_y w_y + v_x u_z w_z = 0 \\ -u_x v_x w_x - u_x v_y w_y - u_x v_z w_z = 0 \end{array} \right\} \oplus \Rightarrow$$

$$w_y (u_y v_x - u_x v_y) + w_z (u_z v_x - u_x v_z) = 0.$$

Poslední rovnice (o dvou neznámých  $w_y$  a  $w_z$  je splněna, např. pokud  $w_y = u_z v_x - u_x v_z$  a  $w_z = -u_y v_x + u_x v_y$ . Dosazením do rovnice  $u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0$  je možné určit  $w_x$  takto:  $w_x = u_y v_z - u_z v_y$ .

Hledaný vektor  $\vec{w}$  má tedy souřadnice:  $\vec{w} = (u_y v_z - u_z v_y; u_z v_x - u_x v_z; u_x v_y - u_y v_x)$ .

*Poznámka:* Jak určit souřadnice vektorového součinu, je možné si pamatovat podle následující pomůcky dle obr. 12. První souřadnici získáme na základě druhých a třetích souřadnic vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ , druhou na základě prvních a třetích a třetí na základě prvních a druhých. Vynásobíme souřadnice, které jsou spojené šipkou zleva doprava a od tohoto součtu odečteme součin souřadnic spojených šipkou zprava doleva. Pouze u druhé souřadnice výsledného vektoru změnímme znaménko.



obr. 12

Vektorový součin dvou vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  neležících na přímce je vektor  $\vec{w}$ , který má tyto vlastnosti:

- vektor  $\vec{w}$  je kolmý k oběma vektorům  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$
- směr vektoru  $\vec{w}$  je možné určit podle **pravidla pravé ruky**: Položíme-li pravou ruku do roviny, v níž leží vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  tak, že pokrčené prsty této ruky směr otáčení, které převede vektor  $\vec{u}$  na vektor  $\vec{v}$  (v nejkratším směru, tj. vnitřkem konvexního úhlu, který vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  svírají), ukáže vztyčený palec směr výsledného vektoru  $\vec{w}$ . Další podrobnosti o pravidlu pravé ruky viz odstavec 1.8.3.
- pro velikost vektoru  $\vec{w}$  platí:  $|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \alpha$ , kde  $\alpha$  je úhel vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$
- velikost vektorového součinu dvou vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  je číselně rovna obsahu rovnoběžníka určeného vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ . Pokud totiž bude jedna strana rovnoběžníka dána např. vektorem  $\vec{u}$ , pak výraz  $|\vec{v}| \sin \alpha$  udává délku výšky na stranu  $\vec{u}$ . (Analogické je vysvětlení i pro případ záměny vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ )

Vektorový součin  $\vec{w}$  vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  se značí  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ .

Při zjišťování vektorového součinu dvou vektorů (jak souřadnic, tak směru pomocí pravidla pravé ruky), je třeba dávat pozor na pořadí vektorů. Vektorový součin totiž **není komutativní**. Platí:  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ .

### 1.8.3 Pravidlo pravé ruky

Fyzikální veličiny, u nichž potřebujeme znát kromě číselné hodnoty příslušné veličiny i jejich směr, jsou reprezentovány vektory. Vystupuje-li v jednom zákonu (rovnici) více vektorových veličin, pak se může (a nemusí) stát, že výsledná veličina bude opět vektor, a v tom případě je nutno určit její směr. U veličin (vektorů), které jsou vyjádřeny pomocí vektorového součinu (viz odstavec 1.8.2) dvou jiných vektorových fyzikálních veličin, postupujeme při určování směru veličiny výsledné podle pravidla **pravé ruky** (pravotočivého šroubu):

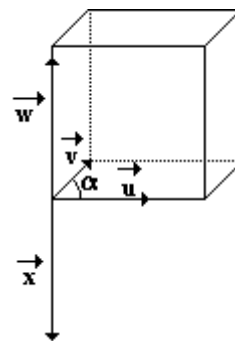
Naznačíme-li uchopení obou vektorů do pravé ruky tak, jako bychom prsty pravé ruky chtěli dva zadané vektory „zmáčknout“ k sobě, ukáže odtažený palec směr výsledného vektoru. (Pro správnou představu „zmáčknutí“ vektorů, je nutno si tyto vektory pomyslně posunout tak, aby měli společný počátek.)

Uvažujme dva vektory (resp. dvě vektorové fyzikální veličiny)  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  z obr. 13, které definují vektor  $\vec{w}$  tímto způsobem:  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ . Provést u nich pomyslné zmáčknutí nebude těžké, neboť vektory mají společný počátek. Dostáváme tedy směr vektoru  $\vec{w}$  svisle vzhůru. V případě, že bychom uvažovali vektor  $\vec{x}$  ve tvaru  $\vec{x} = \vec{v} \times \vec{u}$ , dostaneme vektor  $\vec{x}$  v opačném směru, než je směr vektoru  $\vec{w}$  (což je v pořádku - viz vlastnosti vektorového součinu v odstavci 1.8.2).



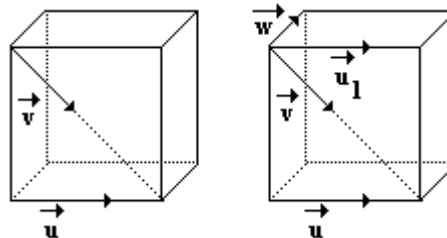
Nyní budeme uvažovat vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  takové, které nemají společný počátek (situaci lze sledovat na obr. 14). A opět chceme určit směr vektoru  $\vec{w}$  definovaného vztahem  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ . Abychom mohli lépe aplikovat pravidlo pravé ruky, přeneseme si vektor  $\vec{u}$  do stejného počátku jako má vektor  $\vec{v}$ . Nyní již určíme opět jednoduše směr vektoru  $\vec{w}$  - pomocí pravidla pravé ruky aplikovaného na vektory  $\vec{u}_1$  a  $\vec{v}$ .

Ve fyzice se vyskytuje celá řada fyzikálních veličin, jejichž směr se určuje právě na základě pravidla pravé ruky - moment síly, směr síly působící na vodič s proudem, ...



obr. 13

**Poznámka:** V matematice je možné vektory libovolně posouvat jednak po vektorových přímkách, na nichž leží, ale také je přenášet na libovolné rovnoběžky. Tato druhá pomocná konstrukce má však ve fyzice jisté omezení: budeme-li chtít například vektorově sčítat dvě různoběžné síly, které nemají společné působíště, změníme posunutím jedné síly na rovnoběžku procházející počátkem druhé síly moment této síly. Pro získání směru vektoru, který je výsledkem vektorového součinu dvou vektorů, lze tuto konstrukci pomyslně provést s tím, že počátek vektoru určíme správně na základě fyzikálních znalostí s ohledem na to, o jakou fyzikální veličinu se bude konkrétně jednat.



obr. 14

#### 1.8.4 Smíšený součin

**D: SMÍŠENÝM SOUČINEM** TŘÍ VEKTORŮ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  A  $\vec{c}$  SE ROZUMÍ SE ROZUMÍ ČÍSLO  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ .

Smíšený součin tří vektorů, které mají souřadnice  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  a  $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$ , je

možné vyjádřit takto:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ . O platnosti tohoto tvrzení je možné se přesvědčit „odzadu“, tj.

začít upravovat výsledný determinant - a to rozvojem dle prvního řádku (viz odstavec 1.4.2.2), čímž dostaneme:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad (\text{nyní jsme použili vlastnost determinantu, kdy při záměně dvou sloupců se mění znaménko determinantu}).$$

V úpravách pokračujeme určením determinantů druhých stupňů (viz podrobněji odstavec 1.4.1):  $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$ .

Srovnáme-li nyní výrazy v závorkách se souřadnicemi vektorového součinu vektorů  $\vec{b}$  a  $\vec{c}$  (podle definice vektorového součinu v odstavci 1.8.2) a uvědomíme si, jak je definovaný skalární součin dvou vektorů (viz odstavec 1.8.1), je jasné, že poslední výraz je možné přepsat ve tvaru  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ .

Geometrická interpretace smíšeného součinu je následující: absolutní hodnota smíšeného součinu tří vektorů  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  a  $\vec{c}$  je rovna objemu rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany, vycházející z téhož vrcholu, jsou určeny danými vektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  a  $\vec{c}$ . Vyplývá to z geometrické interpretace vektorového součinu (viz odstavec 1.8.2): platí  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| \cos \varphi$  (kde  $\varphi$  je úhel, který svírá vektor  $\vec{a}$  s vektorem  $\vec{b} \times \vec{c}$ ) a přitom  $|\vec{b} \times \vec{c}|$  je roven obsahu základy rovnoběžnostěnu a  $|\vec{a}| \cos \varphi$  je výška daného rovnoběžnostěnu.

#### 1.8.5 Výrazy obsahující směsíci součinů

Vzhledem k tomu, že už byl definován skalární, vektorový i smíšený součin, je možné si říci některé dodatky, které budou využity zejména v odstavci 1.12.6.2, v němž budou zavedeny lineární diferenciální operátory.

Nechť  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  a  $\vec{c}$  jsou tři vektory. Pro jejich „dvojitý vektorový součin“ platí:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ . Toto je ovšem jen jedna z možných variant zápisu, neboť je třeba si uvědomit, že:

1. skalární součin je komutativní - tj. kolem „tečky“ je možné libovolně prohazovat vektory
2. vektorový součin není komutativní - tj. prohození dvou vektorů kolem „křížku“ způsobí změnu znaménka daného vektorového součinu
3. násobek vektoru skalárem je komutativní - tj. prohození skaláru a vektoru kolem „ničeho“ (násobek skaláru a vektoru se píše bez tečky) je seriózní matematická operace, při níž se výsledek nezmění

Právě popsané prohazování může velmi zjednodušit složitější zápisy - zejména u lineárních diferenciálních operátorů (viz odstavec 1.12.6.2).

## 1.9 Komplexní čísla

### 1.9.1 Zavedení komplexních čísel

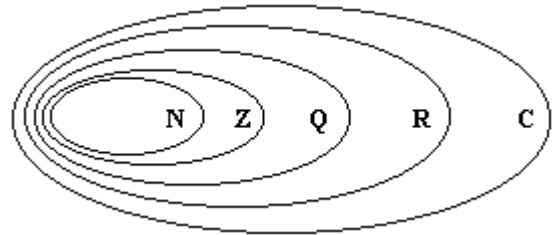
Komplexní čísla se pokusíme zavést tak, aby přirozeným způsobem završila vývoj číselných soustav. Jedná se o vývoj číselných soustav, který je spjatý s vývojem lidské společnosti. První lidské společnosti vystačily se znalostí **čísel přirozených**, protože jediné, co potřebovaly bylo počítat dobytek, počítat úrodu (např. pomocí košů, nádob, ...). S růstem majetkových rozdílů jednotlivých jedinců lidské společnosti došlo k tomu, že někteří měli větší majetek než druzí. Ti bohatší začali ostatním půjčovat - no a pro vyjádření dluhu zcela nutně vyvstala potřeba záporných čísel - vznikla **čísla celá**. S dalším vývojem společnosti bylo zapotřebí zavést i **čísla racionální** (výpočet obsahů pozemků, výpočet daní, ...). S vývojem matematiky přišla potřeba mít čísla, která nešla vyjádřit pomocí zlomku (hodnoty goniometrických funkcí, hodnoty logaritmů, ...), a tak byla zavedena **čísla reálná**.

Shrnuto: umíme najít takový čísel obor, v němž je možné (aniž bychom se s výsledkem dostali do nějakých potíží) sčítat (čísla přirozená), odčítat (čísla celá), dělit (čísla racionální), ale zatím ne všechna čísla umíme odmocňovat (v reálných číslech umíme odmocňovat jen čísla nezáporná).

Už z právě popsaného historického vývoje je zřejmé, že „složitější“ číselný obor je vždy jakousi „nadstavbou“ oboru předešlého, tj. ve „složitějším“ číselném oboru jsou definovány všechny operace, které byly definovány v oboru „jednodušším“, ale zde jsou ještě nějaké operace navíc (viz schématicky obr. 15).

V algebře se všechny číselné obory zavádějí pomocí definic, ale drží se právě zmíněného pravidla - tj. nový („složitější“) číselný obor se definuje vždy na základě oboru předchozího (např. čísla racionální jako podíl dvou nesoudělných čísel celých, z nichž číslo ve jmenovateli je nenulové).

Podobným způsobem se definují i čísla komplexní, tj. pomocí čísel reálných.



obr. 15

**D:** KOMPLEXNÍM ČÍSEM SE NAZÝVÁ VÝRAZ TVARU  $a + bi$ , KDE  $a, b \in \mathbb{R}$  A  $i$  JE ČÍSLO, PRO KTERÉ PLATÍ  $i^2 = -1$ . V KOMPLEXNÍM ČÍSLE  $a + bi$  SE ČÍSLO  $a$  NAZÝVÁ **REÁLNÁ ČÁST**, ČÍSLO  $b$  **IMAGINÁRNÍ ČÁST** A ČÍSLO  $i$  **IMAGINÁRNÍ JEDNOTKA**.

**D:** ZÁPIS KOMPLEXNÍHO ČÍSLA  $Z$  VE TVARU  $a + bi$  SE NAZÝVÁ ALGEBRAICKÝ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA  $Z$ .

Speciální případ nastává pro čísla  $a + bi$ , pro které je  $b \neq 0$  - ta se nazývají **imaginární**, je-li navíc ještě  $a = 0$  nazývají se **ryze imaginární**. Čísla  $a + bi$ , pro které je  $b = 0$ , jsou čísla reálná (ale je možné je řadit i mezi čísla komplexní).

### 1.9.2 Početní operace s komplexními čísly

V množině komplexních čísel jsou definovány početní operace podobně jako v množině čísel reálných:

1. sčítání - pro každá dvě komplexní čísla  $z_1 = a + bi$  a  $z_2 = c + di$  platí:  

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
2. násobení - pro každá dvě komplexní čísla  $z_1 = a + bi$  a  $z_2 = c + di$  platí:  

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

*Poznámka:* Sčítání a násobení komplexních čísel se tedy provádí analogicky jako sčítání a násobení polynomů.

3. opačné číslo - ke každému komplexnímu číslu  $z = a + bi$  existuje číslo  $z'$  tak, že platí:  $z + z' = 0$ ; číslo  $z' = -a - bi$  je číslo opačné k číslu  $z$ .
4. rozdíl  $z_1 - z_2$  komplexních čísel  $z_1, z_2$  je součet čísla  $z_1$  a čísla opačného ke komplexnímu číslu  $z_2$ :  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
5. rovnost dvou komplexních čísel  $a + bi$  a  $c + di$  nastává právě tehdy, když  $a = c \wedge b = d$
6. číslo komplexně sdružené (komplexní číslo sdružené) s číslem  $z = a + bi$  je číslo  $\bar{z} = a - bi$

7. podíl  $\frac{z_1}{z_2}$  komplexních čísel  $z_1$  a  $z_2 \neq 0$  je součin čísla  $z_1$  a čísla převráceného k číslu  $z_2$ .

Výsledkem je opět komplexní číslo, tj. číslo ve tvaru  $a + bi$ . Abychom se k tomuto tvaru dostali,

je doporučeno dělení provádět následujícím postupem:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$ , tj. rozšířit zlomek

komplexně sdruženým číslem  $\bar{z}_2$  k číslu  $z_2$ .

Podíl dvou komplexních čísel je založen na následující vlastnosti komplexních čísel: Součin komplexního čísla  $z$  a čísla  $\bar{z}$  s ním sdruženého je reálné nezáporné číslo, přičemž rovnost  $z \cdot \bar{z} = 0$  nastává pouze pro případ  $z = 0$ .

### 1.9.3 Absolutní hodnota a grafické znázornění komplexních čísel

Další „operací“, kterou známe z čísel reálných je absolutní hodnota. Absolutní hodnota reálného čísla je pojem dobře známý - jedná se vždy o reálné nezáporné číslo. Pojem absolutní hodnoty lze rozšířit i na čísla komplexní. Zatím jediná operace, aplikovaná na komplexní číslo  $z$ , která dává jako výsledek nezáporné reálné číslo, je součin daného komplexního čísla  $z$  a čísla  $\bar{z}$  s ním sdruženého. Tento součin dává:  $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ . Reálná čísla jsou ale zvláštním případem čísel komplexních ( $b = 0$ ), proto by v tomto případě měla být absolutní hodnota čísla komplexního totožná s absolutní hodnotou čísla reálného. Z toho důvodu je třeba ještě „přidat“ odmocninu.

**D: ABSOLUTNÍ HODNOTA KOMPLEXNÍHO ČÍSLA Z JE ČÍSLO  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ .**

Vlastnosti absolutní hodnoty komplexního čísla:

1. Pro  $z \neq 0$  je  $|z| > 0$ , pro  $z = 0$  je  $|z| = 0$ . Pro  $z = a + bi$  je  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

2. Pro libovolná komplexní čísla  $z_1, z_2$  platí:  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ . Je-li navíc  $z_2 \neq 0$ , pak platí:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

**D: KOMPLEXNÍ JEDNOTKA JE KOMPLEXNÍ ČÍSLO, JEHOŽ ABSOLUTNÍ HODNOTA JE ROVNA JEDNÉ.**

Je důležité si uvědomit, že určité operace mají v komplexních číslech (na rozdíl od reálných) jistá omezení:

1. Množinu komplexních čísel  $\mathbb{C}$  nelze na rozdíl od množiny reálných čísel  $\mathbb{R}$  uspořádat podle velikosti, tj. pro komplexní čísla nelze zavést vztah nerovnosti tak, aby splňoval všechny vlastnosti jako u čísel reálných.

2.  $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 = |a|^2$ , v oboru komplexních čísel tato rovnost obecně neplatí.  $\forall z \in \mathbb{C} : z^2 = z \cdot \bar{z}$  a rovnost  $z^2 = |z|^2$  platí jen pro ta komplexní čísla, pro které  $z = \bar{z}$ , tj. čísla reálná. Např. pro  $z = 1 + i$  je  $|z|^2 = 2$ , ale  $z^2 = 2i$ .

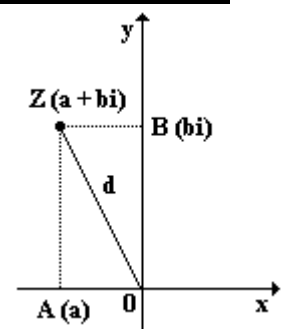
3. V reálných číslech je možné rozložit dvojčlen  $x^2 - y^2$ , ale již ne dvojčlen  $x^2 + y^2$ . V oboru komplexních čísel je ale možné rozložit i tento dvojčlen:  $x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi)$ .

Reálná čísla je možné znázornit na přímce, tj. existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny  $\mathbb{R}$  na množinu bodů přímky. Analogicky existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  na množinu všech bodů roviny, tj. všechny uspořádané dvojice reálných čísel je možné znázornit v rovině. Čísla komplexní lze chápat jako uspořádanou dvojici reálných čísel:  $[a; b] \approx a + bi$ . Komplexní čísla je tedy možné znázornit v rovině.

**D: ROVINA KOMPLEXNÍCH ČÍSEL (GAUSSOVA ROVINA) JE ROVINA, JEJÍŽ BODY POVAŽUJEME ZA OBRAZY KOMPLEXNÍCH ČÍSEL.**

Vzájemné přiřazení komplexních čísel a bodů Gaussovy roviny je zprostředkováno pomocí kartézské soustavy souřadnic  $Oxy$ , na jejíž ose  $x$  jsou zobrazena reálná čísla a na ose  $y$  čísla ryze imaginární. Osa  $x$  se proto nazývá **reálná osa**, osa  $y$  pak **imaginární osa**.

Absolutní hodnota reálného čísla je rovna vzdálenosti jeho obrazu od počátku na číselné ose. Otázkou je, zda tuto vlastnost má také absolutní hodnota čísel komplexních. Uvažujme proto v Gaussově rovině bod  $Z$ , který je obrazem komplexního čísla  $z = a + bi$  a určíme vzdálenost  $d$  tohoto bodu od počátku  $O$  kartézského systému souřadnic. Podle obr. 16 platí:



$$d = |OZ| = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

obr. 16

**Poznámka:** Z právě uvedeného vyplývá, že všechna komplexní čísla  $z$ , která mají tutéž absolutní hodnotu, leží v Gaussově rovině na kružnici se středem v počátku a s poloměrem rovným  $|z|$ .

Absolutní hodnota rozdílu dvou komplexních čísel určuje jejich vzdálenost v Gaussově rovině.

### 1.9.4 Goniometrický tvar komplexních čísel

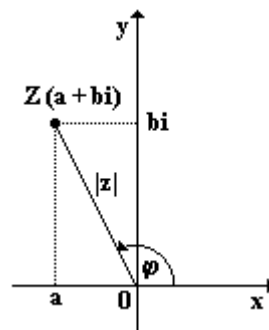
V Gaussově rovině je možné určit obraz  $Z$  libovolného komplexního čísla  $z = a + bi$  pomocí kartézské soustavy souřadnic dvojím způsobem:

1. pomocí souřadnic  $x$  a  $y$  tak, že za  $x$ -ovou souřadnici vezmeme reálnou část komplexního čísla  $z$  a za  $y$ -ovou souřadnici jeho část imaginární
2. pomocí vzdálenosti obrazu  $Z$  od počátku soustavy souřadnic a pomocí velikosti orientovaného úhlu  $\varphi$ , jehož počáteční rameno je kladná poloosa  $x$  a koncové rameno polopřímka  $OZ$

Reálné číslo určující velikost tohoto orientovaného úhlu se nazývá **argument komplexního čísla**  $z$ . Z vlastností orientovaného úhlu plyne: má-li komplexní číslo  $z \neq 0$  argument  $\varphi$ , má též argument  $\varphi + 2k\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Onou zmíněnou vzdáleností obrazu  $Z$  od počátku soustavy souřadnic je absolutní hodnota komplexního čísla  $z$ .

Podle obr. 17 je vidět, že platí:  $\sin \varphi = \frac{b}{|z|} \wedge \cos \varphi = \frac{a}{|z|}$ . Pro komplexní

číslo  $z$  pak dostáváme:  $z = a + bi = |z| \cos \varphi + (|z| \sin \varphi)i = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$



obr. 17

**D: GONIOMETRICKÝ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA**  $z \neq 0$  JE JEHO VYJÁDRĚNÍ VE TVARU:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ KDE } \varphi \text{ JE ARGUMENT KOMPLEXNÍHO ČÍSLA } z.$$

Goniometrický tvar komplexních čísel umožňuje jejich snadné násobení a dělení:

1. Součin libovolných nenulových komplexních čísel  $z_1, z_2$  v goniometrickém tvaru  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  a  $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  je roven komplexnímu číslu  $z = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ .
2. Podíl libovolných nenulových komplexních čísel  $z_1, z_2$  v goniometrickém tvaru  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  a  $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  je roven komplexnímu číslu  $z = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ .

Zobecněním opakovaného násobení tímž číslem (jak v reálných číslech, tak v komplexních) je umocňování. V oboru komplexních čísel dává návod, jakým způsobem umocňovat komplexní čísla zapsaná v goniometrickém tvaru, **Moivreova věta:** Pro každé celé  $n$  a libovolný argument  $\varphi$  platí:

$$[|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

**Poznámka:** Je-li třeba umocnit komplexní číslo v algebraickém tvaru, nejprve jej převedeme na tvar goniometrický, protože umocňovat komplexní čísla v goniometrickém tvaru je díky Moivreově větě snadné.

### 1.9.5 Exponenciální tvar komplexních čísel

Ve fyzice, elektrotechnice a dalších oborech, které pracují s komplexními čísly, je důležité znát další tvar komplexního čísla - exponenciální tvar komplexního čísla. Při jeho odvozování vyjdeme z tzv. **Eulerových vzorců**, které lze odvodit s použitím vyšší matematiky (matematická analýza v komplexním oboru, ...). Eulerovy vzorce vyjadřují vztah mezi eulerovým číslem  $e$  ( $e = 2,7182818 \dots$ ) a argumentem komplexního čísla:

1.  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
2.  $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$

Odtud je možné jednoduše vyjádřit  $\sin \varphi$  a  $\cos \varphi$  takto:  $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$  a  $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ .

Komplexní číslo v goniometrickém tvaru je možné psát ve tvaru  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Po dosazení z právě vyjádřených goniometrických funkcí z Eulerových vzorců dostáváme:

$$z = |z| \left( \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + i \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) = |z| \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} + e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = |z| e^{i\varphi}$$

**D: EXPONENCIÁLNÍ TVAR KOMPLEXNÍHO ČÍSLA**  $z \neq 0$  JE JEHO VYJÁDŘENÍ VE TVARU:  $z = |z|e^{i\varphi}$ , KDE  $\varphi$  JE ARGUMENT KOMPLEXNÍHO ČÍSLA  $Z$ .

## 1.9.6 Kvadratické rovnice řešené v oboru komplexních čísel

Komplexní čísla (jak bylo zmíněno na začátku odstavce o komplexních číslech) jsou čísla, v nichž je možné sčítat, odčítat, násobit, dělit, umocňovat, ale i odmocňovat, aniž bychom museli mít obavu, že se dostaneme k neřešitelnému problému. To znamená, že v oboru komplexních čísel mají řešení všechny kvadratické rovnice. A to i ty, jejichž diskriminant je záporný. Je možné dokázat, že pokud má kvadratická rovnice komplexní kořeny, pak se jedná o komplexní čísla vzájemně komplexně sdružená.

## 1.9.7 Binomické rovnice

Završením povídání o komplexních číslech jsou tzv. binomické rovnice.

**D: BINOMICKOU ROVNICÍ** SE NAZÝVÁ ROVNICE TVARU  $x^n - a = 0$ , KDE  $a$  JE DANÉ KOMPLEXNÍ ČÍSLO,  $x$  NEZNÁMÁ A  $n > 1$  JE ČÍSLO PŘIROZENÉ.

Při řešení této rovnice, tj. při hledání komplexního čísla  $x$  splňující binomickou rovnici, je možné předpokládat, že  $a \neq 0$ . Je totiž zřejmé, že v případě  $a = 0$  má příslušná binomická rovnice pouze jedno řešení, a to  $x = 0$ . Předpoklad nenulovosti  $a$  navíc umožní vyjádřit číslo  $a$  v goniometrickém tvaru:  $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ . Řešením binomické rovnice je komplexní číslo  $x$ , které je možné vyjádřit též v goniometrickém tvaru:  $x = |x|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Binomickou rovnici tedy můžeme psát ve tvaru:  $[|x|(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n - |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 0$ . Pomocí Moivreovy věty jí přepíšeme do tvaru  $|x|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ . Odtud je zřejmé, že daná rovnost platí, pokud  $|x|^n = |a|$  a zároveň  $n\varphi = \alpha + 2k\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Odtud již pro neznámé  $|x|^n$  a  $\varphi$  dostáváme:

$$|x| = \sqrt[n]{|a|} \quad \text{a} \quad \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad \text{takže} \quad \text{komplexní} \quad \text{číslo} \quad x \quad \text{je} \quad \text{možné} \quad \text{psát} \quad \text{ve} \quad \text{tvaru:}$$

$$x = \sqrt[n]{|a|} \left( \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \quad \text{kde} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Na první pohled to vypadá, že právě vyřešená goniometrická rovnice má nekonečně mnoho řešení, neboť  $k \in \mathbb{Z}$ . Vzhledem k periodicitě funkcí sinus a kosinus tomu tak ale není. Všechny různé kořeny binomické rovnice  $x^n - a = 0$  lze získat dosazením za  $k$  pouze čísel  $0, 1, 2, \dots, n-1$ . Při zakreslení kořenů binomické rovnice do Gaussovy roviny zjistíme, že tyto body tvoří vrcholy pravidelného  $n$ -úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a s poloměrem  $\sqrt[n]{|a|}$ .

Kořeny binomické rovnice  $x^n - 1 = 0$  mají tyto vlastnosti:

1. kořeny jsou komplexní jednotky
2. součin libovolných dvou kořenů je opět kořenem této rovnice
3. pro všechna  $k$  platí:  $x_k = x_1^k$

Binomická rovnice je poměrně slušný a přitom jednoduchý nástroj pro vyšetřování pravidelných  $n$ -úhelníků.

## 1.10 Diferenciální počet

Základy diferenciálního a integrálního počtu, který bývá též nazýván počet infinitezimální (latinsky *infinitesimalis* znamená nekonečně malý), vytvořili anglický matematik, fyzik a astronom Isaac Newton (1642 - 1727) a německý matematik, fyzik, filosof, právník a diplomat Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Tato matematická disciplína, která je založena „na nekonečně malých veličinách“, nalezla rychle uplatnění v nastupujícím 18. století, protože měla použití nejen v samotné matematice, ale i v přírodních vědách a technice.

### 1.10.1 Elementární funkce

Vzhledem k tomu, že problematika diferenciálního a integrálního počtu je založena na pojmu funkce, je třeba bezpodmínečně ovládat základní (tzv. elementární) funkce a jejich vlastnosti (graf, transformace grafu v

soustavě souřadnic, definiční obor a obor hodnot, monotonie, ryzí monotonie, omezenost, inverzní funkce, periodická funkce, ...).

Při výpočtu limit, derivací a integrálů se často využívá rovnost funkcí a navíc většina funkcí budou funkce složené, je třeba tyto pojmy upřesnit.

**D: FUNKCE**  $f$  A  $g$  **SE ROVNAJÍ** NA MNOŽINĚ  $M = D(f) \cap D(g)$ , PLATÍ-LI PRO KAŽDÉ  $x \in M$  :  
 $f(x) = g(x)$ .

**D: ŘEKNEME**, ŽE FUNKCE  $h$  JE SLOŽENA ( $h$  JE **SLOŽENÁ FUNKCE**) Z FUNKCÍ  $f$  A  $g$ , PRÁVĚ TEHDY KDYŽ PLATÍ:  $D(h) = \{x \in D(f); f(x) \in D(g)\}$  A  $\forall x \in D(h) : h(x) = g(f(x))$ .  
 FUNKCE  $h$  SE ZNAČÍ SYMBOLEM:  $h = g \circ f$ . SKLÁDÁNÍ FUNKCÍ NENÍ OBECNĚ KOMUTATIVNÍ.

Spolu se základními (elementárními) funkcemi, které jsou známé ze středoškolské matematiky, je třeba znát i jejich grafy (včetně transformace grafu - posunutí po jednotlivých osách kartézského systému, násobky, ...). Přehled základních (elementárních) funkcí:

1. **polynomická:**  $f : y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ , kde  $n \in \mathbb{Z}_0^+$ ,  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$  a  $D(f) = \mathbb{R}$  (jejími zvláštními případy jsou funkce konstantní, lineární a kvadratická)
2. **racionální:**  $f : y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0}$ , jejímž definičním oborem jsou reálná čísla vyjma všech nulových bodů polynomu  $Q_m(x)$  (jejími zvláštními případy jsou nepřímá úměrnost a lineární lomená funkce)
3. **mocninná:**  $f : y = x^n$ , kde
  - a)  $n \in \mathbb{N}$  a  $D(f) = \mathbb{R}$
  - b)  $n \in \mathbb{Z}^-$  a  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
  - c)  $n \in \mathbb{Q}$  a  $D(f) = \mathbb{R}^+$
4. **exponenciální:**  $f : y = a^x$ , kde  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  a  $D(f) = \mathbb{R}$
5. **logaritmická:**  $f : y = \log_a x$ , kde  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  a  $D(f) = \mathbb{R}^+$
6. **goniometrické:**
  - a)  $f : y = \sin x$ , kde  $D(f) = \mathbb{R}$
  - b)  $f : y = \cos x$ , kde  $D(f) = \mathbb{R}$
  - c)  $f : y = \operatorname{tg} x$ , kde  $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$
  - d)  $f : y = \operatorname{cotg} x$ , kde  $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
7. **funkce signum:**  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$ , kde  $D(f) = \mathbb{R}$

## 1.10.2 Limita funkce

### 1.10.2.1 Základní pojmy, zavedení pojmu limita

Pojem limita funkce je důležitým pojmem nejen v oblasti diferenciálního a integrálního počtu, ale v celé matematice vůbec. Na základě limit je možné přesně popsat řadu pojmů a vypočítat řadu údajů, které by zůstaly bez použití limit skryty.

Při vyšetřování limit (a následně i spojitosti) funkce budeme vyšetřovat vlastnosti funkce  $f$  v určitém konkrétním bodě  $a$  ( $a \in D(f)$ ). To ale neznamená jen vypočítat funkční hodnotu v daném bodě (pokud funkční hodnota existuje), ale hlavně zjišťovat, jak se mění funkční hodnoty  $f(x)$  v okolí daného bodu  $a$ . (Tj. jak moc se mění funkční hodnoty, když se budeme k danému bodu blížit zleva a zprava.)

Intuitivní náhled na limity:

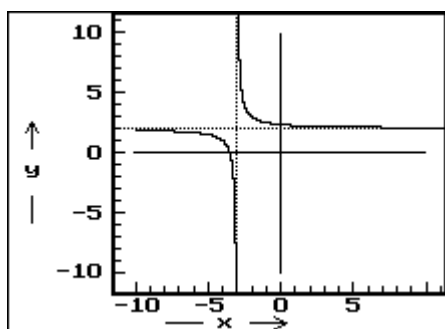
Je dána funkce  $f : y = \frac{1}{x+3} + 2$ . Z obr. 18 je vidět, že:

1. pro velká  $x$  (patřící do definičního oboru) se funkční hodnoty blíží stále více k hodnotě 2, ale nikdy jí nedosáhnou (tj. rovnice  $\frac{1}{x+3} + 2 = 2$  nemá řešení). Proto se říká, že funkční hodnoty se

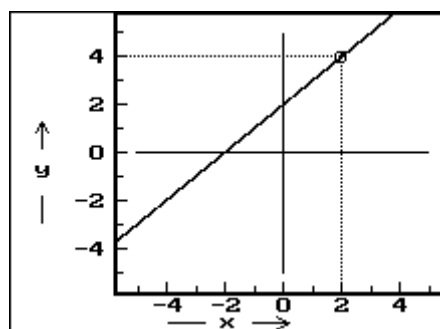
pro velká  $x$  „blíží“ k číslu 2, tj. pro velká  $x$  existuje limita:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x+3} + 2 \right) = 2$ .

2. pro čísla v okolí bodu  $x = -3$  (nepatří do definičního oboru funkce) ale už nedostaneme jednu hodnotu, k níž se blíží funkční hodnoty dané funkce. Budeme-li vyšetřovat ta  $x$  v okolí bodu -3, která jsou větší než -3, budou funkční hodnoty velká kladná čísla. Podíváme-li se ale na čísla v blízkosti bodu  $x = -3$ , která jsou menší než -3, budou funkční hodnoty velká čísla, ale záporná. Tj. pro bod  $x = -3$  se nepodaří nalézt jednu funkční hodnotu: existují tzv. dvě jednostranné limity

(  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \left( \frac{1}{x+3} + 2 \right) = \infty$  a  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \left( \frac{1}{x+3} + 2 \right) = -\infty$  ), ale neexistuje limita oboustranná.



obr. 18



obr. 19

**Ilustrační příklad:** Je dána funkce  $f: y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ . Určete její definiční obor, načrtněte její graf a pokuste se ji „přirozeným způsobem“ dodefinovat v bodech, v nichž není definovaná.

**Řešení:** Definiční obor funkce je  $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ . Na definičním oboru dané funkce je možné předpis funkce  $f$

upravit takto:  $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$  a získáme tak funkci  $g: y = x + 2$ . Funkce  $g$ , která vznikla

úpravou výrazu z funkce  $f$ , má stejný definiční obor jako funkce  $f$ , tj.  $D(g) = D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ . Její graf je znázorněn na obr. 19. Jediným bodem, kde není definovaná je bod 2. Kdybychom ale nevěděli, že funkce  $g$  vznikla úpravou z funkce  $f$ , mohli bychom ji v bodě dva dodefinovat velice snadno:  $g(2) = 2 + 2 = 4$ . Bod o souřadnicích  $[2; 4]$  skutečně leží na grafu funkce  $g$  i  $f$ , ačkoliv v bodě 2 není funkce  $f$  definovaná. Mluvíme tedy o limitě funkce  $f$  v bodě 2.

**Poznámka:** Limitu je třeba chápat jako jakousi „náhražku“: nejde-li funkční hodnota spočítat přímo, podívám se, jak se chovají funkční hodnoty v okolí „problematického bodu“, a dodefinuji ji tak, aby na grafu „nevyčuhovala“.

### 1.10.2.1.1 LIMITA V BODĚ

Nyní následuje několik definic, které jsou nezbytné pro matematické zavedení pojmu limita.

**D: OKOLÍ BODU**  $a$  SE NAZÝVÁ OTEVŘENÝ INTERVAL  $(a - \delta; a + \delta)$ , KDE  $\delta$  JE Kladné REÁLNÉ ČÍSLO. ČÍSLO  $a$  SE NAZÝVÁ STŘED OKOLÍ, ČÍSLO  $\delta$  POLOMĚR OKOLÍ. ZNAČÍ SE  $U(a, \delta)$ .

Někdy se též používá název  $\delta$  okolí bodu  $a$  a patří do něj všechna reálná čísla  $x$ , která vyhovují nerovností  $a - \delta < x < a + \delta$ , tj.  $|x - a| < \delta$ .

**D: LEVÉ OKOLÍ BODU**  $a$  SE NAZÝVÁ POLOUZAVŘENÝ INTERVAL  $(a - \delta; a)$ , KDE  $\delta$  JE Kladné REÁLNÉ ČÍSLO.

Levé okolí bodu  $a$  tvoří tedy všechna reálná čísla  $x$ , která vyhovují nerovností  $a - \delta < x \leq a$ .

**D: PRAVÉ OKOLÍ BODU**  $a$  SE NAZÝVÁ POLOUZAVŘENÝ INTERVAL  $(a; a + \delta)$ , KDE  $\delta$  JE Kladné REÁLNÉ ČÍSLO.

Pravé okolí bodu  $a$  tvoří tedy všechna reálná čísla  $x$ , která vyhovují nerovností  $a \leq x < a + \delta$ .

**D: PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU**  $a$  SE NAZÝVÁ MNOŽINA  $(a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$ , TJ. MNOŽINA  $U(a, \delta) - \{a\}$ .

Tuto množinu tvoří všechna reálná čísla  $x$ , která vyhovují nerovnostem  $a - \delta < x < a$  nebo  $a < x < a + \delta$ , tj.  $0 < |x - a| < \delta$ .

**D: FUNKCE**  $f$  **MÁ V BODĚ**  $a$  **LIMITU**  $L$ , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU OKOLÍ BODU  $L$  EXISTUJE PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  NÁLEŽÍ HODNOTY  $f(x)$  ZVOLENÉMU OKOLÍ BODU  $L$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME VÝRAZEM  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

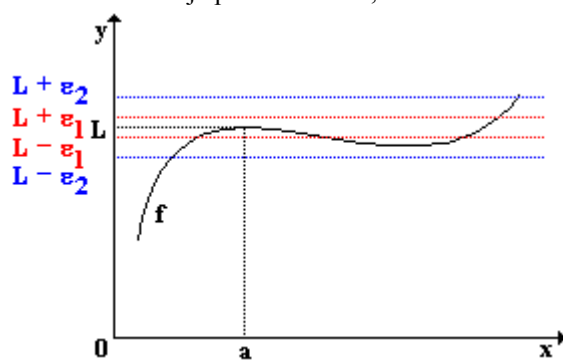
S využitím matematické symboliky je možné definici přepsat: Funkce  $f$  má v bodě  $a$  limitu  $L$ , právě tehdy když  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U(a, \delta) - \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

Poznámka: Zápis  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se čte: „limita funkce  $f(x)$  pro  $x$  blížíící se  $k$  a je rovna  $L$ “.

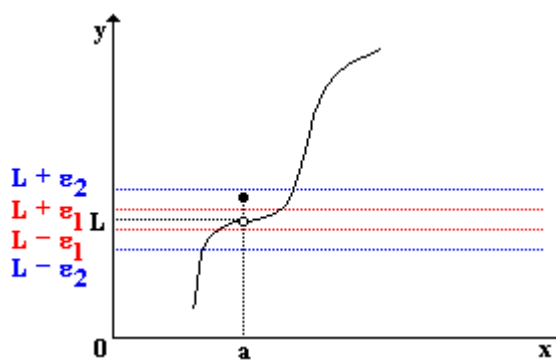
Obsah právě uvedené definice je možné vysvětlit následujícím způsobem. Pokud se podaří uzavřít kolem bodu  $L$  takový interval (pás), že pro každou jeho šířku se funkční hodnoty v okolí bodu  $a$  na ose  $x$  „vejdou“ do tohoto pásu, pak má daná funkce v bodě  $a$  limitu  $L$ . Cílem není najít pás široký - naopak. Snahou je pokusit se najít pás co možná nejužší, aby bylo hledání intervalu na ose  $x$  namáhavější. Je-li možné najít libovolně malý pás kolem bodu  $L$  (jeho šířku určuje číslo  $\varepsilon$ ), k němuž lze najít na ose  $x$  interval kolem bodu  $a$  (šířku toho intervalu určuje číslo  $\delta$ ), pak daná funkce má limitu  $L$  v bodě  $a$ . Pokud není možné obecně takový pás najít, funkce v daném bodě limitu nemá.

Jako příklad funkce, která má v bodě  $a$  limitu  $L$ , je možné uvést funkci na obr. 20. Pro jakkoliv široký pás v okolí bodu  $L$  (pro všechna kladná  $\varepsilon$ ) jsme schopni najít interval na ose  $x$  (existuje kladné číslo  $\delta$ ) takový, že funkční hodnoty všech bodů z okolí bodu  $a$  (všechna  $x$  z množiny  $(a - \delta; a + \delta) - \{a\}$ ) leží v předem daném pásu kolem bodu  $L$  (v intervalu  $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ ).

Na obr. 21 je příklad funkce, která v bodě  $a$  limitu nemá.



obr. 20



obr. 21

Základní vlastnosti limity funkce:

1. Funkce  $f$  má v bodě  $a$  nejvýše jednu limitu.
2.  $\forall x \in U(a, \delta) - \{a\} : f(x) = g(x) \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$   
(Rovnájí-li se dvě funkce v prstencovém okolí bodu  $a$ , v němž má navíc jedna z funkcí limitu, má limitu i druhá funkce a obě limity se rovnají.)
3. Jestliže pro všechna  $x$  z množiny  $U(a, \delta) - \{a\}$  platí  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  a současně  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ , potom existuje také limita funkce  $g$  v bodě  $a$  a platí  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  (věta o dvou policajtech - funkce  $f$  a  $h$  „svírají“ funkci  $g$  jako dva policajti).
4.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
6.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
7.  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ , za předpokladu, že  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

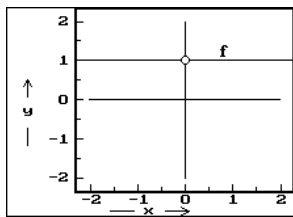


$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

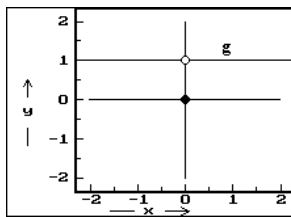
Vztah  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$  lze „vyvodit“ z geometrické interpretace, tj. z grafu funkce  $f: y = \sin x$  a funkce  $g: y = x$ : pro dostatečně malá  $x$  (v okolí nuly) nabývají obě funkce „skoro stejných hodnot“.

### 1.10.2.1.2 JEDNOSTRANNÁ LIMITA

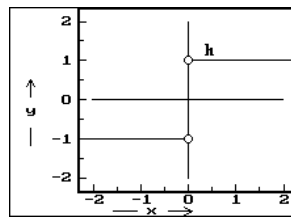
Uvažme grafy následujících funkcí:  $f: y = \frac{x}{x}$ ,  $g: y = |\operatorname{sgn} x|$ ,  $h: y = \frac{|x|}{x}$ ,  $k: y = \operatorname{sgn} x$ . Určíme-li jejich definiční obory ( $D(f) = D(h) = \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $D(g) = D(k) = \mathbb{R}$ ) a načrtneme-li grafy daných funkcí (viz obr. 22 - obr. 25), můžeme hovořit o limitách v „kritickém“ bodě 0:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ , zatímco  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow 0} k(x)$  neexistují. Nicméně z obrázků je vidět, že i funkce  $h$  a  $k$  se v bodě 0 „blíží“ k nějaké hodnotě, ale záleží na tom, odkud „k nule půjdeme - jestli zleva nebo zprava“.



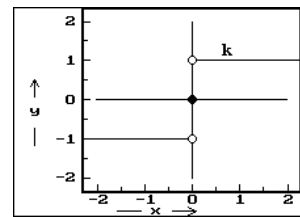
obr. 22



obr. 23



obr. 24



obr. 25

Na základě toho je potom možné mluvit o jednostranné limitě:

1. funkce  $h$  (resp.  $k$ ) mají v bodě nule **zleva** jednostrannou limitu, která je rovna -1
2. funkce  $h$  (resp.  $k$ ) mají v bodě nule **zprava** jednostrannou limitu, která je rovna 1

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  LIMITU  $L$  ZLEVA**, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU OKOLÍ BODU  $L$  EXISTUJE LEVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO LEVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  NÁLEŽÍ HODNOTY  $f(x)$  ZVOLENÉMU OKOLÍ BODU  $L$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME VÝRAZEM  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ .

S využitím matematické symboliky je možné právě uvedenou definici přepsat ve tvaru:  
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  LIMITU  $L$  ZPRAVA**, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU OKOLÍ BODU  $L$  EXISTUJE PRAVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO PRAVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  NÁLEŽÍ HODNOTY  $f(x)$  ZVOLENÉMU OKOLÍ BODU  $L$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME VÝRAZEM  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ .

S využitím matematické symboliky je možné právě uvedenou definici přepsat ve tvaru:  
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

Na základě právě uvedených definic je možné určit podmínku pro existenci limity funkce v zadaném bodě: Limita funkce  $f$  v bodě  $a$  existuje právě tehdy, když existují v bodě  $a$  limity zprava a zleva a jsou si rovny. Potom se limita funkce  $f$  v bodě  $a$  rovná společné hodnotě limit zleva a zprava.

### 1.10.2.1.3 NEVLASTNÍ LIMITY FUNKCE V BODĚ

Až dosud bylo výsledkem počítání limity vždy reálné číslo, tj. číslo z intervalu  $(-\infty; \infty)$ . Jsou ale funkce, které dosahují v absolutní hodnotě velkých funkčních hodnot a tím pádem se limity v daných bodech budou blížit nekonečnu (plus nebo minus). Takovým se říká **nevlastní limity**.

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  NEVLASTNÍ LIMITU  $\infty$** , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU  $K$  EXISTUJE PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  JE  $f(x) > K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME VÝRAZEM  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in U(a, \delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) > K$ .

**Příklad:** funkce  $f: y = \frac{1}{(x-3)^2}$  v bodě 3, funkce  $f: y = \frac{1}{(x+5)^4}$  v bodě -5, ...

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  NEVLASTNÍ LIMITU  $-\infty$** , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU  $K$  EXISTUJE PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  JE  $f(x) < K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME VÝRAZEM  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in U(a, \delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) < K$ .

**Příklad:** funkce  $f : y = -\frac{1}{(x+1)^2}$  v bodě -1, funkce  $f : y = \frac{1}{x^8}$  v bodě 0, funkce  $f : y = \ln|x|$  v bodě 0, ...

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  NEVLASTNÍ LIMITU  $\infty$  ZLEVA**, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU  $K$  EXISTUJE LEVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO LEVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  JE  $f(x) > K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME VÝRAZEM  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) > K$ .

**Příklad:** funkce  $f : y = -\frac{1}{x+4}$  v bodě -4, funkce  $f : y = -\log(-x)$  v bodě 0, funkce  $f : y = \operatorname{tg} x$  v bodě  $\frac{\pi}{2}$ , ...

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  NEVLASTNÍ LIMITU  $\infty$  ZPRAVA**, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU  $K$  EXISTUJE PRAVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO PRAVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  JE  $f(x) > K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME VÝRAZEM  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) > K$ .

**Příklad:** funkce  $f : y = \frac{1}{x+4}$  v bodě -4, funkce  $f : y = -\log(x-2)$  v bodě 2, funkce  $f : y = \operatorname{cotg} x$  v bodě 0, ...

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  NEVLASTNÍ LIMITU  $-\infty$  ZLEVA**, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU  $K$  EXISTUJE LEVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO LEVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  JE  $f(x) < K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME VÝRAZEM  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) < K$ .

**Příklad:** funkce  $f : y = \frac{1}{x+4}$  v bodě -4, funkce  $f : y = \log(-x+1)$  v bodě 1, funkce  $f : y = \operatorname{cotg} x$  v bodě  $\pi$ , ...

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $a$  NEVLASTNÍ LIMITU  $-\infty$  ZPRAVA**, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU  $K$  EXISTUJE PRAVÉ OKOLÍ BODU  $a$  TAK, ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z TOHOTO PRAVÉHO OKOLÍ BODU  $a$  JE  $f(x) < K$ . TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME VÝRAZEM  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) < K$ .

**Příklad:** funkce  $f : y = -\frac{1}{x+4}$  v bodě -4, funkce  $f : y = \log(x+3)$  v bodě 3, funkce  $f : y = \operatorname{tg} x$  v bodě  $\frac{3}{2}\pi$ , ...

#### 1.10.2.1.4 LIMITA FUNKCE V NEVLASTNÍM BODĚ

Zatím jsme definovali vlastní i nevlastní limity v libovolném bodě  $a$  z intervalu  $(-\infty; \infty)$ . Je možné ale vyšetřovat funkční hodnoty funkce v krajích bodech uvedeného intervalu  $(-\infty; \infty)$ , tj. je možné vyšetřovat i limity v bodech  $\infty$  a  $-\infty$ . Takovým limitám říkáme **limita v nevlastním bodě**. Limita v nevlastním bodě může být vlastní i nevlastní.

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ  $\infty$  VLASTNÍ LIMITU  $L$** , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU Kladnému číslu  $\varepsilon$  existuje takový bod  $x_0$ , že pro všechna  $x > x_0$  patří funkční hodnoty  $f(x)$  do intervalu  $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ . Tuto skutečnost zapisujeme výrazem  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 : \forall x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

**Příklad:** funkce  $f : y = \frac{1}{x} : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , funkce  $f : y = 2^{-x} + 3 : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3, \dots$

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ  $-\infty$  VLASTNÍ LIMITU  $L$** , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU Kladnému číslu  $\varepsilon$  existuje takový bod  $x_0$ , že pro všechna  $x < x_0$  patří funkční hodnoty  $f(x)$  do intervalu  $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ . Tuto skutečnost zapisujeme výrazem  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 : \forall x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

**Příklad:** funkce  $f : y = 2^x - 1 : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , funkce  $f : y = -\frac{1}{x^4} : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \dots$

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ  $\infty$  NEVLASTNÍ LIMITU  $\infty$** , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU číslu  $K$  existuje takový bod  $x_0$ , že pro všechna  $x > x_0$  platí  $f(x) > K$ . Tuto skutečnost zapisujeme výrazem  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists x_0 : \forall x > x_0 \Rightarrow f(x) > K$ .

**Příklad:** funkce  $f : y = \ln x : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , funkce  $f : y = 3x + 1 : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \dots$

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ  $\infty$  NEVLASTNÍ LIMITU  $-\infty$** , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU číslu  $K$  existuje takový bod  $x_0$ , že pro všechna  $x > x_0$  platí  $f(x) < K$ . Tuto skutečnost zapisujeme výrazem  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists x_0 : \forall x > x_0 \Rightarrow f(x) < K$ .

**Příklad:** funkce  $f : y = x^3 : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , funkce  $f : y = -2x + 3 : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, \dots$

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ  $-\infty$  NEVLASTNÍ LIMITU  $\infty$** , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU číslu  $K$  existuje takový bod  $x_0$ , že pro všechna  $x < x_0$  platí  $f(x) > K$ . Tuto skutečnost zapisujeme výrazem  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists x_0 : \forall x < x_0 \Rightarrow f(x) > K$ .

**Příklad:** funkce  $f : y = x^2 : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ , funkce  $f : y = -x^3 : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \dots$

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ  $-\infty$  NEVLASTNÍ LIMITU  $-\infty$** , JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU číslu  $K$  existuje takový bod  $x_0$ , že pro všechna  $x < x_0$  platí  $f(x) < K$ . Tuto skutečnost zapisujeme výrazem  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

Stručný zápis definice:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists x_0 : \forall x < x_0 \Rightarrow f(x) < K$ .

**Příklad:** funkce  $f : y = -x^2 : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , funkce  $f : y = x + 5 : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \dots$

Při výpočtu limit se můžeme často setkat s tzv. **neurčitými výrazy**. Jedná se o výpočet limity nějaké funkce a název „neurčitý výraz“ zde není zcela přesně na místě, protože limita je definována přesně a není na ní

nic neurčitěho. Název je ale natolik vžitý, že nemá smysl ho měnit. Neurčité výrazy, tedy výrazy, které se nedají řešit přímo, ale musí nějak „obejít“ (fintou, úpravou výrazu, ...) jsou tyto:  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$ .

Vlastnosti limit – např. počítání s limitami (limita součtu, rozdílu, ...), které byly uvedeny pro vlastní limity ve vlastních bodech v odstavci 1.10.2.1.1, platí i pro nevlastní limity v nevlastních bodech, pouze s výjimkou neurčitých výrazů.

### 1.10.2.2 Důležité limity

Jedná se o limity, které se při výpočtech často vyskytují (i když v různých obměnách a podobách) a které je možné intuitivně „odvodit“ ze správně nakresleného grafu dané funkce (resp. daných funkcí).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0; n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje}$$

pro  $a \in (0; 1)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_a x = -\infty$$

pro  $a \in (1; \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x \text{ neexistuje} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \text{ neexistuje} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x \text{ neexistuje} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x \text{ neexistuje}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{cotg} x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cotg} x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Při výpočtu limit je vždy doporučeno postupovat dle následujícího postupu:

1. limita ve vlastním bodě - vede-li po dosazení příslušného  $a$  k neurčitěmu výrazu, je nutné pomocí algebraických úprav výraz v čitateli i ve jmenovateli vyjádřit jako součin několika činitelů, z nichž jeden je „ten, který zlobí“, tj. činitel, který po dosazení příslušného  $a$  dává nulu. Krácením zlomku tímto činitelem, se zbavíme neurčitěho výrazu. Skutečnost, že krátit jde, nás nemusí překvapovat. V definici limit se vždy objevuje prstencové okolí příslušného bodu  $a$ , tj. jsme „strašlivě blízko bodu  $a$ , ale nikdy ne přímo v něm.“ **Pozor!** I limita ve vlastním bodě může být nevlastní, tj. může vyjít  $\infty$  nebo  $-\infty$ .
2. limita v nevlastním bodě - neobsahuje-li zadání příkladu zlomek, je možné přímo „dosadit“ (v tomto případě není možné dosazovat přímo znak pro nekonečno, ale je možné dosazovat pouze v hlavě „strašně velká čísla“). Je-li zadání ve formě zlomku, pak se doporučuje v čitateli i jmenovateli vytknout nejvyšší mocninu neznámé (v čitateli a jmenovateli **není nutné** vytkat tutéž mocninu). Po vytknutí je možné (co jde) krátit (opět je třeba si uvědomit, že nikdy nejsme přímo v bodě, v němž limitu počítáme) a poté již opět dosadit „strašně velké číslo“ a dopočítat limitu.

**Příklad:** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x - 6)(x^4 - 16)}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 9)}$ .

**Řešení:** Postupnými algebraickými úpravami upravíme zadanou limitu do tvaru, kdy je možné dosadit:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x - 6)(x^4 - 16)}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 9)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)(x^2-4)(x^2+4)}{(x-2)^2(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)^2(x-3)(x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x^2+4)}{(x-3)} = \frac{(2+2)(2^2+4)}{(2-3)} = \frac{4 \cdot 8}{-1} = -32 \end{aligned}$$

**Příklad:** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 6}{x^4 + 5x^2 + 4}$

**Řešení:** Přesně podle výše uvedeného návodu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 6}{x^4 + 5x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{6}{x} \right)}{x^4 \left( 1 + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{6}{x}}{x \left( 1 + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 0 - 0 - 0}{x \cdot (1 + 0 + 0)} = 0$$

Z tohoto příkladu je vidět, že u výpočtu limity podílu dvou polynomů v nevlastním bodě závisí pouze na stupni polynomu v čitateli a jmenovateli.

### 1.10.2.3 Užití limity funkce

#### 1.10.2.3.1 ASYMPTOTY GRAFU FUNKCE

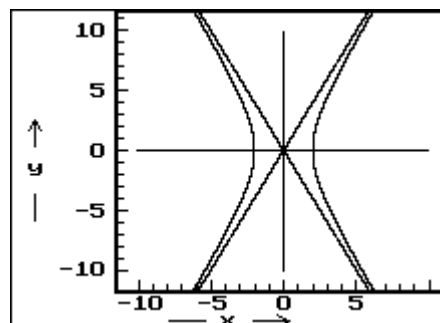
Pojem asymptota byl uveden při probírání učiva o hyperbole, jakožto zvláštní případ přímky, která nemá s hyperbolou společný žádný bod. S asymptotami se ale setkáváme v matematice nejen u hyperbol (což obecně nemusí být funkce), ale i u funkcí: lineárně lomená (rovnoosá hyperbola), exponenciální, logaritmická, funkce tangens a kotangens, ... Později uvidíme, že znalost asymptoty funkce je velmi důležitá pro správné sestavení grafu funkce: vlastnosti funkce v nevlastních bodech a v okolí bodů, v nichž funkce není definovaná, velmi úzce souvisí s asymptotami funkce. Jsou pochopitelně i funkce, které asymptoty nemají (sinus, kosinus, kvadratická funkce, ...).

Existují dva druhy asymptot:

1. asymptoty se směrnicí - jsou přímky, které mají rovnici  $y = ax + b$  ( $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ); jedná se o asymptoty funkce v nevlastních bodech
2. asymptoty bez směrnice - jsou přímky ve tvaru  $x = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ); jde o asymptoty funkce v takových bodech  $c$ , v nichž není funkce definována

##### 1.10.2.3.1.1 ASYMPTOTY SE SMĚRNICÍ

Ilustrační příklad: V analytické geometrii kvadratických útvarů v rovině byla probírána hyperbola. Uvažme nyní hyperbolu  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ . Jedná se hyperbolu, která má střed v počátku soustavy souřadnic a jejíž hlavní osa je totožná s osou  $y$  (viz obr. 26). Na základě znalosti z analytické geometrie víme, že tato hyperbola má dvě asymptoty:  $y = \pm \frac{4}{2}x = \pm 2x$ . Jde tedy o příklad asymptot se směrnicí, přestože UVEDENÁ HYPERBOLA NENÍ FUNKCE.



obr. 26

**D:** PŘÍMKA  $y = ax + b$  SE NAZÝVÁ ASYMPTOTA SE SMĚRNICÍ GRAFU FUNKCE  $f$ , JESTLIŽE

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ NEBO } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Poznámka: Definice plně odpovídá intuitivní představě, že asymptota je přímka, která nemá s grafem funkce společný žádný bod, pouze se ke grafu „přibližuje a dotkne se ho až v nekonečnu“.

Výpočet koeficientů  $a$  a  $b$ , které určují příslušnou asymptotu, je možné provést na základě definice asymptoty a úpravou definičního vztahu  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ . Pokud totiž platí  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ,

tím spíše bude platit  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = 0$ . Tento vztah je možné dále upravit:

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - a - 0 \Rightarrow a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Podobným způsobem je možné nyní odvodit ze vztahu  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  vztah pro výpočet koeficientu  $b$ :  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$ .

Analogicky se odvodí příslušné vztahy z druhého definičního vztahu asymptoty, tj. ze vztahu  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ .

Přímka o rovnici  $y = ax + b$  je asymptotou se směrnicí grafu funkce  $f$ , právě když existují limity:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) \quad \text{nebo} \quad a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax).$$

Poznámka: Asymptota není obecně přímka, která se pouze „přibližuje“ ke grafu funkce, ale nikde jí neprotne. Asymptota může graf funkce protnout ve vlastním bodě - pro asymptotu je důležité, jak „se chová“ v nevlastních bodech.

##### 1.10.2.3.1.2 ASYMPTOTY BEZ SMĚRNICE

Asymptoty bez směrnice jsou přímky rovnoběžné s osou  $y$  a nemohou nikdy protnout graf funkce (na rozdíl od asymptot se směrnicí - viz poznámka na konci odstavce 1.10.2.3.1.1). V tom případě by totiž uvažovaný graf nebyl grafem funkce.

**D:** NECHŤ JE FUNKCE  $f$  DEFINOVÁNA V PRSTENCOVÉM OKOLÍ BODU  $c$  (TJ. V MNOŽINĚ  $U(c, \delta) - \{c\}$ ). PŘÍMKA O ROVNICI  $x=c$  SE NAZÝVÁ ASYMPTOTA BEZ SMĚRNICE GRAFU FUNKCE  $f$ , PRÁVĚ KDYŽ MÁ FUNKCE  $f$  V BODĚ  $c$  ASPOŇ JEDNU JEDNOSTRANNOU NEVLASTNÍ LIMITU.

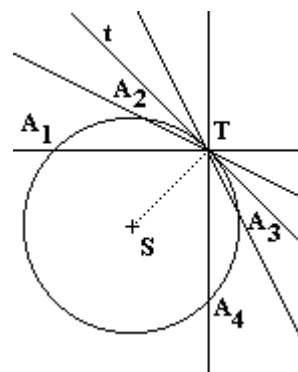
Ve shodě s definicí hledáme asymptoty bez směrnice u funkcí, u kterých existují body, v nichž není daná funkce definována. V jiných bodech asymptota bez směrnice neexistuje. Proto stačí vyšetřovat jednostranné limity pouze v bodech, v nichž není daná funkce definována.

### 1.10.2.3.2 TEČNA GRAFU FUNKCE

V analytické geometrii byla probána kružnice a její vzájemná poloha s přímkou. Jednou z možných poloh přímky a kružnice byla tečna ke kružnici, která byla definována jako přímka, která má s kružnicí společný právě jeden bod (bod dotyku  $T$ ) a která je kolmá na spojnici středu a tohoto dotykového bodu  $T$ . Prochází-li přímka dvěma různými body  $T, A$  kružnice, jedná se o sečnu. Čím blíže zvolíme bod  $A$  bodu  $T$ , tím méně se liší poloha sečny  $TA$  od tečny  $t$  kružnice v bodě  $T$ . Říkáme, že tečna  $t$  je mezní (limitní) polohou sečny  $TA$ , blíží-li se bod  $A$  po kružnici k bodu  $T$  (viz obr. 27).

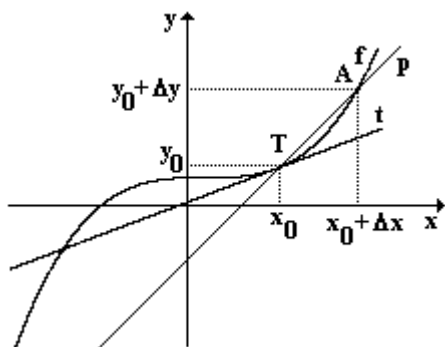
Při hledání tečny v daném bodě funkce  $f$  bude postup stejný s tím, že využijeme znalost limit pro nalezení mezního případu sečny grafu funkce, tj. nalezení tečny.

Pokud chceme napsat rovnici tečny  $t$  ve tvaru  $y=kx+q$  v bodě  $T=[x_0; y_0]$  funkce  $f$ , zvolíme na grafu funkce  $f$  ještě jeden bod  $A=[x_0+\Delta x; y_0+\Delta y]$  (viz obr. 28). Body  $A$  a  $T$  je určena přímka  $p$ , která je sečnou grafu funkce  $f$ . Chceme-li napsat tečnu grafu funkce v bodě  $T$ , stačí si uvědomit tuto skutečnost: pro zmenšující se přírůstek  $x$ -ové souřadnice  $\Delta x$  (tj. pro případ  $\Delta x \rightarrow 0$ ) se blíží bod  $A$  bodu  $T$  a tudíž se sečna  $p$  blíží tečně  $t$ .

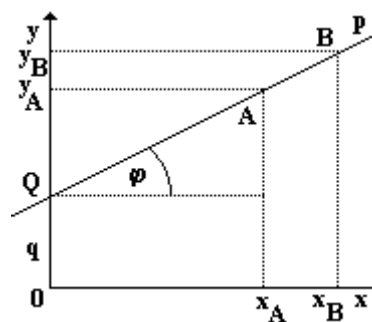


obr. 27

Při výkladu směrnice přímky (analytická geometrie lineárních útvarů v rovině), jsme zjistili, že směrnici přímky lze vypočítat na základě následující úvahy: Nechť dva různé body  $A=[x_A; y_A]$  a  $B=[x_B; y_B]$  leží na přímce  $p$ , jejíž rovnice má směrnicový tvar  $y=kx+q$  (viz obr. 29). Pro souřadnice uvedených bodů platí:  $y_A=kx_A+q$  a  $y_B=kx_B+q$ . Dostáváme tedy soustavu dvou rovnic pro neznámou  $k$  a  $q$ . Pro  $k$  dostáváme:  $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , tedy směrnici  $k$  jsme vyjádřili pomocí rozdílu souřadnic dvou bodů, které na dané přímce leží.



obr. 28



obr. 29

Analogicky je možné postupovat v případě, že chceme nalézt směrnici tečny grafu funkce na obr. 28. Směrnici  $k_t$  tečny  $t$  tedy můžeme určit jako limitní případ směrnice  $k_s$  sečny (přímka  $p$ ):  $k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_s$ . Přitom na základě právě připomenuté znalosti o směrnici přímky je možné směrnici  $k_s$  psát ve tvaru

$$k_s = \frac{y_0 + \Delta y - y_0}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \text{ Takže můžeme psát: } k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Přeznačíme-li souřadnice bodů  $T$  a  $A$  z obr. 28 tímto způsobem:  $T=[x_0; f(x_0)]$  a  $A=[x; f(x)]$ , je možné psát poslední uvedenou limitu ve tvaru:  $k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

Nyní je už možné napsat rovnici tečny v bodě  $T = [x_0; y_0]$ , neboť máme k dispozici její směrnici  $k_t$  a víme, že na této tečně leží kromě bodu  $T$  ještě libovolný bod  $X = [x; y]$ , jehož souřadnice musí splňovat vztah

$$k_t = \frac{y - y_0}{x - x_0}. \text{ Z toho vyplývá rovnice tečny } t: y - y_0 = k_t(x - x_0) \Rightarrow y = k_t(x - x_0) + y_0.$$

Je-li křivka grafem funkce  $y = f(x)$  a existuje-li v bodě  $x_0$  vlastní limita  $k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , pak tečna křivky v bodě  $T = [x_0; y_0]$  je přímka daná rovnicí  $y - y_0 = k_t(x - x_0)$ .

### 1.10.3 Spojitost funkce

Mezi všemi funkcemi, s nimiž se postupně seznamujeme, mají velký význam funkce spojité. Zhruba řečeno, spojitá funkce je funkce, jejíž graf lze nakreslit jedním tahem (graf není nikde přetržen). Toto intuitivní tvrzení se ale opírá o geometrickou představu, která ne u všech funkcí je přístupná. Proto je třeba tento intuitivní náhled zpřesnit tak, jak se o to snažili matematikové během historického vývoje.

#### 1.10.3.1 Spojitost v bodě $a$ v intervalu

**D: FUNKCE  $f$  SE NAZÝVÁ SPOJITÁ V BODĚ  $a$** , JESTLIŽE JSOU SOUČASNĚ SPLNĚNY TYTO PODMÍNKY:

1. FUNKCE  $f$  JE BODĚ  $a$  DEFINOVANÁ
2. EXISTUJE VLASTNÍ LIMITA  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. FUNKČNÍ HODNOTA V BODĚ  $a$  JE ROVNA VLASTNÍ LIMITĚ V TOMTO BODĚ, TJ.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

*Poznámka:* Bod 2 v uvedené definici mluví o existenci limity, tedy v daném bodě musí existovat oboustranná limita.

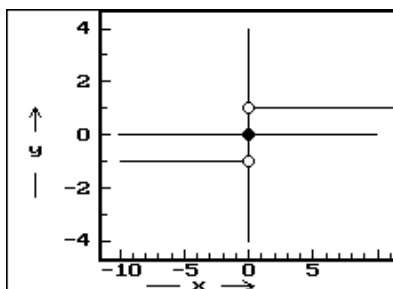
**D: FUNKCE  $f$  SE NAZÝVÁ SPOJITÁ ZPRAVA (RESP. ZLEVA) V BODĚ  $a$** , JESTLIŽE JSOU SOUČASNĚ SPLNĚNY TYTO PODMÍNKY:

1. FUNKCE  $f$  JE BODĚ  $a$  DEFINOVANÁ
2. EXISTUJE VLASTNÍ JEDNOSTRANNÁ LIMITA  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  (RESP.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ )
3. FUNKČNÍ HODNOTA V BODĚ  $a$  JE ROVNA VLASTNÍ JEDNOSTRANNÉ LIMITĚ V TOMTO BODĚ, TJ.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  (RESP.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ )

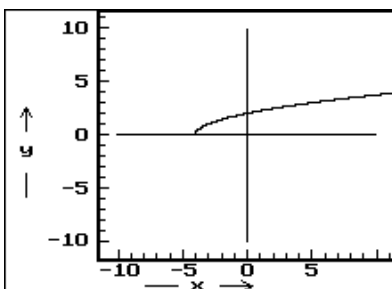
**D: FUNKCE  $f$  JE SPOJITÁ V OTEVŘENÉM INTERVALU  $(a; b)$** , JE-LI SPOJITÁ V KAŽDÉM BODĚ TOHOTO INTERVALU.

**D: FUNKCE  $f$  JE SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$** , JE-LI SPOJITÁ V OTEVŘENÉM INTERVALU  $(a; b)$  A V BODĚ  $a$  JE SPOJITÁ ZPRAVA A V BODĚ  $b$  JE SPOJITÁ ZLEVA.

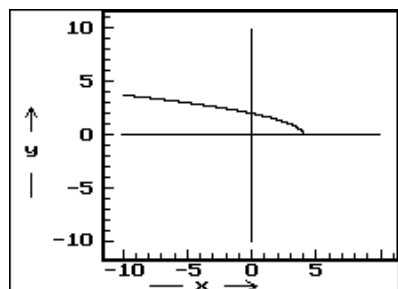
Na obr. 30 je znázorněn graf funkce  $f: y = \text{sgn } x$ , která ukazuje příklad funkce, která není spojitá v bodě 0. Funkce  $g: y = \sqrt{x+4}$  (viz obr. 31) má definiční obor  $D(g) = \langle -4; \infty \rangle$  a je tedy spojitá ve všech bodech otevřeného intervalu  $(-4; \infty)$ . V bodě -4 je spojitá pouze zprava, neboť v levém okolí bodu -4 není funkce  $g$  definována. Analogická je situace u funkce  $h: y = \sqrt{-x+4}$ , jejíž definiční obor je  $D(h) = (-\infty; 4]$  (viz obr. 32). Tato funkce je spojitá ve všech bodech otevřeného intervalu  $(-\infty; 4)$  a v bodě 4 je spojitá jen zleva.



obr. 30



obr. 31



obr. 32

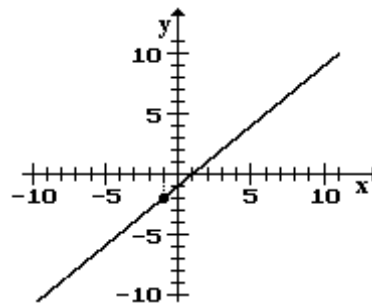
Funkce, které nejsou spojité, nemají ale body nespojitosti vždy „stejného druhu“. Existují funkce, které nejsou v určitém bodě spojité (protože v daném bodě např. nejsou definovány), ale které je možné dodefinovat tak, aby spojité byly. Příkladem takové funkce je např. funkce

$f: y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ , jejíž definiční obor je  $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ . Na tomto

definičním oboru je možné ale předpis funkce  $f$  upravit:

$f: y = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$ . Získaná funkce  $g: y = x - 1$  má sice

stejný definiční obor jako funkce  $f$ , ale je možné ji v „kritickém“ bodě  $-1$  dodefinovat:  $g(-1) = -1 - 1 = -2$  a získat tak funkci spojitou (viz obr. 33).



obr. 33

Na rozdíl od toho např. funkci  $h: y = \operatorname{sgn} x$  nelze žádným způsobem dodefinovat tak, aby byla spojitá (viz obr. 30).

**V:** Všechny elementární funkce jsou spojité ve svých definičních oborech.

### 1.10.3.2 Spojité funkce na uzavřených intervalech

**Weierstrassova věta:** Je-li funkce spojitá v uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$ , existuje alespoň jeden takový bod  $x_1 \in \langle a; b \rangle$ , že  $\forall x \in \langle a; b \rangle: f(x) \leq f(x_1)$ , a alespoň jeden takový bod  $x_2 \in \langle a; b \rangle$ , že  $\forall x \in \langle a; b \rangle: f(x) \geq f(x_2)$ .

*Poznámka:* Uvedenou větu lze formulovat také tak, že funkce spojitá v uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$  nabývá v tomto intervalu alespoň v jednom bodě maxima a alespoň v jednom bodě minima.

**V:** Funkce spojitá v uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$  je v tomto intervalu omezená.

**Příklad:** funkce  $f: y = \cos x$  v intervalu  $\langle -\frac{3}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi \rangle$ , funkce  $g: y = x^2$  v intervalu  $\langle -3; 2 \rangle$ , ...

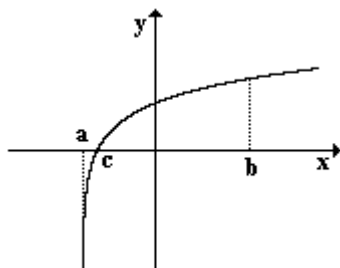
**Bolzanova - Weierstrassova věta:** Je-li funkce  $f$  spojitá v uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$  a  $f(a) \neq f(b)$ , potom ke každému číslu  $K$ , které leží mezi čísly  $f(a)$  a  $f(b)$ , existuje alespoň jeden takový bod  $c \in \langle a; b \rangle$ , že  $f(c) = K$ .

*Poznámka:* Uvedené větě se někdy též říká věta o nabývání mezihodnot, protože funkce  $f$  nabývá všech hodnot mezi  $f(a)$  a  $f(b)$ . **Pozor!!!** Platí pouze pro spojité funkce.

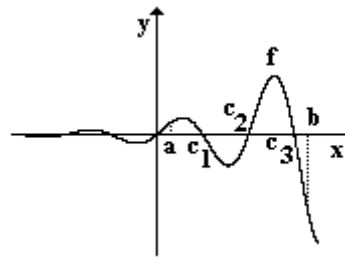
Pro praktické použití je ale důležitý důsledek právě uvedené věty, na základě něhož je možné řešit řadu problémů z oblasti rovnic a nerovnic.

**Důsledek BW věty:** Je-li funkce  $f$  spojitá v uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$  a mají-li čísla  $f(a)$  a  $f(b)$  různá znaménka (tj.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ), potom existuje alespoň jeden takový bod  $c \in \langle a; b \rangle$ , pro který platí  $f(c) = 0$ .

Věta hovoří o existenci „alespoň jednoho“ bodu, který má požadované vlastnosti. To znamená, že tento bod může být jeden (viz obr. 34) nebo více (viz obr. 35). Z obrázků (i z uvedené věty) je patrné, že funkce  $f$  mění v okolí bodu  $c$  znaménko, čehož se využívá při přibližném řešení rovnic a nerovnic.



obr. 34



obr. 35

### 1.10.4 Derivace funkce

Derivace funkce patří spolu s limitami k nejdůležitějším závěrům infinitezimálního počtu. Na základě derivace funkce je možné vyšetřovat nejen průběh funkcí v matematice, ale i řešit řadu příkladů z technické praxe. Derivace totiž umožňuje popsat průběh veličin, které se mění v závislosti na ostatních veličinách (např. uražená dráha v závislosti na čase - viz odstavec 1.10.4.1).



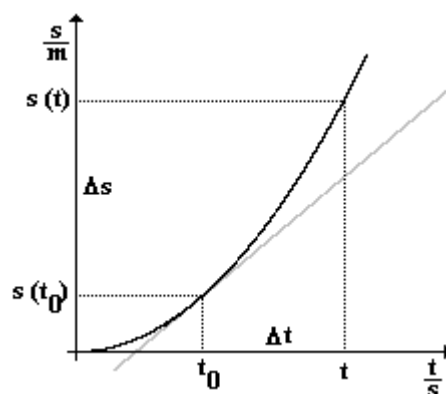
### 1.10.4.1 Fyzikální význam derivace

V odstavci 1.10.2.3.2 jsme v souvislosti s určením rovnice tečny grafu funkce v jejím bodě  $T = [x_0; y_0]$  vyšetřovali limitu  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Tato limita má geometrickou interpretaci: udává směrnici tečny grafu funkce v jejím bodě  $T = [x_0; y_0]$ .

S uvedenou limitou je možné se setkat nejen v matematice, ale i ve fyzice. Uvažujme pohyb hmotného bodu, u kterého budeme měřit čas  $t$  jeho pohybu a zároveň sledovat závislost  $s(t)$  uražené dráhy od okamžiku  $t = 0$  s. Graf závislosti uražené dráhy na čase je zobrazena na obr. 36. Za čas  $\Delta t = t - t_0$  urazil hmotný bod dráhu délky  $\Delta s = s(t) - s(t_0)$ . Na základě těchto údajů je možné určit **průměrnou rychlost**  $v_p$  v uvažovaném časovém intervalu  $\langle t_0; t_0 + \Delta t \rangle$ :  $v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ . Průměrná rychlost bude vypovídat o velikosti rychlosti v čase  $t_0$  tím přesněji, čím menší bude  $\Delta t$ . Na základě znalostí limit tedy můžeme **okamžitou rychlost**  $v$  v čase  $t_0$  definovat vztahem:  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ .

Ve shodě s odstavcem 1.10.2.3.2 tedy můžeme říci, že velikost okamžité rychlosti pohybu hmotného bodu v daném čase  $t_0$  získáme jako směrnici tečny, kterou bychom v příslušném bodě vedli ke grafu závislosti uražené dráhy na čase.

Jak je vidět, v právě uvedeném příkladu jsme pracovali s limitou typu  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , tj. s limitou podílu přírůstku funkce a přírůstku argumentu funkce. Tato limita a postup z příkladu o pohybu hmotného bodu mají v matematice zásadní význam. Proto má limita  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  své vlastní označení a název.



obr. 36

### 1.10.4.2 Definice derivace

**D:** NECHĚT FUNKCE  $f$  JE DEFINOVANÁ V JISTÉM OKOLÍ BODU  $x_0$ . EXISTUJE-LI LIMITA

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{ NAZÝVÁME JI } \underline{\text{DERIVACÍ FUNKCE } f \text{ V BODĚ } x_0}. \text{ ZNAČÍ SE } f'(x_0).$$

*Poznámka:* V definici se nemluví o tom, jestli musí existovat vlastní nebo nevlastní limita. Důležité je, aby limita vůbec existovala. Derivace pak může být vlastní i nevlastní, i když s nevlastní derivací se příliš často ve středoškolské matematice nesetkáme.

Vzhledem k tomu, že  $\Delta x = x - x_0$  je možné pro derivaci psát:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Kromě symbolu  $f'(x_0)$  se pro značení derivace také používá symbol  $y'(x_0)$  a  $\frac{dy}{dx}$ , který připomíná vznik derivace z podílu  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Ve fyzice (zejména pak ve vysokoškolské) se uplatňuje ještě jeden způsob značení. V mechanice je převážná část veličin vyšetřována v závislosti na čase, tudíž se často počítá s derivací nějaké funkce (polohy, rychlosti, ...) podle času. Proto má tato derivace svoje zvláštní označení:  $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$  (nad příslušnou funkcí se dělá tečka).

Srovnáme-li definiční vztah derivace, tj. limitu  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , se vztahem pro směrnici tečny grafu funkce v jejím bodě  $T = [x_0; y_0]$  z odstavce 1.10.2.3.2, zjistíme, že oba výrazy jsou totožné. Na základě toho je tedy možné říci, že **derivace funkce v bodě**  $T = [x_0; y_0]$  **je směrnici tečny** grafu funkce v uvedeném bodě. Rovnici tečny grafu funkce v jejím bodě  $T = [x_0; y_0]$  je možné na základě právě uvedeného psát ve tvaru  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ .

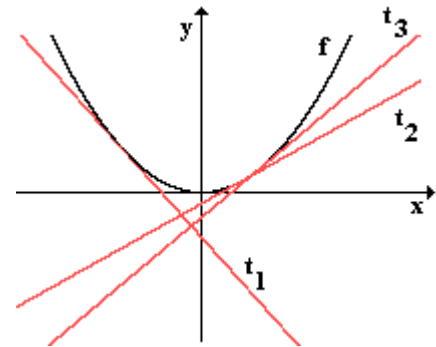
**Příklad:** Vypočítejte derivaci funkce  $f : y = x^2$  v bodě  $x_0 \in D(f)$ .

**Řešení:** Vzhledem k tomu, že  $D(f) = \mathbb{R}$ , budeme hledat derivaci v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Na základě definice derivace

$$\text{je možné psát: } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Za  $x_0$  je možné volit libovolný bod z definičního oboru a tím dostaneme různé hodnoty derivace. To znamená, že tečny sestrojené v různých bodech grafu funkce  $f : y = x^2$  mají různou směrnici (viz obr. 37).

Podobným způsobem je možné odvodit ze znalostí výpočtu limit derivaci libovolné funkce. V rámci urychlení výpočtů ale existuje tabulka předem vypočítaných derivací elementárních funkcí (viz odstavec 1.10.4.5).



obr. 37

### 1.10.4.3 Derivace vyšších řádů

V příkladu na konci odstavce 1.10.4.2 byla vypočtena na základě definice derivace funkce (šlo o funkci  $f : y = x^2$ ) v bodě  $x_0 \in D(f) = \mathbb{R}$ . Pokud ale nemáme na mysli konkrétní bod, v němž derivaci vyšetřujeme, je možné vyjádřit derivaci v libovolném bodě  $x \in D(f)$  a psát  $f'(x) = 2x$ . V tomto případě lze na derivaci  $f'(x) = 2x$  nahlížet jako na funkci proměnné  $x$ . Bude-li mít funkce  $y' = f'(x)$  opět derivaci, značíme ji  $y''$  (resp.  $y''(x)$  resp.  $f''(x)$  resp.  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ) a nazýváme ji **druhou derivací funkce**  $y = f(x)$ .

Analogicky lze zavést třetí, čtvrtou, pátou, ... derivaci funkce. Pro praktické účely (vyšetřování průběhů funkcí, fyzikální a technické aplikace, ...) však většinou vystačíme se druhou derivací funkce.

### 1.10.4.4 Vlastnosti derivace

**D: FUNKCE  $f$  MÁ V OTEVŘENÉM INTERVALU  $(a; b)$  DERIVACI, JESTLIŽE MÁ DERIVACI V KAŽDÉM BODĚ  $x \in (a; b)$ .**

Spojitosť funkce souvisí s limitou funkce a derivace byla definována pomocí limit, proto spolu souvisí derivace funkce a spojitosť funkce.

Důležitá věta matematické analýzy říká: Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0 \in D(f)$  derivaci, je v tomto bodě spojitá.

**Pozor!!!** Obrácená věta neplatí. Tedy je-li funkce  $f$  v bodě  $x_0 \in D(f)$  spojitá, nemusí mít v bodě  $x_0$  derivaci. Jako příklad právě uvedeného poslouží funkce  $f : y = |x|$ . Její definiční obor je  $D(f) = \mathbb{R}$  a tato funkce je ve svém definičním oboru spojitá. V bodě  $x_0 = 0$  ale nemá derivaci. Podle definice je totiž

$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ . Tato limita ale neexistuje, protože limita zleva a limita zprava se nerovnjají:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$  a  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ .

Neexistence derivace v daném bodě znamená i to, že v daném bodě neexistuje tečna.

**Poznámka:** Tečna je přímka, která nahrazuje je v okolí daného bodu graf funkce (tečna je přímka „přilepená v daném bodě ke grafu funkce“). V bodě 0 na grafu funkce  $f : y = |x|$  je ale „špička“ a tudíž tečnu není „jak přilepit“. Obecně tedy tečna (a tím pádem i derivace) neexistuje v těch bodech grafu funkce  $f$ , v nichž je sice funkce spojitá, ale v graf vytváří v daném bodě „špičku“. A to je případ hlavně nulových bodů absolutních hodnot, které se vyskytnou v předpisu konkrétní funkce.

Proto se zavádí (analogicky jako u limit) jednostranné derivace.

**D: NECHĚT FUNKCE  $f$  JE DEFINOVANÁ V JISTÉM OKOLÍ BODU  $x_0$ . EXISTUJE-LI LIMITA  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , NAZÝVÁME JI **DERIVACÍ FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0$  ZLEVA**. ZNAČÍ SE  $f'_-(x_0)$ .**

**D:** NECHŤ FUNKCE  $f$  JE DEFINOVANÁ V JISTÉM OKOLÍ BODU  $x_0$ . EXISTUJE-LI LIMITA  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , NAZÝVÁME JI **DERIVACÍ FUNKCE  $f$  V BODĚ  $x_0$  ZPRAVA**. ZNAČÍ SE  $f'_+(x_0)$ .

Na základě jednostranných derivací je možné zavést derivaci v uzavřeném (resp. polouzavřeném či polootevřeném) intervalu.

**D:** **FUNKCE  $f$  MÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$  DERIVACI**, JESTLIŽE MÁ DERIVACI V KAŽDÉM BODĚ  $x \in (a; b)$  A V BODĚ  $a$  MÁ DERIVACI ZPRAVA A V BODĚ  $b$  MÁ DERIVACI ZLEVA.

#### 1.10.4.5 Derivace elementárních a složených funkcí

Jedním z předpokladů pro správné (a rychlé) využívání metod infinitesimalního počtu při řešení praktických úloh je dobrá znalost derivace elementárních funkcí a základní pravidla pro počítání derivací. K tomu slouží následující přehled funkcí a jejich derivací (viz tab. 1) a základních pravidel pro počítání s derivacemi, které je možné odvodit na základě definice derivace.

V tab. 1 jsou uvedeny elementární funkce, které mají derivace ve svých definičních oborech. V tabulce jsou též u daných funkcí uvedeny jejich primitivní funkce, které jsou zavedeny a vysvětleny v odstavci 1.11.2.1.

Funkce	Derivace funkce	Primitivní funkce
$y = k; k \in \mathbb{R}$	$y' = 0$	$F(x) = kx + C; C \in \mathbb{R}$
$y = x^n$ ( $x$ závisí na volbě $n$ )	$y' = nx^{n-1}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1; C \in \mathbb{R}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$F(x) = -\cos x + C; C \in \mathbb{R}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$F(x) = \sin x + C; C \in \mathbb{R}$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
$y = e^x$	$y' = e^x$	$F(x) = e^x + C; C \in \mathbb{R}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C; C \in \mathbb{R}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	

tab. 1

Na základě jistých pravidel (která je možné odvodit pomocí definice derivace pomocí limit) je možné též zavést derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí: Jestliže funkce  $u(x)$  a  $v(x)$  mají v bodě  $x_0$ , má v bodě  $x_0$  derivaci i součet, rozdíl a součin funkcí  $u(x)$ ,  $v(x)$  a pro  $v(x) \neq 0$  také podíl  $\frac{u(x)}{v(x)}$  a platí:

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x)$$

$$\left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Dále je možné zavést derivaci složené funkce: Jestliže funkce  $z = g(x)$  má derivaci v bodě  $x_0$  a jestliže funkce  $y = f(z)$  má derivaci v bodě  $z_0 = g(x_0)$ , má složená funkce  $y = f(g(x))$  derivaci v bodě  $x_0$  a platí:

$$[f(g(x_0))] = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Na první pohled to vypadá sice nepřehledně, ale složená funkce se derivuje tak, že se zderivuje funkce vnitřní a násobí se derivací funkce vnitřní. Stejným způsobem se postupuje, je-li funkce složena z více funkcí. Pro názornost konkrétní příklad.

$$\text{Příklad: } (\sin^3 2x)' = \underbrace{3\sin^2 2x}_{\text{derivace } y^3} \cdot \underbrace{\cos 2x}_{\text{derivace } \sin y} \cdot \underbrace{2}_{\text{derivace } 2x}$$

#### 1.10.4.6 Funkce více proměnných

Až dosud byla řeč o limitách, spojitosti a derivaci funkcí jedné proměnné. Nikde to nebylo zdůrazňováno, protože se to předpokládalo tak nějak automaticky. Nicméně nejen v matematice, ale i v jejích technických aplikacích hrají podstatnou roli funkce více proměnných. To jsou funkce, které nejsou definované jen na množině reálných čísel, ale na kartézském součinu (kartézské mocnině) množiny reálných čísel.

##### 1.10.4.6.1 NÁSTIN DEFINICE FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

**Příklad:** Ze středoškolské fyziky je známa jedna funkce více proměnných - rovnice postupného mechanického vlnění. Rovnice pro okamžitou výchylku  $y$  (se zanedbáním všech odporových sil) má tvar  $y = y_m \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$ , kde  $y_m$  je amplituda kmitání zdroje vlnění (a tím pádem i amplituda vlnění),  $T$  je perioda kmitání zdroje vlnění (a tím pádem i perioda vlnění) a  $\lambda$  je vlnová délka vlnění.  $t$  a  $x$  jsou parametry, na kterých závisí okamžitá výchylka daného bodu. U vlnění se nestačí ptát, jaká bude výchylka v určitém časovém okamžiku  $t$  (jako u kmitání), ale musíme se ptát i jakého bodu se daná výchylka týká, tj. v jaké vzdálenosti  $x$  od zdroje vlnění se tento bod nachází.

Obecně tedy funkce více proměnných je funkce, která je definována na množině  $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ krát}} = \mathbb{R}^n$  a funkční závislost je možné vyjádřit takto:  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Pokud budeme chtít sestřít graf takové funkce, budeme potřebovat  $(n+1)$  rozměrný prostor se zavedeným systémem souřadnic (při sestřítování grafu funkce jedné proměnné potřebujeme dvourozměrnou rovinu se zavedeným systémem souřadnic). Představit si graf takové funkce obecně je asi dost náročné. Přesto můžeme rámcovou představu udělat alespoň pro funkci dvou proměnných. Vyjdeme opět z grafu funkce jedné proměnné, kterým je nějaká rovinná křivka („kus ohnutého drátku“). Grafem funkce dvou proměnných pak bude nějaká plocha („plastická mapa“), která se bude nacházet nad (nebo pod) rovinou  $x_1, x_2$  kartézského systému souřadnic  $0, x_1, x_2, x_3$  (souřadnice  $x_3$  zde hraje roli souřadnice  $z$ , tj. přímo funkční hodnoty dané funkce).

Pro fyziky, techniky, ... je třeba mít k dispozici i derivaci těchto funkcí více proměnných. Z toho, co bylo zatím uvedeno (a ještě uvedeno bude) v odstavci 1.10.4, je zřejmé, že derivace funkce jedné proměnné, je poměrně mocný nástroj. Stejně tak mocným nástrojem je i derivace funkce více proměnných. U funkcí více proměnných je možné k derivaci přistupovat různým způsobem, v závislosti na tom, co přímo chceme z derivace „vyčíst“. Způsobem, který je jen zobecněným postupem při derivování funkcí více proměnných, je zavedení tzv. **parciálních (částečných) derivací**.

*Poznámka:* Použití parciálních derivací např. na vyšetřování průběhu funkcí, na hledání extrémů funkcí, ... je poněkud složitější, protože vyžaduje více matematického aparátu ke „skloubení jednotlivých parciálních derivací dohromady“, abychom získali nějaké smysluplné výsledky.

##### 1.10.4.6.2 PARCIÁLNÍ DERIVACE FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Parciální (neboli částečné) derivace funkce více proměnných jsou definovány podobně jako derivace funkce jedné proměnné, tj. pomocí limity (viz odstavce 1.10.4.2). Nicméně tím, že obsahují více proměnných, je třeba se nějak „vypořádat“ s proměnnými, podle nichž se nederivuje. Nebudu tedy uvádět přímo definice, budu se snažit problematiku nějak rozumně vysvětlit.

V dalším výkladu se omezím jen na funkce maximálně tří proměnných, protože ty se ve fyzice vyskytují nejčastěji (řada veličin je závislá na prostorových souřadnicích  $x, y, z$ ). Vyskytne-li se funkce čtyř proměnných tj. k prostorovým souřadnicím se přidá ještě čas (např. v kvantové fyzice, teorii relativity, ...), bude situace analogická.

Parciální derivace, jak už vyplývá z názvu, se bude zabývat danou funkcí po částech. Tzn., že se bude zajímat o derivaci ve směru osy  $x$ , osy  $y$ , ... Ostatní proměnné tudíž nechá beze změny. Parciální derivace se značí podobně jako derivace funkce jedné proměnné. Zde ale není možné použít značení pomocí čárky (např.  $f'$ ) jako u funkcí jedné proměnné, protože zde je nutné zdůraznit, podle které proměnné se derivuje.

Pokud bude dána funkce  $f = f(x, y, z)$ , pak se zavádějí tři parciální derivace:

1. parciální derivace funkce  $f$  podle proměnné  $x$ :  $\frac{\partial f}{\partial x}$

2. parciální derivace funkce  $f$  podle proměnné  $y$ :  $\frac{\partial f}{\partial y}$

3. parciální derivace funkce  $f$  podle proměnné  $z$ :  $\frac{\partial f}{\partial z}$

Co se derivování takové funkce týče, je to jednoduché: platí všechna pravidla uvedená v odstavcích 1.10.4.4 a 1.10.4.5, jen je třeba dát pozor na následující věc. Derivujeme-li např. podle  $x$ , všechny ostatní proměnné ( $y, z, \dots$ ) jsou pro nás konstanty.

**Příklad:** Určete parciální derivace funkce  $f$ , která je dána takto:  $f(x, y, z) = \frac{3x^2y + 4y^2 \sin z - z^2}{y+2}$ .

**Řešení:** Podle pravidel z odstavců 1.10.4.4 a 1.10.4.5 budeme postupně určovat jednotlivé parciální derivace s tím, že proměnná, podle níž se nederivuje, je v tuto chvíli konstantou.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3 \cdot 2 \cdot xy + 0 + 0}{y+2} = \frac{6xy}{y+2}$  (výraz  $y+2$  ve jmenovateli zůstal, protože to byla „konstanta“, kterou byl vydělen výraz obsahující  $x$ )

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(3x^2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot y \sin z - 0)(y+2) - 1 \cdot (3x^2y + 4y^2 \sin z - z^2)}{(y+2)^2} = \frac{(3x^2 + 8y \sin z)(y+2) - (3x^2y + 4y^2 \sin z - z^2)}{(y+2)^2} =$

(vzhledem k zadání funkce bylo třeba použít ke správnému derivování vztah pro derivaci podílu)

$= \frac{3x^2y + 8y^2 \sin z + 6x^2 + 16y \sin z - 3x^2y - 4y^2 \sin z + z^2}{(y+2)^2} = \frac{4y^2 \sin z + 6x^2 + 16y \sin z + z^2}{(y+2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{0 + 4y^2 \cos z - 2z}{y+2} = \frac{4y^2 \cos z - 2z}{y+2}$

Tak jako derivace funkce jedné proměnné má význam směrnice tečny, má podobný význam i parciální derivace. Pro lepší vysvětlení významu parciální derivace funkce více proměnných začneme s velmi jednoduchým vysvětlením významu derivace funkce jedné proměnné.

Představme si graf nějaké funkce jedné proměnné - např. funkce  $f: y = x^2$ . Derivace této funkce je  $f'(x) = 2x$ . Víme, že toto číslo určuje v každém bodě grafu funkce  $f$  směrnici tečny. Jinými slovy, pro mravence, který by lezl po drátku z paraboly (byla by umístěná ve svislé rovině) by číslo  $f'(x)$  udávalo v každém bodě sklon této křivky, tj. jak moc to má do kopce nebo z kopce. Jestli jde do kopce nebo z kopce by mravenec poznal podle znaménka čísla  $f'(x)$ : pro  $f'(x) < 0$  jde z kopce, pro  $f'(x) > 0$  jde do kopce a pro  $f'(x) = 0$  by šel po rovině.

Analogická je situace i pro funkce více proměnných. Tentokrát se ale mravenec nepohybuje po drátku, ale po plastické mapě. I tady si může vzít na pomoc derivace (zde ale parciální derivace), které mu pomohou poznat, o jaký terén se jedná. Zde je ale situace trochu odlišná. Bude-li stát mravenec v bodě o souřadnicích

$[x, y, f(x, y)]$  (stojí na grafu funkce dvou proměnných), pak mu parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial x}$  řekne, jak moc půjde

do kopce (z kopce, po rovině), půjde-li ve směru osy  $x$ . Parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial z}$  mu podá tutéž informaci pro trasu

ve směru osy  $y$ . Půjde-li v libovolném jiném směru, je situace poněkud komplikovanější, ale i tento problém je schopna vyřešit vysokoškolská matematika.

### 1.10.5 Průběh funkce

Vyšetřování průběhu funkce patří k základním úlohám diferenciálního počtu. Dříve než ale přistoupíme k vlastnímu vyšetřování průběhu funkce (viz odstavec 1.10.5.8), je třeba se seznámit s dalšími vlastnostmi funkcí, které jsou k vyšetřování jejich průběhu nezbytně nutné.

#### 1.10.5.1 Věty o spojitosti

**Rolleova věta:** Nechť je dána funkce  $f$ , která má tyto vlastnosti:

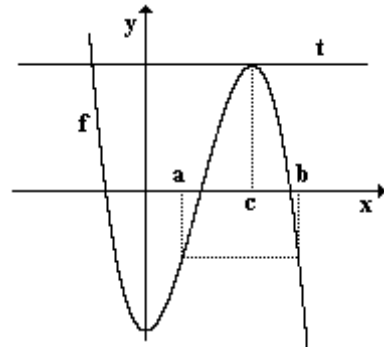
1. je spojitá v uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$
2. v každém bodě otevřeného intervalu  $(a; b)$  má derivaci
3.  $f(a) = f(b)$ .

Potom existuje v otevřeném intervalu  $(a; b)$  alespoň jeden bod  $c$ , v němž  $f'(c) = 0$ .

Větu přiblíží obr. 38, na němž je nakreslena funkce  $f$ , která je spojitá v intervalu  $\langle a; b \rangle$  a pro  $f(a)$  a  $f(b)$  platí  $f(a) = f(b)$ . Graf funkce má v každém bodě tečnu, tj. ve všech bodech otevřeného intervalu  $(a; b)$  existuje derivace funkce  $f$ . Funkce tedy splňuje předpoklady Rolleovy věty, z níž vyplývá, že mezi všemi tečnami sestrojenými k dané funkci na uvažovaném intervalu bude alespoň jedna, která je rovnoběžná s osou  $x$  (tj. její směrnice je nulová).

Nejsou-li splněny všechny předpoklady Rolleovy věty, nemusí být její závěr platný. Takovým příkladem může být např. funkce  $f: y = |x|$  na intervalu  $\langle -4; 4 \rangle$ . Zde není splněn předpoklad o existenci derivace v intervalu  $(-4; 4)$ : v bodě 0 totiž neexistuje derivace. Díky tomu neexistuje bod, v němž by byla tečna rovnoběžná s osou  $x$ . Naproti tomu funkce  $f: y = x^2$  na intervalu  $\langle -1; 2 \rangle$  sice nespĺňuje podmínku o rovnosti funkčních hodnot v koncových bodech intervalu, ale přesto existuje bod, v němž je tečna rovnoběžná s osou  $x$ .

Významnou větou je Lagrangeova věta o střední hodnotě.



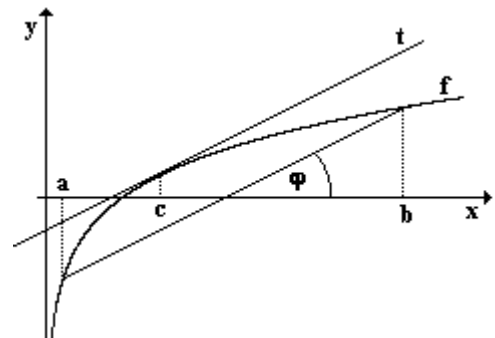
obr. 38

**Lagrangeova věta o střední hodnotě:** Nechť je dána funkce  $f$ , která má tyto vlastnosti:

1. je spojitá v uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$
2. v každém bodě otevřeného intervalu  $(a; b)$  má derivaci.

Potom existuje v otevřeném intervalu  $(a; b)$  alespoň jeden bod  $c$ , pro který platí:  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

Graf funkce, která splňuje podmínky Lagrangeovy věty (viz obr. 39), má v každém bodě  $x \in (a; b)$  tečnu. Tětiva spojující body  $A = [a; f(a)]$  a  $B = [b; f(b)]$  grafu této funkce má směrnici  $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Podle Lagrangeovy věty pak existuje alespoň jedna tečna, která má stejnou směrnici, tj. je s danou tětivou rovnoběžná.



obr. 39

### 1.10.5.2 Monotónnost funkce a derivace

Z učiva o funkcích víme, že funkce, která je buď rostoucí nebo klesající, se označuje názvem monotónní. Na základě Lagrangeovy věty (viz odstavec 1.10.5.1) je možné určit zda jde o funkci rostoucí nebo klesající na základě první derivace funkce.

**V:** Má-li funkce  $f$  v každém bodě intervalu  $(a; b)$  kladnou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí. Má-li funkce  $f$  v každém bodě intervalu  $(a; b)$  zápornou derivaci, je v tomto intervalu klesající.

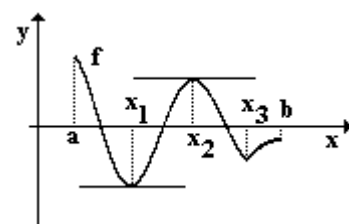
Intervaly, v nichž je funkce rostoucí nebo klesající (tedy monotónní), se nazývají **intervaly monotónnosti**.

### 1.10.5.3 Extrémy funkce a derivace

K určení přesného průběhu funkce je nutné též znalost extrémů funkce. Pojem extrém je souhrnné označení pro maximum nebo minimum funkce. Termínem extrém na množině se označuje největší nebo nejmenší funkční hodnota funkce na dané množině. Touto množinou je většinou celý definiční obor nebo uzavřený interval.

Na obr. 40 je zobrazen graf spojitě funkce  $f$ , o které je možné (co se extrémů týče) říci:

1. v bodě  $a$  nabývá největší hodnoty
2. v bodě  $x_3$  nabývá nejmenší hodnoty
3. v bodech  $x_1$  a  $x_2$  nabývá v jistém smyslu extrémní hodnoty - jedná se o „místní“ neboli **lokální extrémy**, které nemusí představovat největší (nejmenší) hodnoty funkce v uvažovaném intervalu.



obr. 40

**D:** FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $x_0$  **LOKÁLNÍ MAXIMUM**, EXISTUJE-LI TAKOVÉ OKOLÍ  $U(x_0)$  BODU  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x \in U(x_0) \cap D(f)$  PLATÍ:  $f(x) \leq f(x_0)$ .

**D:** FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $x_0$  **LOKÁLNÍ MINIMUM**, EXISTUJE-LI TAKOVÉ OKOLÍ  $U(x_0)$  BODU  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x \in U(x_0) \cap D(f)$  PLATÍ:  $f(x) \geq f(x_0)$ .

Platí-li v uvedených nerovnostech rovnost jen pro  $x = x_0$ , říkáme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  **ostré lokální maximum**, resp. **ostré lokální minimum**.

Z obr. 40, na němž je znázorněn graf spojitě funkce  $f$ , je vidět, že v bodech  $[x_1; f(x_1)]$  a  $[x_2; f(x_2)]$  má graf funkce tečnu a zároveň je zde ostré lokální minimum resp. maximum. Tečny v těchto bodech (tj. v extrémech) jsou rovnoběžné s osou  $x$ , tj. mají nulovou směrnici. Z toho vyplývá, že i (první) derivace funkce  $f$  v těchto dvou bodech je nulová. V bodě  $[x_3; f(x_3)]$  je sice také ostré lokální minimum, ale tečna v tomto bodě neexistuje.

Funkce tedy může mít lokální extrém jen v těch bodech, v nichž je její derivace nulová nebo derivace neexistuje.

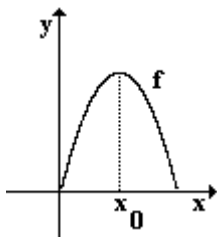
Následující věta dává do souvislosti extrémů funkce s její derivací: Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace  $f'(x_0)$ , pak platí:  $f'(x_0) = 0$ .

**Pozor!** Obrácená věta neplatí. Pokud platí  $f'(x_0) = 0$ , nemusí mít funkce  $f$  v bodě  $x_0$  lokální extrém. Příkladem neplatnosti této obrácené věty je např. funkce  $f: y = x^3$ . Platí  $f'(0) = 0$ , ale v bodě 0 nemá funkce  $f$  lokální extrém.

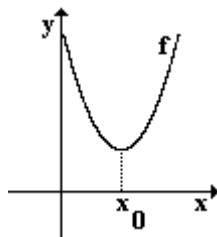
#### 1.10.5.4 Stacionární body

Ze zjištění, že  $f'(x_0) = 0$ , ještě nutně nevyplývá, že funkce má v bodě  $x_0$  lokální extrém. Přesto určení první derivace funkce je prvním krokem k vyhledání lokálních extrémů.

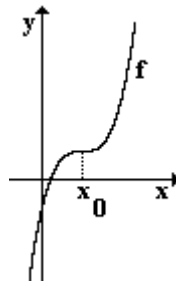
Má-li funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  derivaci a je-li  $f'(x_0) = 0$ , pak se bod  $x_0$  nazývá nulovým bodem derivace nebo **stacionárním bodem**. Tyto stacionární body jsou řešením rovnice  $f'(x) = 0$  a jsou pouze „podezřelé z extrému“.



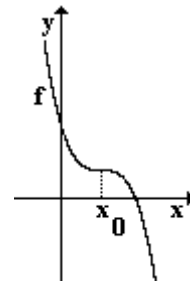
obr. 41



obr. 42



obr. 43



obr. 44

A dál? Dál je možné postupovat podle následující věty: Necht'  $f'(x_0) = 0$ . Jestliže existuje takové okolí  $U(x_0, \delta)$ , že v intervalech  $(x_0 - \delta; x_0)$  a  $(x_0; x_0 + \delta)$  má  $f'(x)$  různá znaménka, má funkce  $f$  v tomto bodě  $x_0$  ostrý lokální extrém. Mění-li se znaménko derivace z plus na minus, má funkce v bodě  $x_0$  lokální maximum (viz obr. 41), mění-li se z minus na plus, má v bodě  $x_0$  lokální minimum (viz obr. 42).

Pokud funkce  $f$  ve stacionárním bodě  $x_0$  (resp. v intervalech  $(x_0 - \delta; x_0)$  a  $(x_0; x_0 + \delta)$ ) znaménko nemění, lokální maximum v daném bodě neexistuje (viz obr. 43 a obr. 44).

#### 1.10.5.5 Extrémy funkce a druhá derivace

Zjišťování změny znaménka první derivace může být u některých funkcí problematické nebo nepříjemné. Proto si ukážeme, jakým způsobem je možné určit lokální extrém na základě druhé derivace funkce. To je výhodné za předpokladu, že výpočet druhé derivace funkce je jednodušší než určování znaménkových změn první derivace.

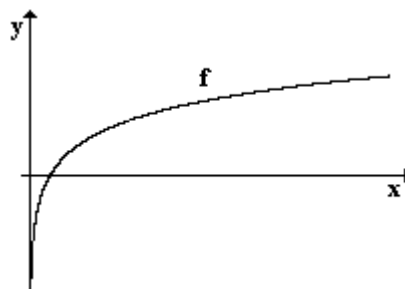
**V:** Necht'  $f'(x_0) = 0$  a necht' existuje v bodě  $x_0$  druhá derivace funkce  $f$ :

1. je-li  $f''(x_0) < 0$ , má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ostré lokální maximum
2. je-li  $f''(x_0) > 0$ , má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ostré lokální minimum.

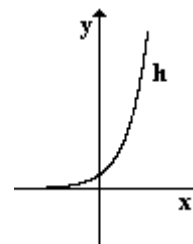
Pokud je  $f''(x_0) = 0$ , není možné o existenci lokálního extrému funkce  $f$  v bodě  $x_0$  rozhodnout.

**1.10.5.6 Konvexnost a konkávnost funkce**

Uvažujme nyní grafy dvou funkcí:  $f: y = \ln x$  (viz obr. 45) a  $h: y = e^x$  (viz obr. 46). Kdybychom k těmto grafům sestrojovali tečny v libovolných bodech, zjistili bychom, že u funkce  $f$  leží vždy graf funkce „pod tečnou“, u funkce  $h$  leží graf vždy „nad tečnou“. Tato skutečnost pomůže určit další vlastnosti funkce: konvexnost a konkávnost. Kdybychom totiž neznali přesný průběh funkcí a věděli jen, že obě jsou rostoucí na svém definičním oboru, nemohli bychom jejich graf sestrojit.



obr. 45



obr. 46

Neznali bychom totiž „průhyb“ funkcí.

**D:** FUNKCE  $f$ , KTERÁ MÁ DERIVACI V BODĚ  $x_0$ , **JE V BODĚ**  $[x_0; f(x_0)]$  **KONVEXNÍ**, EXISTUJE-LI TAKOVÉ OKOLÍ  $U(x_0)$  BODU  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z MNOŽINY  $U(x_0) - \{x_0\}$  LEŽÍ BODY GRAFU FUNKCE  $f$  „NAD TEČNOU“ SESTROJENOU V BODĚ  $[x_0; f(x_0)]$ .

**D:** FUNKCE  $f$ , KTERÁ MÁ DERIVACI V BODĚ  $x_0$ , **JE V BODĚ**  $[x_0; f(x_0)]$  **KONKÁVNÍ**, EXISTUJE-LI TAKOVÉ OKOLÍ  $U(x_0)$  BODU  $x_0$ , ŽE PRO VŠECHNA  $x$  Z MNOŽINY  $U(x_0) - \{x_0\}$  LEŽÍ BODY GRAFU FUNKCE  $f$  „POD TEČNOU“ SESTROJENOU V BODĚ  $[x_0; f(x_0)]$ .

Tuto vlastnost funkce je možné rozšířit i na celý interval: Je-li funkce konvexní (resp. konkávní) v každém bodě intervalu  $I$ , říkáme, že je konvexní (resp. konkávní) v intervalu  $I$ .

Z grafu kvadratické funkce  $f: y = x^2 + 4x + 1$  je vidět, že daná funkce je konvexní (graf funkce leží vždy „nad tečnou“ sestrojenou v daném bodě). Na základě druhé derivace funkce  $f$  ( $y' = 2x + 4$ ,  $y'' = 2$ ), která je kladná, je možné vyslovit následující věty, které platí obecně:

**V:** Je-li  $f''(x_0) > 0$ , pak je funkce  $f$  v bodě  $x_0$  konvexní.

**V:** Je-li  $f''(x_0) < 0$ , pak je funkce  $f$  v bodě  $x_0$  konkávní.

Tyto poznatky platí obecně i pro celý interval, v němž platí uvedené nerovnosti:

**V:** Jestliže v každém bodě intervalu  $I$  platí, že  $f''(x_0) > 0$  (resp.  $f''(x_0) < 0$ ), pak je funkce  $f$  v intervalu  $I$  konvexní (resp. konkávní).

**1.10.5.7 Inflexní body**

Na obr. 43 a obr. 44 jsou znázorněny funkce, které mají v bodě  $x_0$  nulovou první derivaci a přesto v nich není lokální extrém (jde o stacionární bod). Na základě znalostí z odstavce 1.10.5.6 lze říci, že v uvažovaném bodě přechází funkce z funkce konkávní na konvexní (obr. 43) resp. z funkce konvexní na funkci konkávní (obr. 44). Funkce mění v uvažovaném bodě výrazně svůj průběh, proto má daný bod i svůj název.

**D:** NECHŤ FUNKCE  $f$  MÁ V BODĚ  $x_0$  DERIVACI. PŘECHÁZÍ-LI V TOMTO BODĚ GRAF FUNKCE  $f$  Z POLOHY „NAD TEČNOU“ DO POLOHY „POD TEČNOU“ NEBO Z POLOHY „POD TEČNOU“ DO POLOHY „NAD TEČNOU“, NAZÝVÁME BOD  $x_0$  **INFLEXNÍ BOD FUNKCE**  $f$ .

Z toho, co víme o konvexní a konkávní funkci (viz odstavce 1.10.5.6) vyplývá, že v okolí inflexního bodu mění funkce  $f''(x)$  znaménko. Hodnota druhé derivace funkce  $f$  v inflexním bodě tedy bude nulová.

**V:** Je-li bod  $x_0$  inflexním bodem funkce  $f$  a má-li funkce  $f$  v tomto bodě druhou derivaci, pak  $f''(x_0) = 0$ .

**Pozor!** Obrácená věta neplatí. Pokud platí  $f''(x_0) = 0$ , nemusí mít funkce  $f$  v bodě  $x_0$  inflexní bod. Příkladem neplatnosti této obrácené věty je např. funkce  $f: y = x^4$ . Platí  $f''(0) = 0$ , ale bod 0 není inflexním bodem funkce  $f$  - funkce je zde konvexní.

Situace je podobná jako při určování lokálních extrémů funkce - řešením rovnice  $f''(x) = 0$  získáme pouze body „podezřelé z inflexe“. Jistotu získáme až po zjištění znaménkových změn druhé derivace v okolí těchto bodů.

**V:** Nechť funkce  $f$  má druhou derivaci v každém bodě  $\delta$ -okolí bodu  $x_0$  a nechť tato druhá derivace  $f''(x)$  má v intervalech  $(x_0 - \delta; x_0)$  a  $(x_0; x_0 + \delta)$  různá znaménka. Pak bod  $x_0$  je inflexním bodem funkce  $f$ .



### 1.10.5.8 Vyšetřování průběhu funkce

Po výkladu limit (viz odstavec 1.10.2), derivací (viz odstavec 1.10.4) a souvislosti derivací funkce s dalšími jejími vlastnostmi (viz odstavce 1.10.5.1 až 1.10.5.7), je možné začít vyšetřovat průběh libovolné funkce. Hlavním úkolem při vyšetřování průběhu funkce je určení jejích základních vlastností a nakreslení správného grafu funkce (ve smyslu rostoucí - klesající funkce, konkávní - konvexní, asymptoty, krajní body definičního oboru, ...).

Při vyšetřování vlastností a průběhu funkce je vhodné postupovat v tomto pořadí:

1. definiční obor funkce
2. funkce sudá, lichá, periodická - má-li totiž funkce jednu z uvedených vlastností, zjednoduší to vyšetřování jejího průběhu
3. průsečíky s osami kartézského systému souřadnic
4. výpočet limit v krajních bodech definičního oboru
5. výpočet první derivace funkce, určení stacionárních bodů a bodů, v nichž není první derivace definována
6. intervaly monotónnosti
7. lokální extrémy
8. výpočet druhé derivace funkce, určení nulových bodů druhé derivace a bodů, v nichž není druhá derivace funkce definována
9. intervaly konvexnosti a konkávnosti
10. inflexní body
11. asymptoty funkce
12. obor hodnot
13. graf funkce

### 1.10.6 Užití diferenciálního počtu

Užití diferenciálního počtu je velmi široké a zasahuje jak do matematiky, tak do jejích aplikací - fyziky, elektrotechniky, chemie, ... V přírodních vědách se řeší problémy, které se týkají nalezení extrémů určitých veličin, okamžitých změn některých veličin (dráha, rychlost, ...).

Při řešení uvedených úloh je třeba vždy najít vhodné vyjádření funkce, jejíž extrém potom budeme hledat. Některé úlohy z matematiky, fyziky, elektroniky, ... je možné řešit i na základě logické úvahy, tj. bez užití diferenciálního počtu.

## 1.11 Integrální počet

Základními pojmy této kapitoly jsou primitivní funkce a určitý integrál, základní dovedností pak je určení primitivní funkce k dané funkci na daném intervalu. Tato dovednost velice úzce souvisí s derivováním, je ale o něco náročnější. Stejně jako diferenciální počet, má i integrální počet velký význam při studiu přírodních a technických věd.

### 1.11.1 Historický úvod

O rozvoj integrálního počtu se zasloužil anglický fyzik Isaac Newton (1642 - 1727) a německý matematik Bernhard Riemann (1826 - 1866). Na základě toho se často hovoří o Newtonově integrálu a Riemannově integrálu. Tyto dva druhy integrálů se liší pouze přístupem obou pánů k nalezení základních integračních pravidel a ke stanovení podmínek, za kterých je daná funkce integrovatelná:

1. Newtonův integrál - vychází z definice primitivní funkce pomocí derivace funkce (viz odstavec 1.11.2.1). S tímto přístupem se integrály lépe počítají.
2. Riemannův integrál - vychází z konkrétní aplikace integrálu: výpočet obsahu plochy, která je omezená grafem určité funkce. Z toho je zřejmé, že se jedná o integrál určitý (viz odstavec 1.11.3), i když Riemann tímto způsobem studoval i integrály neurčité (integrál jakožto funkce jedné z mezí - horní nebo dolní). Riemannův přístup má výhodu, že je názorný a okamžitě je vidět aplikace integrálu.

Na základě současných znalostí matematické analýzy je možné dokázat, že pro „rozumně se chovající“ funkce je jedno, jestli pro určení jejich integrálu použijeme Newtonův nebo Riemannův přístup. Oba postupy vyjdou nastejno. Přesto se najdou funkce (ty „nerozumně se chovající“), které mají jen jeden z těchto integrálů: buď mají Newtonův a nemají Riemannův integrál nebo naopak.

### 1.11.2 Primitivní funkce

#### 1.11.2.1 Zavedení primitivní funkce

**D:** MĚJME DÁNY FUNKCE  $F$  A  $f$  DEFINOVANÉ V OTEVŘENÉM INTERVALU  $I$ . JESTLIŽE PRO VŠECHNA  $x \in I$  PLATÍ  $F'(x) = f(x)$ , ŘÍKÁME, ŽE FUNKCE  $F$  JE PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI  $f$  V INTERVALU  $I$ .

**Poznámka:** Nebude-li řečeno jinak, budeme intervalem  $I$  rozumět vždy interval otevřený.

Primitivní funkce k dané funkci se tedy definuje pomocí derivace. Zderivováním primitivní funkce  $F$  dostaneme původní funkci  $f$ . Pomocí toho je možné ověřit veškeré výsledky příkladů, v nichž je třeba nalézt primitivní funkci k dané funkci: stačí výslednou funkci zderivovat. Pokud se dostaneme k funkci ze zadání příkladu, počítali jsme správně. Pokud najdeme primitivní funkci, kterou nechceme derivovat kvůli ověření našeho výsledku, je možné podívat se do výsledků sbírky, z níž byl příklad převzat. Zde ale může dojít k jedné nesrovnalosti. Výsledek se může od našeho lišit a přitom jsme mohli počítat dobře. Jak je to možné?

Známe-li v intervalu  $I$  k dané funkci  $f$  jednu primitivní funkci, známe jich nekonečně mnoho. Je-li totiž  $F$  primitivní funkce k funkci  $f$ , pak také každá funkce tvaru  $F(x)+C$ , kde  $C$  je libovolné reálné číslo, je primitivní funkcí k funkci  $f$ , protože  $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$ . Výrazem  $F(x)+C$  jsou vyčerpány všechny možnosti, žádné jiné primitivní funkce k funkci  $f$  neexistují.

Tedy závěr: Je-li funkce  $F$  v intervalu  $I$  primitivní funkcí k funkci  $f$ , pak každá primitivní funkce k funkci  $f$  je tvaru  $F(x)+C$ , kde  $C$  je reálná konstanta.

Známe-li graf jedné primitivní funkce  $F$  k funkci  $f$  v intervalu  $I$ , pak grafy všech primitivních funkcí k funkci  $f$  v intervalu  $I$  dostaneme posunutím grafu funkce  $F$  po ose  $y$ .

Ke každé funkci spojitě v intervalu existuje v tomto intervalu primitivní funkce.

Vzhledem k tomu, že pojem primitivní funkce úzce souvisí s pojmem určitý integrál, používá se pro označení primitivní funkce také zápis:  $\int f(x)dx = F(x)+C$ ;  $x \in I$ . V této souvislosti se funkce  $f$  nazývá **integrand**, symbol  $\int$  **integrační znak**,  $C$  **integrační konstanta**. Symbol  $dx$  slouží k odlišení integrační proměnné od případných parametrů.

Postup, kterým se určuje primitivní funkce  $F(x)+C$  k dané funkci  $f$ , se nazývá **integrování (integrace)** funkce  $f$ .

**Poznámka:** Integrování je opačný proces k derivování (tak jako sčítání - odčítání, umocňování - odmocňování,

...). Intuitivní náhled na to, „odkud se vzalo  $dx$ “, je možné získat ze zápisu derivace:  $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

$\Rightarrow dF(x) = f(x)dx \Rightarrow F(x)+C = \int f(x)dx$ . Matematicky není toto „odvození“ zcela v pořádku, ale pro základní představu stačí.

### **1.11.2.2 Primitivní funkce elementárních funkcí**

Základní pravidla pro derivování (ale i hledání primitivních funkcí) elementárních funkcí jsou uvedena v odstavci 1.10.4.5 v tab. 1.

Nyní základní pravidla pro hledání primitivních funkcí: Existují-li v otevřeném intervalu  $I$  primitivní funkce k funkcím  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  a jsou-li  $c_1$ ,  $c_2$  libovolné konstanty, existuje primitivní funkce k funkci  $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$  a platí:  $\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx$ .

Z uvedené věty vyplývají následující vztahy:

1.  $\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$
2.  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
3.  $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

### **1.11.2.3 Integrační metody**

Uvedeme pouze základní integrační metody. V teoretické matematice a praxi (fyzika, stavitelství, ...) se používá celá řada dalších metod. Většinou se jedná o substituce, které jsou „šité na míru“ danému typu úloh. Zde se seznámíme s používáním těchto metod obecně.

#### **1.11.2.3.1 PER PARTES**

Metoda integrování per partes (integrování po částech) je založena na vztahu pro derivaci součinu dvou funkcí. Jsou-li dány dvě funkce  $u = u(x)$  a  $v = v(x)$ , pak pro derivaci součinu platí:

$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ . Z tohoto poznatku vychází i věta pro integrování metodou per partes.

**V:** Mají-li funkce  $u = u(x)$  a  $v = v(x)$  v intervalu  $(a; b)$  spojitě derivace, pak v  $(a; b)$  platí:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx.$$

**Poznámka:** Metoda per partes vede vždy k cíli (tj. k určení primitivní funkce k zadané funkci), pokud zadaná funkce je ve tvaru součinu polynomu s funkcí sinus, kosinus nebo funkcí exponenciální. V některých případech je ale nutné použít metodu per partes během výpočtu vícekrát.

Nyní uvedeme dva příklady, na kterých zároveň ukážeme způsob zápisu používané metody.

**Příklad:** Vypočtete:  $\int x \cos x dx$ .

**Řešení:** Na výpočet použijeme metodu per partes. Je zvykem během výpočtu si připravit a označit derivace daných funkcí, aby bylo snazší aplikovat metodu per partes:

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \cos x \quad v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

**Příklad:** Vypočtete:  $\int e^x \cdot \sin x dx$ .

**Řešení:** Opět i tento příklad rozepíšeme. Kterou funkci budeme integrovat a kterou derivovat je v tomto případě jedno, protože funkce  $e^x$  se ani jednou z uvedených operací nemění, a funkce  $\sin x$  a  $\cos x$  přecházejí (až na znaménko) jedna v druhou:

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \quad u' = e^x \\ v' = \sin x \quad v = -\cos x \end{array} \right| = e^x \cos x + \int e^x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \quad u' = e^x \\ v' = \cos x \quad v = \sin x \end{array} \right| = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx$$

Nyní jsme se dostali do stavu, kdy na obou stranách rovnice máme tentýž člen ( $\int e^x \cdot \sin x dx$ ), ale s opačným znaménkem. Opačné znaménko není až tak podstatné, důležité je, že při převodu tohoto členu na levou stranu rovnice nevyjde nula, tj. na pravé straně rovnice může být člen, s nímž jsme výpočet začínali, s libovolným násobkem vyjma +1.

Převedením na levou stranu rovnice tedy získáme:  $2 \int e^x \cdot \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x$ . V tuto chvíli to pro nás je jedna rovnice o jedné neznámé a to  $\int e^x \cdot \sin x dx$ . Snadnou úpravou získáme:  $\int e^x \cdot \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C$ .

I tento způsob úpravy se občas v integrálním počtu vyskytne.

### 1.11.2.3.2 SUBSTITUČNÍ METODA

Substituční metoda umožňuje zavedením nové proměnné převést integrovanou funkci na funkci, kterou lze již integrovat snadněji. Substituční metoda vychází v podstatě z věty o derivování složené funkce (viz odstavec 1.10.4.5).

Z věty o derivaci složené funkce a z definice primitivní funkce vyplývá následující úvaha: Nechť existuje k funkci  $y = f(t)$  na intervalu  $(\alpha; \beta)$  primitivní funkce  $F(t) = \int f(t) dt$ , tedy pro každé  $t \in (\alpha; \beta)$  platí:  $F'(t) = f(t)$ . Nechť dále  $t = g(x)$  má derivaci pro každé  $x \in (a; b)$  a pro každé  $x \in (a; b)$  je  $g(x) \in (\alpha; \beta)$ . Dosadíme-li do funkce  $F(t)$  za  $t$  hodnotu  $g(x)$ , dostaneme složenou funkci  $F(g(x))$ . Pro derivaci této funkce pro  $x \in (a; b)$  pak platí:  $[F(g(x))]'' = F'(t) \cdot g'(x) = f(t) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ .

To ale znamená, že funkce  $F(g(x))$  je primitivní funkce k funkci  $f(g(x)) \cdot g'(x)$  a lze tedy psát:  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$  v intervalu  $(a; b)$ .

Vzhledem k tomu, že  $F(t) = \int f(t) dt$  a že  $t = g(x)$ , je možné psát:  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + C$ .

**V (o substituci):** Nechť funkce  $F(t)$  je primitivní funkce k funkci  $f(t)$  v intervalu  $(\alpha; \beta)$ . Nechť funkce  $t = g(x)$  má derivaci  $g'(x)$  v intervalu  $(a; b)$ . Pro každé  $x \in (a; b)$  nechť hodnota  $g(x)$  patří do intervalu  $(\alpha; \beta)$ . Pak v intervalu  $(a; b)$  je funkce  $F(g(x))$  primitivní funkce k funkci  $f(g(x)) \cdot g'(x)$ , tj. platí:  $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt$ , kde  $t = g(x)$ .

Větu o substituci je možné použít k výpočtu primitivní funkce, podaří-li se funkci, kterou máme integrovat, rozložit na dva činitele, z nichž jeden je složenou funkcí proměnné  $x$  s vnitřní funkcí  $g(x)$  a druhý je derivací této funkce  $g$ .

**Příklad:** Vypočtete:  $\int x^2 \cos(2 - x^3) dx$

**Řešení:** Postup řešení, které bude uvedeno, není matematicky nejčistší, nicméně je použitelné v každém případě. Ve většině případů je možné postupovat přesně podle uvedené věty a derivaci vnitřní funkce „vidět“ rovnou.

$$\int x^2 \cos(2-x^3) dx = \left. \begin{array}{l} t = 2-x^3 \\ \frac{dt}{dx} = -3x^2 \Rightarrow dx = \frac{dt}{-3x^2} \end{array} \right| = \int x^2 \cos t \frac{dt}{-3x^2} = -\frac{1}{3} \int \cos t dt = -\frac{1}{3} \sin t = -\frac{1}{3} \sin(2-x^3) + C$$

Po vyřešení příkladu je nutné se vrátit zpět k proměnným, v nichž byl příklad zadán. V našem případě se tedy vrátit zpět od proměnné  $t$  k proměnné  $x$ .

### 1.11.3 Určitý integrál

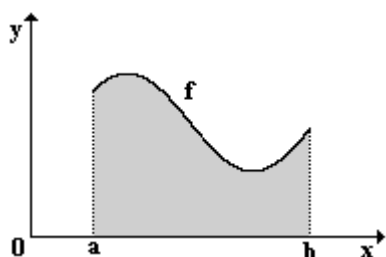
Pojem primitivní funkce (viz odstavec 1.11.2) velmi úzce souvisí s celou řadou konkrétních úloh, které se týkají výpočtu obsahu rovinných obrazců a objemu rotačních těles. Tyto úlohy jsou založeny na pojmu určitý integrál, který se definuje pomocí primitivní funkce.

Vzhledem k tomu, že primitivní funkce byla definována na otevřeném intervalu a vzhledem k tomu, že určitý integrál je vhodné definovat na intervalu uzavřeném, je nutné pojem primitivní funkce nejdříve rozšířit.

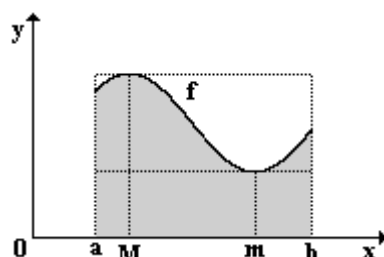
**D:** MĚJME DÁNY FUNKCE  $F$  A  $f$  DEFINOVANÉ NA UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$ . JESTLIŽE PRO KAŽDÉ  $x \in \langle a; b \rangle$  PLATÍ  $F'(x) = f(x)$ , PŘÍČEMŽ DERIVACÍ FUNKCE  $F$  V BODĚ  $a$  ROZUMÍME DERIVACI V BODĚ  $a$  ZPRAVA A DERIVACÍ FUNKCE  $F$  V BODĚ  $b$  DERIVACI FUNKCE  $F$  V BODĚ  $b$  ZLEVA, ŘÍKÁME, ŽE FUNKCE  $F$  JE PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI  $f$  NA UZAVŘENÉM INTERVALU  $\langle a; b \rangle$ .

#### 1.11.3.1 Pojem určitý integrál

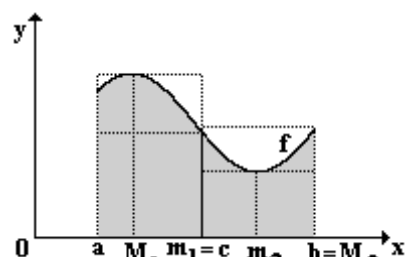
Na obr. 47 je zobrazen graf funkce  $y = f(x)$  pro  $x \in \langle a; b \rangle$ . Funkce  $f(x)$  je v  $\langle a; b \rangle$  spojitá a nezáporná. Graf funkce  $y = f(x)$  pro  $x \in \langle a; b \rangle$ , přímky  $x = a$ ,  $x = b$  a osa  $x$  (tj. přímka  $y = 0$ ) omezují jistý rovinný útvar. Tento útvar se většinou značí  $U = U(a, b, f)$ . Cílem nyní bude určit obsah tohoto útvaru, tj. určit číslo  $S = S(U)$ .



obr. 47



obr. 48



obr. 49

Pro první přiblížení hrubého odhadu čísla  $S = S(U)$  vyjdeme z následující úvahy: V grafu funkce  $f$  si označíme minimum  $m$  a maximum  $M$ . Číslo  $m(b-a)$  označuje plochu obdélníka, který je danému útvaru  $U$  vepsán, zatímco číslo  $M(b-a)$  označuje plochu obdélníka, který je danému útvaru  $U$  opsán (viz obr. 48). Tedy platí nerovnost:  $m(b-a) \leq S(U) \leq M(b-a)$ .

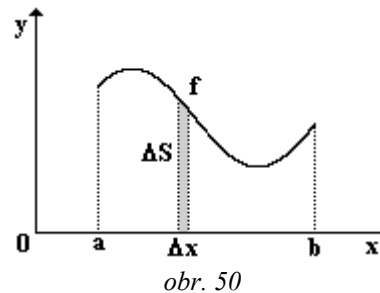
Tento odhad je pouze orientační a je možné ho dále zpřesnit tak, že budeme interval  $\langle a; b \rangle$  postupně dělit na dvě, tři, čtyři, pět, ... části. Na každou takto vytvořenou část znovu zopakujeme předcházející úvahu. Na obr. 49 je zobrazeno dělení intervalu  $\langle a; b \rangle$  na polovinu, tj.  $c-a = b-c$ . Na interval  $\langle a; c \rangle$  aplikujeme výše uvedenou úvahu: najdeme minimum  $m_1 = c$  a maximum  $M_1$  a vypočteme obsah  $m_1(c-a)$  vepsaného a obsah  $M_1(c-a)$  opsaného obdélníka dané části útvaru  $U$ . Totéž provedeme na intervalu  $\langle c; b \rangle$  a najdeme obsah  $m_2(b-c)$  vepsaného a obsah opsaného obdélníka  $M_2(b-c)$  dané části útvaru  $U$ .

Pro obsah útvaru  $U$  tedy platí nerovnost:  $m_1(c-a) + m_2(b-c) \leq S(U) \leq M_1(c-a) + M_2(b-c)$ .

Tímto postupem bychom mohli pokračovat dále. S rostoucím počtem dílů, na něž rozdělíme interval  $\langle a; b \rangle$ , poroste přesnost určení obsahu  $S(U)$  útvaru  $U$ .

Nejpřesnější výsledek dostaneme, pokud by se nám povedlo rozdělit interval  $\langle a; b \rangle$  na velké množství velmi úzkých částí, u nichž bychom mohli předpokládat, že jsou natolik úzké, že maximum i minimum splývají. Jinými slovy, že šířka jedné takové části je skoro nulová (viz obr. 50).

Vyjádřeno matematicky, hledáme takové rozdělení intervalu  $\langle a; b \rangle$ , pro které platí:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$ , kde  $\Delta x$  je šířka částí, na něž byl rozdělen interval  $\langle a; b \rangle$ .



obr. 50

**Poznámka:** Vzhledem k tomu, že  $\Delta x$  má význam délky je  $\Delta x > 0$  a proto jsme uvažovali pouze jednostrannou limitu  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$ .

Právě napsaná limita ale není nic jiného než derivace (zprava) funkce  $S$  podle proměnné  $x$ . Je možné tedy psát:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{dS}{dx} (= S')$ . S použitím vztahu  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$  lze tedy psát:  $\frac{dS}{dx} = f(x) \Rightarrow dS = f(x) \cdot dx$ .

**Poznámka:** Poslední provedená úprava není matematicky zcela v pořádku, nicméně pro získání správné představy základů integrálního počtu je postačující. Z fyzikálního (nebo geometrického) hlediska je úprava naprosto v pořádku, protože umožňuje vypočítat „kousek plochy na základě kousku přírůstku  $x$ -ové souřadnice“.

Nyní je možné již pro plochu útvaru  $U$  psát:  $S = \int f(x) \cdot dx$ . Funkce  $S$  je tedy primitivní funkcí k funkci  $f$  v intervalu  $\langle a; b \rangle$ .

### 1.11.3.2 Definice určitého integrálu

**D:** NECHŤ  $F$  JE PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI  $f$  V INTERVALU  $I$ . ROZDÍL  $F(b) - F(a)$  FUNKČNÍCH HODNOT V LIBOVOLNÝCH BODECH  $a$  A  $b$  TOHOTO INTERVALU SE NAZÝVÁ **URČITÝ INTEGRÁL FUNKCE**  $f$  V MEZÍCH OD  $a$  DO  $b$  A ZNAČÍ SE  $\int_a^b f(x) dx$ .

V právě uvedené definici se proměnná  $x$  nazývá **integrační proměnná**, číslo  $a$  **dolní mez**, číslo  $b$  **horní mezi integrálu**. Funkce  $f$  se nazývá **integrand**. Z definice plyne, že určitý integrál je reálné číslo, které je jednoznačně určeno funkcí  $f$  a mezemi  $a$  a  $b$ .

Při výpočtu integrálu je vhodné zapsat primitivní funkci  $F$  ještě před dosazením mezí. Používá se tento zápis:  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ .

Pro čísla  $a, b$  může platit:  $a < b$ ,  $a > b$  nebo  $a = b$ .

Geometrická interpretace určitého integrálu má smysl pouze pro  $a < b$  a pro funkci  $f$ , která je v intervalu  $\langle a; b \rangle$  spojitá a nezáporná. Za těchto podmínek udává určitý integrál obsah útvaru  $U$ , který je ohraničen grafem funkce  $f$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$ .

Ke každé spojitě v intervalu  $\langle a; b \rangle$  existuje v tomto intervalu primitivní funkce.

### 1.11.3.3 Výpočty určitých integrálů

Při výpočtu určitých integrálů se využívá znalostí některých vět, které (podobně jako u derivací) usnadní výpočet určitého integrálu.

Výsledkem určitého integrálu je **číslo**, tedy ve výsledku se **nesmí** objevit integrační proměnná. Ve výsledku neurčitého integrálu (primitivní funkce) se objevit mohla, protože výsledkem neurčitého integrálu (primitivní funkce) je **funkce**.

**V:** Nechť  $f_1$  a  $f_2$  jsou v intervalu  $I$  spojitě funkce,  $a, b$  nechť jsou libovolné body z intervalu  $I$  a  $c_1$  a  $c_2$  libovolné reálné konstanty. Potom platí:  $\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx$ .

**V:** Je-li  $f$  funkce spojitá a nezáporná v intervalu  $\langle a; b \rangle$ , pak  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**V:** Jsou-li  $f$  a  $g$  funkce spojitě v intervalu  $\langle a; b \rangle$  a je-li  $f(x) \geq g(x)$ , pak  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .

Určitý integrál je možné vypočítat i v případě, kdy je dolní mez větší než mez horní. Platí věta o záměně mezi určitého integrálu.

**V:** Při záměně mezi určitého integrálu se mění znaménko:  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ .

**V (o aditivnosti určitého integrálu):** Je-li funkce  $f$  spojitá v intervalu  $I$ , který obsahuje libovolně položené body  $a, b, c$ , pak platí:  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ .

V případě, že zadaný integrál není možné vypočítat elementárními (tj. uvedenými) metodami, většinou stačí jeho výsledek odhadnout. K tomu slouží následující věta:

**V:** Je-li  $f$  funkce spojitá v intervalu  $\langle a; b \rangle$  a platí-li v intervalu  $\langle a; b \rangle$  nerovnosti  $m \leq f(x) \leq M$ , potom  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ .

### 1.11.3.3.1 SUBSTITUCE V URČITÉM INTEGRÁLU

Substituční metodu, která se používá k výpočtu primitivní funkce (viz odstavec 1.11.2.3.2), je možné použít i pro výpočet určitých integrálů, pokud bude dodrženo jedno z následujících pravidel. V případě zavedení nové proměnné se podle zvolené substituce také změní mezi určitého integrálu. Pokud přepočtení bude náročný, je možné při integraci s nově zavedenou substituční proměnnou použít obecné meze (např.  $\alpha$  a  $\beta$ ) a po zintegrování dané funkce se vrátit zpět k původní proměnné a tedy i k původním mezím.

**V:** Jsou-li funkce  $t = g(x)$  a její derivace  $g'(x)$  spojitě v uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$  a je-li zároveň spojitá i funkce  $f(t)$  pro všechna  $t = g(x)$ , kde  $x \in \langle a; b \rangle$ , pak platí:  $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$ .

**Příklad:** Vypočtete:  $\int_{-\pi}^{2\pi} 4 \sin x \cdot \cos x dx$ .

**Řešení:** Ukážeme dvě řešení daného příkladu (v obou případech budou meze při substituci přepočteny):

a) metoda použití goniometrického vztahu pro sinus dvojnásobného argumentu  $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$$\int_{-\pi}^{2\pi} 4 \sin x \cdot \cos x dx = \int_{-\pi}^{2\pi} 2 \sin 2x dx = \left. \frac{dt}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} \right|_{-\pi}^{2\pi} = \int_{-2\pi}^{4\pi} 2 \sin t \frac{dt}{2} = \int_{-2\pi}^{4\pi} \sin t dt = [-\cos t]_{-2\pi}^{4\pi} =$$

$$= -\cos 4\pi - (-\cos 2\pi) = -1 + 1 = 0$$

b) metoda přímé integrace bez použití goniometrických vztahů:

$$\int_{-\pi}^{2\pi} 4 \sin x \cdot \cos x dx = \left. \frac{dt}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x} \right|_{-\pi}^{2\pi} = \int_{-1}^1 4 \sin x \cdot t \left( -\frac{dt}{\sin x} \right) = -4 \int_{-1}^1 t dt = -4 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = -2 [t^2]_{-1}^1 =$$

$$= -2(1 - (-1)^2) = 0$$

Při řešení tohoto příkladu si můžeme všimnout i toho, že dvěma různými metodami jsme získali dvě různé primitivní funkce k zadané funkci  $f: y = 4 \sin x \cdot \cos x$  a to:  $F_a: y = -\cos 2x$  a  $F_b: y = -2 \cos^2 x$ . Otázkou je, zda se obě funkce liší o konstantu. To je možné zjistit:

$$F_a - F_b = -\cos 2x - (-2 \cos^2 x) = -(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \cos^2 x = -\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

takže je vše v pořádku.

### 1.11.3.3.2 METODA PER PARTES V URČITÉM INTEGRÁLU

Stejně jako pro výpočet primitivní funkce bylo možné použít metodu per partes (viz odstavec 1.11.2.3.1), je možné tuto metodu použít i u určitého integrálu.

**V:** Mají-li funkce  $u = u(x)$  a  $v = v(x)$  v intervalu  $\langle a; b \rangle$  spojitě derivace, pak platí:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx.$$

**Příklad:** Vypočtete:  $\int_1^{2e} \frac{1}{2} \ln x dx$

**Řešení:** Tento příklad uvádíme proto, aby nikoho nepřekvapilo, že je možné integrovat přirozený logaritmus. A to metodou per partes. Během výpočtu je třeba dávat pozor, že se jedná o integrál určitý:

$$\int_1^{2e} \frac{1}{2} \ln x dx = \frac{1}{2} \int_1^{2e} \ln x dx = \frac{1}{2} \int_1^{2e} 1 \cdot \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 \quad v = x \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left( [x \ln x]_1^{2e} - \int_1^{2e} x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{2} \left( [x \ln x]_1^{2e} - \int_1^{2e} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( [x \ln x]_1^{2e} - [x]_1^{2e} \right) = \frac{1}{2} (2e \ln 2e - 1 \cdot \ln 1 - (2e - 1)) = \frac{1}{2} (2e \ln 2e - 1 \cdot 0 - 2e + 1) =$$

$$= e(\ln 2e - 1) + \frac{1}{2} = e(\ln 2 + \ln e - 1) + \frac{1}{2} = e(\ln 2 + 1 - 1) + \frac{1}{2} = e \ln 2 + \frac{1}{2}$$

### 1.11.4 Užití integrálního počtu

Užití integrálního počtu je velmi široké - obsahy rovinných útvarů, objemy a povrchu rotačních těles, délky rovinných křivek, fyzikální úlohy, ...

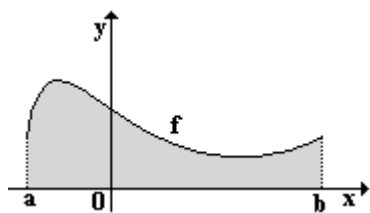
#### 1.11.4.1 Obsah rovinného obrazce

##### 1.11.4.1.1 ÚTVAR OMEZENÝ GRAFEM JEDNÉ FUNKCE

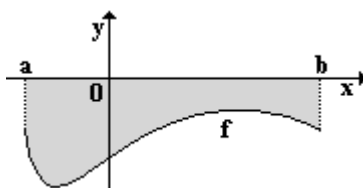
Rovinný útvar  $U = U(a, b, f)$  je (jak bylo uvedeno již v odstavci 1.11.3.1) omezen grafem spojitě nezáporné funkce  $y = f(x)$  pro  $x \in \langle a, b \rangle$ , přímkami  $x = a$ ,  $x = b$  a osou  $x$  (tj. přímkou  $y = 0$ ). Příklad takového útvaru je znázorněn na obr. 51. Pro jeho obsah pak platí:  $S(U) = \int_a^b f(x) dx$ .

Může se ale stát, že integrovaná funkce  $f$  nenabývá jen kladných hodnot (viz obr. 52). Pro příslušný integrál pak platí  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ . V tomto případě určíme obsah daného útvaru tak, že vypočítáme absolutní

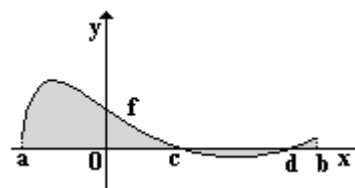
hodnotu příslušného určitého integrálu; tedy platí:  $S(U) = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx$ .



obr. 51



obr. 52



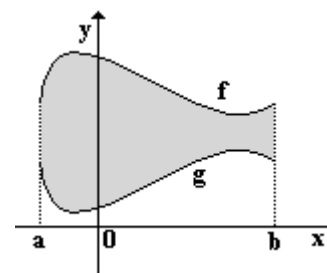
obr. 53

Obecně se může vyskytnout funkce, která v uvažovaném intervalu  $\langle a, b \rangle$  nabývá jak kladných tak i záporných funkčních hodnot. V tomto případě interval  $\langle a, b \rangle$  rozdělíme na intervaly, v nichž funkce nabývá nekladných (resp. nezáporných) hodnot, a příslušné integrály vypočteme podle výše uvedených vztahů. Pro obrazec na obr. 53 tedy bude platit vztah, který vyplývá z aditivnosti určitého integrálu:

$$S(U) = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \int_d^b f(x) dx.$$

##### 1.11.4.1.2 ÚTVAR OMEZENÝ GRAFEM VÍCE FUNKCÍ

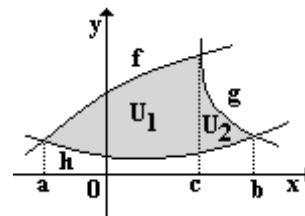
Na obr. 54 je znázorněn útvar  $U = U(a, b, f, g)$ , který je omezen grafem spojitých funkcí  $f$  a  $g$  a přímkami  $x = a$  a  $x = b$ . Pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$  platí:  $f(x) \geq g(x)$  a obě funkce jsou v uvažovaném intervalu nezáporné. Označíme-li  $S(U_1) = S(U(a, b, f))$  a  $S(U_2) = S(U(a, b, g))$ , pak pro obsah útvaru  $U$  platí:  $S(U) = S(U_1) - S(U_2)$ , tj.:  $S(U) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ .



obr. 54

Uvedený vztah platí i v případě, kdy alespoň jedna z funkcí nabývá v intervalu  $\langle a, b \rangle$  také záporných hodnot. Posunutím obou grafů po ose  $y$  tak, aby obě funkce byly nezáporné, převedeme tento případ na předchozí. Posunem obou křivek se obsah daného útvaru nezmění.

Na obr. 55 je znázorněn případ útvaru, který je v intervalu  $\langle a; b \rangle$  ohraničen třemi křivkami. V tomto případě platí:  $S(U) = S(U_1) + S(U_2)$ , přičemž průnikem útvarů  $U_1$  a  $U_2$  je hraniční úsečka. Plochu útvaru  $U$  pak vypočítáme na základě vztahu:  $S(U) = \int_a^c [f(x) - h(x)] dx + \int_c^b [g(x) - h(x)] dx$ .



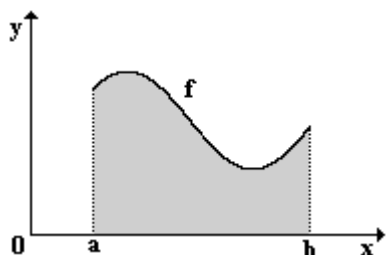
obr. 55

Ani v tomto případě nezávisí na znaménkách funkčních hodnot funkcí  $f, g$  a  $h$  v intervalu  $\langle a; b \rangle$ .

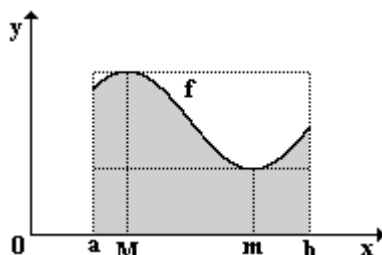
### 1.11.4.2 Objem rotačního tělesa

Nyní se budeme zabývat výpočtem objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru  $U = U(a, b, f)$  kolem osy  $x$ . Úvahy, pomocí nichž dospějeme k výslednému vztahu, budou podobné jako úvahy, které vedly k definici určitého integrálu (viz odstavec 1.11.3.1).

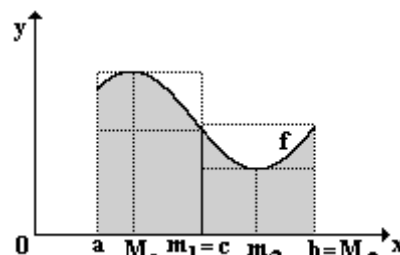
Na obr. 56 je zobrazen rovinný útvar, jehož rotací kolem osy  $x$  vznikne rotační těleso. Jeho objem označíme  $V$ .



obr. 56



obr. 57



obr. 58

Pro první přiblížení hrubého odhadu objemu  $V$  vzniklého tělesa vyjdeme z následující úvahy: V grafu funkce  $f$  si označíme minimum  $m$  a maximum  $M$ . Číslo  $m$  označuje poloměr válce, který je rotačnímu tělesu vepsán, zatímco číslo  $M$  označuje poloměr válce, který je rotačnímu tělesu opsán (viz obr. 57, který znázorňuje rovinný útvar rotující kolem osy  $x$ ). Pro hledaný objem rotačního tělesa platí tedy nerovnost:  $\pi m^2 (b - a) \leq V \leq \pi M^2 (b - a)$ .

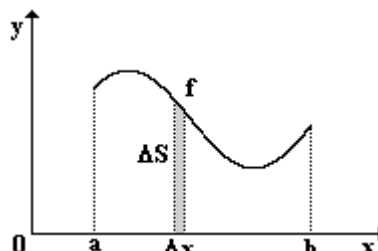
Tento odhad je pouze orientační a je možné ho dále zpřesnit tak, že budeme interval  $\langle a; b \rangle$  postupně dělit na dvě, tři, čtyři, pět, ... části. Na každou takto vytvořenou část znovu zopakujeme předcházející úvahu. Na obr. 58 je zobrazeno dělení intervalu  $\langle a; b \rangle$  na polovinu, tj.  $c - a = b - c$ . Na interval  $\langle a; c \rangle$  aplikujeme výše uvedenou úvahu: najdeme minimum  $m_1 = c$  a maximum  $M_1$  a vypočteme objem  $\pi m_1^2 (c - a)$  vepsaného a objem  $\pi M_1^2 (c - a)$  opsaného válce dané části rotačního tělesa. Totéž provedeme na intervalu  $\langle c; b \rangle$  a najdeme objem  $\pi m_2^2 (b - c)$  vepsaného a objem opsaného válce  $\pi M_2^2 (b - c)$  dané části rotačního tělesa.

Pro objem rotačního tělesa tedy platí nerovnost:  $\pi m_1^2 (c - a) + \pi m_2^2 (b - c) \leq V \leq \pi M_1^2 (c - a) + \pi M_2^2 (b - c)$ .

Tímto postupem bychom mohli pokračovat dále. S rostoucím počtem dílů, na něž rozdělíme interval  $\langle a; b \rangle$ , poroste přesnost určení objemu rotačního tělesa, které vzniklo rotací útvaru  $U$  kolem osy  $x$ .

Nejpřesnější výsledek dostaneme, pokud by se nám povedlo rozdělit interval  $\langle a; b \rangle$  na velké množství velmi úzkých částí, u nichž bychom mohli předpokládat, že jsou natolik úzké, že maximum i minimum splývají. Jinými slovy, že šířka jedné takové části je skoro nulová (viz obr. 59).

Vyjádřeno matematicky, hledáme takové rozdělení intervalu  $\langle a; b \rangle$ , pro které platí:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi f^2(x)$ , kde  $\Delta x$  je šířka částí, na něž byl rozdělen interval  $\langle a; b \rangle$ .



obr. 59

**Poznámka:** Vzhledem k tomu, že  $\Delta x$  má význam délky, je  $\Delta x > 0$  a proto jsme uvažovali pouze jednostrannou

limitu  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi f^2(x)$ .



Právě napsaná limita ale není nic jiného než derivace (zprava) funkce  $V$  podle proměnné  $x$ . Je možné tedy psát:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dV}{dx} (=V')$ . S použitím vztahu  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi f^2(x)$  lze tedy psát:  $\frac{dV}{dx} = \pi f^2(x) \Rightarrow dV = \pi f^2(x).dx$ .

**Poznámka:** Poslední provedená úprava, jak už víme, není matematicky zcela v pořádku. Nicméně pro získání základní představy „odvození“ vztahu pro výpočet objemu rotačního tělesa je postačující. Z fyzikálního (nebo geometrického) hlediska je úprava naprosto v pořádku, protože umožňuje vypočítat „kousek objemu na základě kousku přírůstku  $x$ -ové souřadnice“.

**V:** Objem  $V$  rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru  $U = U(a, b, f)$  kolem osy  $x$ , je dán vztahem:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x).dx.$$

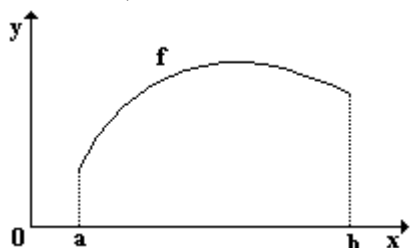
Analogicky bychom postupovali v případě, že těleso vznikne rotací rovinného útvaru  $U = U(a, b, f)$  kolem osy  $y$ . V tomto případě by bylo nutné místo funkce  $f = f(x)$  vyjádřit funkci  $g = g(y)$ . Stejně tak meze, kterými by bylo ohraničeno těleso (a tedy i meze integrálu), bychom hledali na ose  $y$ .

**V:** Objem  $V$  rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru  $U = U(a, b, f)$  kolem osy  $y$ , je dán vztahem:

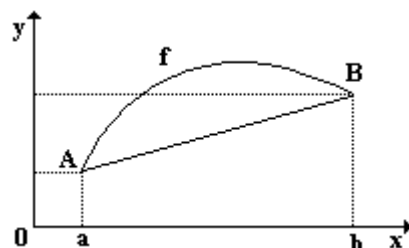
$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} g^2(y).dy.$$

### 1.11.4.3 Délka křivky

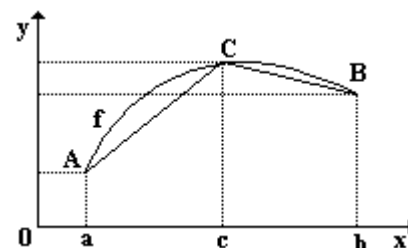
Pro výpočet délky křivky provedeme podobné úvahy, jako při odvozování plošného obsahu útvaru ohraničeného grafem funkce (viz odstavec 1.11.4.1) nebo při odvozování objemu rotačního tělesa (viz odstavec 1.11.4.2).



obr. 60



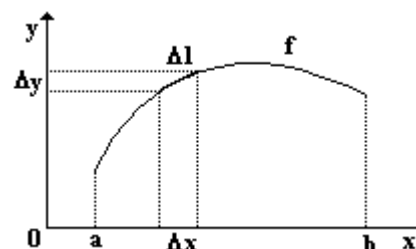
obr. 61



obr. 62

Na obr. 60 je zobrazena spojitá funkce  $f$ , jejíž graf představuje určitou křivku. Její délku  $l$  v intervalu  $\langle a; b \rangle$  budeme chtít nyní určit. Jako první odhad délky poslouží délka úsečky  $AB$  (viz obr. 61). Lepší odhad ostaneme, pokud interval  $\langle a; b \rangle$  rozdělíme na více částí (viz obr. 62): zde délku křivky (grafu funkce  $f$ ) aproximujeme délkou lomené čáry  $ACB$ .

Právě uvedeným postupem je možné pokračovat dále. S rostoucí počte lomených čar, které nahradí uvažovanou křivku, bude výsledek (tj. na základě lomené čáry  $A..B$  nahrazená délka) přesnější a bude se stále více blížit délce skutečné křivky. Ideální by bylo, kdybychom interval  $\langle a; b \rangle$  rozdělili na velké množství částí, u nichž bychom mohli předpokládat, že lomená čára je přesně stejná, jako délka křivky na zvolené části intervalu  $\langle a; b \rangle$ . Jinými slovy hledáme takové rozdělení intervalu  $\langle a; b \rangle$ , kdy délka jedné části intervalu  $\langle a; b \rangle$  je skoro nulová, tj.  $\Delta x \rightarrow 0$  (viz obr. 63).



obr. 63

Na základě obr. 63 je možné pro element („kousek“)  $\Delta l$  délky křivky  $l$  psát:  $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$  (na základě Pythagorovy věty). Právě uvedenou rovnost je možné dále upravit:

$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$ . Vzhledem k tomu, že požadujeme, aby délka jedné části intervalu  $\langle a; b \rangle$  byla malá, bude malý i přírůstek délky křivky  $\Delta l$ . Matematicky vyjádřeno, je možné psát:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

**Poznámka:** Vzhledem k tomu, že  $\Delta x$  má význam délky, je  $\Delta x > 0$  a proto jsme uvažovali pouze jednostrannou

$$\text{limitu } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Limita na levé straně není nic jiného než derivace (zprava) funkce  $l$  podle proměnné  $x$ , tj.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{dl}{dx}$ .

Podobně je možné psát:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ . Na základě právě provedených úvah je možné psát:

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Rightarrow dl = dx \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Rightarrow l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Poznámka:** Jak už víme, předposlední provedená úprava není matematicky zcela v pořádku. Nicméně pro získání základní představy „odvození“ vztahu pro výpočet délky křivky je postačující. Z fyzikálního (nebo geometrického) hlediska je úprava naprosto v pořádku, protože umožňuje vypočítat „kousek délky na základě kousku přírůstku  $x$ -ové souřadnice“.

**V:** Nechť je dána funkce  $f$ , která je spojitá v intervalu  $\langle a; b \rangle$  a která má ve všech jeho vnitřních bodech derivaci.

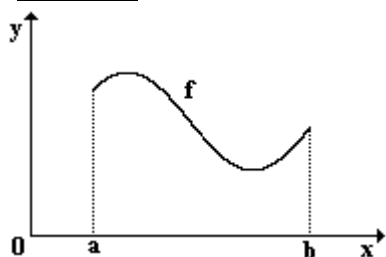
Délka  $l$  křivky, která je grafem této funkce  $f$  na intervalu  $\langle a; b \rangle$ , je dán vztahem:  $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

#### 1.11.4.4 Povrch rotačního tělesa

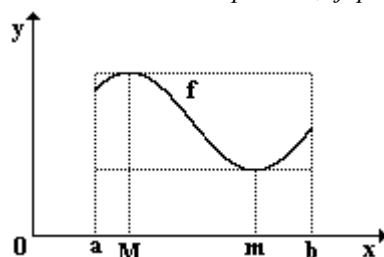
Nyní se budeme zabývat výpočtem povrchu rotační plochy (tj. pláště rotačního tělesa), která vznikne rotací grafu spojitě funkce  $f$  kolem osy  $x$ . Úvahy, pomocí nichž dospějeme k výslednému vztahu, budou podobné jako úvahy, které vedly k definici určitého integrálu (viz odstavec 1.11.3.1).

Na obr. 64 je zobrazen graf spojitě funkce  $f$  definované na uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$ , jehož rotací kolem osy  $x$  vznikne rotační plocha (rotační těleso). Její povrch označíme  $S$ .

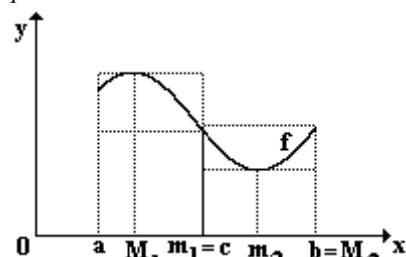
**Poznámka:** Povrch rotačního tělesa budeme uvažovat bez podstav, tj. pouze pláště.



obr. 64



obr. 65



obr. 66

Pro první přibližný hrubý odhad povrchu  $S$  vzniklého tělesa vyjdeme z následující úvahy: V grafu funkce  $f$  si označíme minimum  $m$  a maximum  $M$ . Číslo  $m$  označuje poloměr válce, který je rotačnímu tělesu vepsán, zatímco číslo  $M$  označuje poloměr válce, který je rotačnímu tělesu opsán (viz obr. 65, který znázorňuje graf funkce  $f$  rotující kolem osy  $x$ ). Pro hledaný povrch rotačního tělesa platí tedy nerovnost:  $2\pi m(b-a) \leq S \leq 2\pi M(b-a)$ .

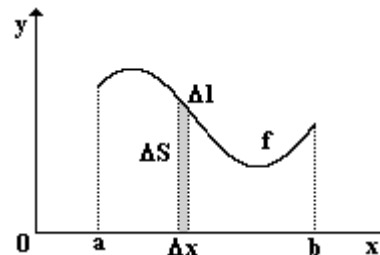
Tento odhad je pouze orientační a je možné ho dále zpřesnit tak, že budeme interval  $\langle a; b \rangle$  postupně dělit na dvě, tři, čtyři, pět, ... části. Na každou takto vytvořenou část znovu zopakujeme předcházející úvahu. Na obr. 66 je zobrazeno dělení intervalu  $\langle a; b \rangle$  na polovinu, tj.  $c-a = b-c$ . Na interval  $\langle a; c \rangle$  aplikujeme výše uvedenou úvahu: najdeme minimum  $m_1 = c$  a maximum  $M_1$  a vypočteme povrch  $2\pi m_1(c-a)$  vepsaného a povrch  $2\pi M_1(c-a)$  opsaného válce dané části rotačního tělesa. Totéž provedeme na intervalu  $\langle c; b \rangle$  a najdeme povrch  $2\pi m_2(b-c)$  vepsaného a povrch opsaného válce  $2\pi M_2(b-c)$  dané části rotačního tělesa.

Pro povrch pláště rotačního tělesa tedy platí tato nerovnost:  $2\pi m_1(c-a) + 2\pi m_2(b-c) \leq S \leq 2\pi M_1(c-a) + 2\pi M_2(b-c)$ .

Tímto postupem bychom mohli pokračovat dále. S rostoucím počtem dílů, na něž rozdělíme interval  $\langle a; b \rangle$ , poroste přesnost určení povrchu rotačního tělesa, které vzniklo rotací grafu funkce  $f$  kolem osy  $x$ .

Nejpřesnější výsledek dostaneme, pokud by se nám povedlo rozdělít interval  $\langle a; b \rangle$  na velké množství velmi úzkých částí, u nichž bychom mohli předpokládat, že jsou natolik úzké, že maximum i minimum skoro splývají. Jinými slovy, že šířka jedné takové části je skoro nulová (viz obr. 67).

Vyjádřeno matematicky, hledáme takové rozdělení intervalu  $\langle a; b \rangle$ , pro které platí:  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta l} = 2\pi f(x)$ ,  $\Delta l$  je délka části grafu funkce  $f$ , která odpovídá části  $\Delta x$  intervalu  $\langle a; b \rangle$ . Element délky  $\Delta l$  grafu funkce  $f$  představuje výšku elementárního válečku, který na části  $\Delta x$  intervalu  $\langle a; b \rangle$ , nahrazuje rotační těleso.



obr. 67

**Poznámka:** Vzhledem k tomu, že  $\Delta l$  má význam délky, je  $\Delta l > 0$  a proto jsme uvažovali pouze jednostrannou limitu  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta l} = 2\pi f(x)$ .

Právě napsaná limita ale není nic jiného než derivace (zprava) funkce  $S$  podle proměnné  $l$ . Je možné tedy psát:  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta l} = \frac{dS}{dl} (= S')$ . S použitím vztahu  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta l} = 2\pi f(x)$  lze tedy psát:  $\frac{dS}{dl} = 2\pi f(x) \Rightarrow dS = 2\pi f(x) \cdot dl$ .

Element  $dl$  délky grafu funkce  $f$  je možné napsat podle odvození z odstavce 1.11.4.3 ve tvaru:  $dl = dx \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ . Pro element  $dS$  povrchu pak lze tedy psát:  $dS = 2\pi f(x) dl = 2\pi f(x) dx \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ .

Odtud pak dostáváme:  $S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

**Poznámka:** Poslední provedené úpravy, jak už víme, nejsou matematicky zcela v pořádku. Nicméně pro získání základní představy „odvození“ vztahu pro výpočet povrchu pláště rotačního tělesa jsou postačující. Z fyzikálního (nebo geometrického) hlediska je úprava naprosto v pořádku, protože umožňuje vypočítat „kousek povrchu pláště na základě kousku přírůstku  $x$ -ové souřadnice (resp. délky křivky)“. Odvození na úrovni vysoké školy je náročnější, i když jednodušší. Jednodušší proto, že okamžitě vyplývá z jistých vět, náročnější proto, že dokázat a pochopit tyto věty není na úrovni střední školy zcela triviální.

**V:** Nechť je dána funkce  $f$ , která je spojitá v intervalu  $\langle a; b \rangle$  a která má ve všech jeho vnitřních bodech derivaci. Povrch  $S$  pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu této funkce  $f$  kolem osy  $x$ , je dán vztahem:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

## 1.12 Tenzory

Ve fyzice se setkáváme s řadou fyzikálních veličin, které se podstatným způsobem liší: u některých stačí k jejich plné charakteristice jedno číslo, u jiných je potřeba čísel více. Podle toho můžeme fyzikální veličiny rozdělit na:

1. **skaláry (tenzory 0. řádu)** - veličiny, k jejichž plnému popisu stačí jediné číslo ( $3^0 = 1$ ); jedná se např. o hmotnost, teplotu, hustotu, ...
2. **vektory (tenzory 1. řádu)** - veličiny, které k plnému popisu potřebují tři čísla (složky:  $3^1 = 3$ ); jedná se např. o sílu, zrychlení, rychlost, ...
3. **tenzory 2. řádu** - veličiny, k jejichž popisu je nutné znát devět čísel (složek:  $3^2 = 9$ ); jedná se např. o moment setrvačnosti, napětí při deformaci pružných těles, ...
4. **tenzory vyšších řádů** - veličiny, které ke svému plnému popisu potřebují znalost obecně  $3^n$  ( $n \in \mathbb{N}; n \geq 3$ ) čísel (složek); jedná se např. o tenzor piezoelektrických vlastností krystalu (27 složek), tenzor napětí anizotropního tělesa (81 složek), ...

Pochopitelně, že ne každý libovolný výběr  $3^n$  čísel tvoří složky tenzoru  $n$  - tého řádu. Souřadnice tenzoru mohou být ale v různých bodech prostoru různé a mohou se měnit v závislosti na čase. Složky tenzoru tedy mohou být funkcí jak prostoru tak času.

Dříve než se dostaneme k tenzorům, zavedeme pojmy skaláry a vektory, které jsou sice intuitivně jasné, ale které výborně poslouží při definici tenzoru. Za vztahnou soustavu budeme vždy volit kartézský systém souřadnic.

### 1.12.1 Skaláry

**D: SKALÁR** JE VELIČINA, V LIBOVOLNÉM SOUŘADNÉM SYSTÉMU DEFINOVANÁ JEDINÝM ČÍSLEM (NEBO FUNKCÍ), KTERÉ SE PŘI ZMĚNĚ SOUŘADNÉHO SYSTÉMU NEZMĚNÍ.

**Poznámka:** Změnou souřadného systému je myšlena vždy některá z transformací kartézského systému souřadnic popsaná v odstavcích 1.6.

Skalár je tedy **invariantem** (konstantní) vzhledem k transformacím kartézského systému souřadnic, při němž se nemění jednotky měřítek na osách kartézského systému (tj. že jedna soustava nevznikne z jiné např. natažením jedné z os).

**Příklad:** V kartézské soustavě  $Oxy$  v rovině jsou dány dva body  $A = [x_A; y_A]$  a  $B = [x_B; y_B]$ . Dokažte, že délka úsečky  $AB$  je skalár.

**Řešení:** Délka úsečky  $AB$  dvou bodů v rovině je vztahem, který vychází z Pythagorovy věty:

$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ . Budeme-li chtít nyní vyjádřit délku této úsečky v soustavě souřadnic  $Ox'y'$ , která vznikne z původní soustavy souřadnic  $Oxy$  otočením a následným posunem počátku do bodu o souřadnicích  $[x_0; y_0]$ , je možné vyjádřit souřadnice bodů  $A$  a  $B$  v této čárkované soustavě souřadnic pomocí

transformačních vztahů, které byly odvozeny v odstavci 1.6.1.3: 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Bod  $A'$  má tedy souřadnice  $A' = [x'_A; y'_A] = [x_A \cos \alpha - y_A \sin \alpha - x_0; x_A \sin \alpha + y_A \cos \alpha - y_0]$ , analogicky pro bod  $B'$  dostáváme:  $B' = [x'_B; y'_B] = [x_B \cos \alpha - y_B \sin \alpha - x_0; x_B \sin \alpha + y_B \cos \alpha - y_0]$ . Pro délku úsečky  $A'B'$  pak platí:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2} = \sqrt{(\cos \alpha (x_A - x_B) - \sin \alpha (y_A - y_B))^2 + (\sin \alpha (x_A - x_B) + \cos \alpha (y_A - y_B))^2} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \alpha (x_A - x_B)^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha (x_A - x_B)(y_A - y_B) + \sin^2 \alpha (y_A - y_B)^2 + \\ &+ \sin^2 \alpha (x_A - x_B)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha (x_A - x_B)(y_A - y_B) + \cos^2 \alpha (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = |AB| \end{aligned}$$

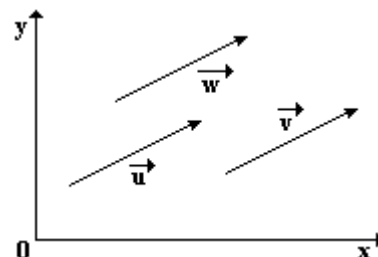
### 1.12.2 Vektory

Vektorové veličiny (posunutí, síla, zrychlení, ...) jsou dány trojicí reálných čísel nebo funkcí. Je třeba si ale uvědomit, že vektor není libovolná kombinace tří čísel, není to výběr tří skalárních veličin.

**Příklad:** Dvěma čísly (tj. dvěma skaláry: tlakem a teplotou) je možné popsat stav ideálního plynu a stejně tak dvěma čísly (dvěma skaláry: rozdíly  $\Delta x$  a  $\Delta y$  je možné popsat posunutí v rovině. Při změně souřadného systému souřadného systému se teplota ani tlak nezmění, protože z těchto veličin není možné vytvořit vektor, zatímco rozdíly souřadnic se změní přesně podle příslušné transformace (na základě příkladu z odstavce 1.12.1 je ale jasné, že velikost uvažovaného posunutí se nezmění). (Navíc není možné, aby každá ze souřadnic vektoru měla jinou jednotku!)

Trojice čísel nebo funkcí, která definují vektor, se při změně souřadného systému změní. Změní se ovšem podle takového zákona, podle kterého obě trojice v každém ze souřadných systémů definují jeden a tentýž vektor. Nejobecnější transformací kartézského systému souřadnic je jeho otočení (viz odstavce 1.6.2) spojené s posunutím. Vzhledem k tomu, že vektor je dán pouze rozdíly souřadnic  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  a  $\Delta z$ , je pro nás posunutí nezajímavé, protože posun by se projevil pouze v souřadnicích bodů a nikoliv v souřadnicích rozdílů (při rozdílu souřadnic dvou bodů se posun vzájemně odečte). Při této příležitosti je vhodné připomenout rozdíl mezi **vektorem** a **umístěním vektoru**.

Na obr. 68 jsou znázorněny vektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$ , které jsou různými umístěními téhož vektoru  $\vec{u}$ . Všechny tři vektory mají totiž stejnou velikost, stejné souřadnice (jsou dány rozdílem počátečního a koncového bodu vektoru). Skutečnost, do jakého bodu vektor umístíme, neovlivní souřadnice daného vektoru. Tento fakt vychází z toho, že vektoru je možné přiřadit orientovanou úsečku v prostoru, a tudíž jeho složky odpovídají rozdílům kartézských souřadnic počátečního a koncového bodu této úsečky.



obr. 68

Definice vektoru vychází z definičních vztahů transformace kartézského systému souřadnic uvedených v odstavci 1.6.2. V tomto odstavci je možné také najít legendu k použitému značení.

**D: VEKTOR** JE VELIČINA, DEFINOVANÁ V KAŽDÉM SOUŘADNÉM SYSTÉMU TROJICÍ ČÍSEL (NEBO FUNKCÍ)  $v_1, v_2, v_3$ , KTERÉ SE PŘI ZMĚNĚ SOUŘADNÉHO SYSTÉMU MĚNÍ PODLE VZTAHŮ:

$$v'_1 = v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \beta_1 + v_3 \cos \gamma_1$$

$$v'_2 = v_1 \cos \alpha_2 + v_2 \cos \beta_2 + v_3 \cos \gamma_2$$

$$v'_3 = v_1 \cos \alpha_3 + v_2 \cos \beta_3 + v_3 \cos \gamma_3.$$

ČÍSLA (NEBO FUNKCE)  $v_1, v_2, v_3$  NAZÝVÁME **SLOŽKY VEKTORU**.

Tato definice umožňuje přejít přirozeným způsobem k definici tenzoru druhého a vyššího řádu (viz odstavec 1.12.3), jednak dovoluje z jednotného hlediska zkoumat tenzorové vlastnosti fyzikálních veličin.

### 1.12.3 Tenzory 2. řádu

Povídání o tenzorech zestručním na nejvyšší možnou míru. Odstavce o tenzorech a jejich vlastnostech neplatí obecně - zaměřím se jen na tenzory druhého řádu (tj. na ty nejjednodušší). Ani zde ale nebude podán výklad kompletní. V případě speciálních požadavků na vysokých školách je nutno nastudovat detailnější literaturu.

Podobným způsobem jakým se definuje vektor (viz odstavec 1.12.2), je možné definovat i tenzor:

**D: TENZOR 2. ŘÁDU** JE VELIČINA, V KAŽDÉM SOUŘADNÉM SYSTÉMU DEFINOVANÁ DEVÍTI ČÍSLY (NEBO FUNKCEMI)  $T_{ij}$  (PRO  $i, j = 1, 2, 3$ ), KTERÉ SE PŘI ZMĚNĚ TOHOTO SOUŘADNÉHO SYSTÉMU MĚNÍ NA  $T'_{ij}$  PODLE VZTAHŮ:

$$T'_{ij} = T_{11} \cos \alpha_i \cos \alpha_j + T_{12} \cos \alpha_i \cos \beta_j + T_{13} \cos \alpha_i \cos \gamma_j + \\ + T_{21} \cos \beta_i \cos \alpha_j + T_{22} \cos \beta_i \cos \beta_j + T_{23} \cos \beta_i \cos \gamma_j + \\ + T_{31} \cos \gamma_i \cos \alpha_j + T_{32} \cos \gamma_i \cos \beta_j + T_{33} \cos \gamma_i \cos \gamma_j .$$

ČÍSLA  $T_{ij}$  NAZÝVÁME **SLOŽKY TENZORU 2. ŘÁDU**.

Někdy je dobré zapsat složky tenzoru 2. řádu pomocí matice (více o maticích je v odstavci 1.3), které se

říká **matice tenzoru**:  $T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$ .

Tenzor je tedy jakási tabulka či matice, jejíž jednotlivé složky mají určité vlastnosti. Tyto vlastnosti zaručují, že se tenzor bude při přechodu z jedné soustavy do druhé „dobře transformovat“. Ovšem ne každá matice je tenzorem!

Definice tenzoru 2. řádu je oproti definici vektoru z odstavce 1.12.2 komplikovanější. Zjednodušení by mohlo přinést použití Einsteinova sumačního pravidla (viz odstavec 1.7.3.3) případně další přeznačení používaných veličin. Toto přeznačení sice výrazně zjednoduší zápis jednotlivých složek tenzoru, nicméně už „přestane být vidět podstata“ (tj. souvislost s transformací systému souřadnic), takže toto přeznačení a „zjednodušení“ nebudeme provádět. Stejně tak se nebudeme zabývat tenzory vyšších řádů. Jejich definice v symbolech z definice tenzoru 2. řádu by byla dost komplikovaná.

Proto si ukážeme pouze některé z vlastností tenzorů na tenzorech druhých řádů. U tenzorů vyšších řádů by to bylo podobné.

Nebudou-li v dalším textu výslovně uvedeny meze pro jednotlivé tenzorové indexy, využívá se Einsteinovo sumační pravidlo, které je vysvětleno v odstavci 1.7.3.3.

#### 1.12.3.1 Tenzorová algebra aneb základní vlastnosti a operace s tenzory 2. řádu

Zvláštní místo mezi tenzory zaujímá nulový tenzor.

**D: NULOVÝ TENZOR** DRUHÉHO ŘÁDU JE TENZOR  $\vec{0}$ , JEHOŽ VŠECHNY SOUŘADNICE JSOU NULOVÉ, TJ. PLATÍ:  $T_{ij} = 0$  PRO  $i, j = 1, 2, 3$ .

Jednotkový tenzor je zaveden v odstavci 1.12.3.3.

Nyní se podíváme na základní operace s tenzory. Jako první se nabízí sčítání dvou tenzorů. Sčítat je možné jen tenzory stejného řádu a struktury. Tenzory sčítáme tak, že sečteme jejich odpovídající souřadnice:

**D: NECHĚT**  $\vec{A} = (A_{ij})$  A  $\vec{B} = (B_{ij})$  JSOU DVA TENZORY DRUHÉHO ŘÁDU. TENZOR  $C$ , PRO KTERÝ PLATÍ  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ , SE NAZÝVÁ **SOUČET TENZORŮ**, PŘIČEMŽ PLATÍ  $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$  PRO  $i, j = 1, 2, 3$ .

Je zřejmé, že sčítání je možné zobecnit na libovolný počet sčítanců.

Násobení tenzoru skalárem se provádí tak, že daným skalárem násobíme každou souřadnici tenzoru:

**D: NECHĚT**  $\vec{A} = (A_{ij})$  JE TENZOR DRUHÉHO ŘÁDU A  $\lambda$  REÁLNÉ ČÍSLO (SKALÁR). TENZOR  $B$ , PRO KTERÝ PLATÍ  $\vec{B} = \lambda \vec{A}$ , SE NAZÝVÁ **NÁSOBEK TENZORU** A PLATÍ  $B_{ij} = \lambda A_{ij}$  PRO  $i, j = 1, 2, 3$ .

Existují další operace, které je možné provádět s tenzory (násobení tenzorů, úžení tenzorů, ...), ale ty se už týkají tenzorů vyšších řádů. Vzhledem k tomu, že je řeč o tenzorech druhých řádů, nemá smysl mluvit o těchto dalších operacích. Zápis těchto operací vychází ze zápisu definice tenzoru vyššího řádu, která je odlišná (nejen obsahem, ale i formou zápisu) od definice tenzorů druhého řádu, která byla uvedena v odstavci 1.12.3.

Tak například tenzor, který je součinem dvou tenzorů, je řádu, který je součtem řádů obou násobených tenzorů. Stejně tak operace úžení tenzorů dává jako výsledek tenzor, který je o dva řády menší než je tenzor původní.

### 1.12.3.2 Symetrické a antisymetrické tenzory

Pro další počítání a některá případná zjednodušení, která se objevují i ve fyzikálních aplikacích tenzorů, se zavádí tyto „speciální“ tenzory - symetrický a antisymetrický.

**D:** TENZOR 2. ŘÁDU  $\vec{T} = (T_{ij})$ , PRO JEHOŽ SOUŘADNICE PLATÍ  $T_{ij} = T_{ji}$  PRO  $i, j = 1, 2, 3$  SE NAZÝVÁ **SYMETRICKÝ TENZOR**.

Analogicky se definuje i antisymetrický tenzor:

**D:** TENZOR 2. ŘÁDU  $\vec{T} = (T_{ij})$ , PRO JEHOŽ SOUŘADNICE PLATÍ  $T_{ij} = -T_{ji}$  PRO  $i, j = 1, 2, 3$  SE NAZÝVÁ **ANTISYMETRICKÝ TENZOR**.

Pokud o nějakém tenzoru víme, že je symetrický nebo antisymetrický, zjednoduší se výpočty, které s ním budeme provádět. K zadání symetrického tenzoru 2. řádu totiž stačí místo původně 9 souřadnic (čísel) jen 6 souřadnic (čísel). Symetrický tenzor je totiž symetrický podle své hlavní diagonály - stačí tedy zadat tři čísla na hlavní diagonále, tj. čísla  $T_{ii}$ , a pak tři čísla pod touto hlavní diagonálou.

U antisymetrického tenzoru je situace ještě jednodušší. Vzhledem k jeho definici stačí zadat jen 3 souřadnice (čísla). Má-li totiž platit  $T_{ij} = -T_{ji}$  i pro prvky na hlavní diagonále, pak musí být  $T_{ii} = -T_{ii}$ . Tomu ale odpovídá jediné souřadnice (číslo) a to nula. Antisymetrický tenzor má tedy na hlavní diagonále nuly a k jeho plnému určení stačí zadat tři souřadnice (čísla) pod touto hlavní diagonálou.

Právě uvedené vlastnosti (tedy symetrie a antisymetrie tenzoru) jsou **invariantní** (neměnné) při změně soustavy souřadnic.

Budeme-li uvažovat tenzor  $\vec{T} = (T_{ij})$ , pak určitě platí:  $T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ . Označme nyní  $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$  a  $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ . Tím jsme získali tenzor  $\vec{S} = (S_{ij})$ , který je symetrický, protože platí:  $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = \frac{1}{2}(T_{ji} + T_{ij}) = S_{ji}$ . Dále jsme dostali tenzor  $\vec{A} = (A_{ij})$ , který je antisymetrický, protože jistě platí:  $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = -\frac{1}{2}(T_{ji} - T_{ij}) = -A_{ji}$ . Jinými slovy, původní tenzor  $\vec{T}$  lze zapsat ve tvaru  $\vec{T} = \vec{S} + \vec{A}$ . Jinými slovy: každý tenzor je možné zapsat jako součet tenzoru symetrického a antisymetrického.

**D:** POSTUP, KTERÝM SE ZE SOUŘADNIC  $(T_{ij})$  TENZORU  $\vec{T}$  TVOŘÍ SOUŘADNICE SYMETRICKÉHO TENZORU  $\vec{S}$  DEFINIČNÍM VZTAHEM  $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ , SE NAZÝVÁ **SYMETRIZOVÁNÍ** TENZORU  $\vec{T}$ .

**D:** POSTUP, KTERÝM SE ZE SOUŘADNIC  $(T_{ij})$  TENZORU  $\vec{T}$  TVOŘÍ SOUŘADNICE ANTISYMETRICKÉHO TENZORU  $\vec{A}$  DEFINIČNÍM VZTAHEM  $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ , SE NAZÝVÁ **ALTERNOVÁNÍ** TENZORU  $\vec{T}$ .

V případě, že je tenzor  $\vec{T}$  symetrický (resp. antisymetrický) je jeho antisymetrická část  $\vec{A}$  (resp. symetrická část  $\vec{S}$ ) nulový tenzor.

Symetrickou část tenzoru (resp. přímo symetrický tenzor) lze ještě rozdělit na dvě části.

**D:** **STOPA** SYMETRICKÉHO TENZORU  $\vec{T}$  SE ZNAČÍ SYMBOLEM  $tr\vec{T}$  (NĚKDY TĚŽ  $Sp\vec{T}$ ) A JE DEFINOVÁNA TAKTO:  $tr\vec{T} = Sp\vec{T} = \sum_{i=1}^3 T_{ii} = T_{ii}$ .

*Poznámka:* Poslední úprava definičního vztahu stopy tenzoru vychází z Einsteinova sumačního pravidla (viz odstavec 1.7.3.3).

Stopa symetrického tenzoru tedy je součet prvků na jeho hlavní diagonále.

**D:** TENZOR  $\vec{D}$ , JEHOŽ SOUŘADNICE  $D_{ij}$  JSOU DEFINOVÁNY VZTAHEM  $D_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3}(tr\vec{T})\delta_{ij}$ , SE NAZÝVÁ **DEVIÁTOR** SYMETRICKÉHO TENZORU  $\vec{T}$ .  $\delta_{ij}$  JSOU SOUŘADNICE KRONECKEROVA TENZORU.

Deviátor je možné psát i ve tvaru bez souřadnic uvedených tenzorů:  $\bar{D} = \bar{T} - \frac{1}{3}(\text{tr}\bar{T})\bar{\delta}$ .

Deviátor i stopa mají v některých oblastech fyziky důležitou roli (deviátor tenzoru napětí a tenzoru deformace se používá v teorii malých pružně elastických deformací, ...).

U tenzorů vyšších řádů než druhého je třeba si uvědomit, že je nutné mluvit o tenzoru, který je symetrický v určitých dvou indexech. Tenzor druhého řádu (mající dva indexy), je symetrický (v obou indexech). U tenzorů vyšších řádů je ale třeba zdůraznit indexy, vzhledem k nimž je tenzor symetrický. Analogická poznámka platí i pro antisymetrické tenzory vyšších řádů.

### 1.12.3.3 Izotropní tenzory

Zvláštní postavení mezi tenzory mají tenzory, jejichž souřadnice se při změně soustavy souřadnic nemění. To znamená, že mají stejné souřadnice ve všech soustavách souřadnic. Takové tenzory se nazývají **izotropní tenzory**.

Každý skalár je izotropní tenzor nultého řádu (viz příklad v odstavci 1.12.1, kde bylo ukázáno, že délka úsečky je invariant - nemění se při změně soustavy souřadnic). Izotropní tenzory prvního řádu (tj. vektory) neexistují.

Izotropním tenzorem 2. řádu je Kroneckerův symbol  $\delta_{ij}$ . Někdy se tomuto tenzoru  $\bar{\delta} = (\delta_{ij})$  říká **jednotkový tenzor**, neboť matice sestavená z jeho souřadnic je matice jednotková. Všechny izotropní tenzory druhého řádu mají tvar:  $k\bar{\delta} = (k\delta_{ij})$ , kde  $k$  je nenulové reálné číslo.

### 1.12.4 Levi-Civitův symbol (tenzor)

Levi-Civitův tenzor  $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{ijk})$  je tenzor 3. řádu, antisymetrický ve všech indexech. To znamená, že je antisymetrický ve všech dvojicích  $i, j, k$ ;  $i, j, k$ . Nenulové souřadnice tohoto tenzoru nabývají hodnot  $\pm 1$ .

Z antisymetričnosti tenzoru plyne, že nulovými souřadnicemi jsou všechny souřadnice, jejichž alespoň dva indexy jsou stejné. Hodnotu  $+1$  přiřazujeme té souřadnici, jejíž indexy (navzájem různé) tvoří sudou permutaci skupiny 1, 2, 3, hodnota  $-1$  přísluší té souřadnici, jejíž indexy tvoří lichou permutaci skupiny 1, 2, 3.

Tedy dostáváme:  $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ ,  $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$  a  $\varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = \varepsilon_{121} = \varepsilon_{131} = \varepsilon_{211} = \varepsilon_{311} = \varepsilon_{222} = \varepsilon_{221} = \varepsilon_{223} = \varepsilon_{212} = \varepsilon_{232} = \varepsilon_{122} = \varepsilon_{322} = \varepsilon_{333} = \varepsilon_{332} = \varepsilon_{323} = \varepsilon_{333} = \varepsilon_{333} = \varepsilon_{333} = 0$ .

**Příklad:** Zapište pomocí Levi-Civitova tenzoru vektorový součin dvou vektorů  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$  a  $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ .

**Řešení:** S využitím Einsteinova sumačního pravidla (viz odstavec 1.7.3.3) můžeme souřadnice vektorů přepsat takto:  $\vec{u} = (u_j)$  a  $\vec{v} = (v_k)$ . Pro vektor  $\vec{w}$ , který je vektorovým součinem vektorů  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  platí:  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ . Pro souřadnice vektoru  $\vec{w}$  pak platí:  $w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k$  (opět s využitím Einsteinova sumačního pravidla). Bez

Einsteinova zjednodušení by bylo nutné psát:  $w_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_j v_k$ . Rozpisem tohoto výrazu dostaneme:

$$\begin{aligned} w_i &= \varepsilon_{i11}u_1v_1 + \varepsilon_{i12}u_1v_2 + \varepsilon_{i13}u_1v_3 + \varepsilon_{i21}u_2v_1 + \varepsilon_{i22}u_2v_2 + \varepsilon_{i23}u_2v_3 + \varepsilon_{i31}u_3v_1 + \varepsilon_{i32}u_3v_2 + \varepsilon_{i33}u_3v_3 = \\ &= \varepsilon_{i12}u_1v_2 + \varepsilon_{i13}u_1v_3 + \varepsilon_{i21}u_2v_1 + \varepsilon_{i23}u_2v_3 + \varepsilon_{i31}u_3v_1 + \varepsilon_{i32}u_3v_2 \end{aligned}$$

Při výpočtu jednotlivých souřadnic pak máme:

$$w_1 = \varepsilon_{112}u_1v_2 + \varepsilon_{113}u_1v_3 + \varepsilon_{121}u_2v_1 + \varepsilon_{123}u_2v_3 + \varepsilon_{131}u_3v_1 + \varepsilon_{132}u_3v_2 = u_2v_3 - u_3v_2$$

$$w_2 = \varepsilon_{212}u_1v_2 + \varepsilon_{213}u_1v_3 + \varepsilon_{221}u_2v_1 + \varepsilon_{223}u_2v_3 + \varepsilon_{231}u_3v_1 + \varepsilon_{232}u_3v_2 = -u_1v_3 + u_3v_1$$

$$w_3 = \varepsilon_{312}u_1v_2 + \varepsilon_{313}u_1v_3 + \varepsilon_{321}u_2v_1 + \varepsilon_{323}u_2v_3 + \varepsilon_{331}u_3v_1 + \varepsilon_{332}u_3v_2 = u_1v_2 - u_2v_1$$

Tyto souřadnice ale přesně odpovídají souřadnicím vektorového součinu z odstavce 1.8.2, kde byl vektorový součin definován.

Levi-Civitův symbol (tenzor) velice úzce souvisí s Kroneckerovým delta (viz odstavec 1.7.3.1) vztahem  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$  (bylo použito Einsteinova sumačního pravidla definovaného v odstavci 1.7.3.3).

Použití tohoto tenzoru (symbolu) je podobné jako použití symbolu Kroneckerovo delta (viz odstavec 1.7.3.1): v určitých případech zkracuje a z technického hlediska zjednodušuje zápis rovnic, veličin, vztahů, ... Aby se ale jednalo skutečně o zjednodušení, je nutné jej dokonale zvládat a znát jeho vlastnosti.

### 1.12.5 Tenzor napětí

Tenzor napětí je jedním z nejdůležitějších tenzorů, které se používají ve fyzice. Podle tohoto tenzoru dokonce dostaly tenzory své jméno, neboť v latině znamená *tensio* napětí. Dříve než ale vysvětlíme, co je to tenzor napětí, je třeba se seznámit se základními fyzikálními pojmy z mechaniky kontinua.

**Kontinuum** je termín, který označuje spojité prostředí, jehož vlastnosti se mění spojitě bod od bodu. Je určeno svým objemem  $V$  a hustotou  $\rho$ . Kontinuum je zcela odlišné od tuhého tělesa. Jestliže tuhé těleso je modelem nedeformovatelného tělesa (v praxi se mu blíží např. deska stolu, železná kovádkina, ...), tak kontinuum představuje naopak těleso, které je možné deformovat. Navíc může docházet k více druhům deformace na tomtéž tělese (např. při natahování gumy dochází ve směru působení natahovací síly k jejímu prodlužování, zatímco ve směru kolmém se guma ztenčuje - je tedy deformována zároveň tahem i tlakem). Za kontinuum lze v praxi považovat gumu na trampolíně, mycí houbu, voda v nádobě, plyn v pouťovém balónku, ...

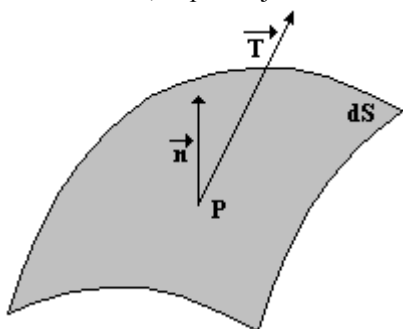
Bude-li na takové těleso působit nějaká vnější síla, může jít o sílu:

1. objemovou
2. plošnou

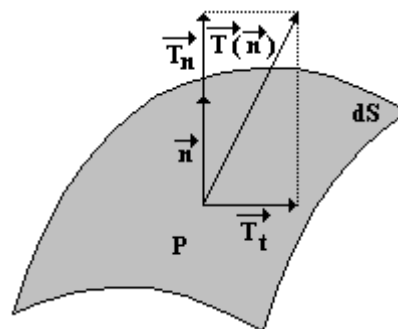
**Síly objemové** (gravitační, ...) působí na objemové elementy tělesa a jsou úměrné hmotě v tomto elementu obsažené. Vztahujeme je na jednotku objemu a její velikost závisí na poloze elementu objemu  $dV$  v tělese. To znamená, že velikost a směr této síly se mění se změnou působiště síly. Jestliže označíme objemovou sílu (tj. sílu vztahovanou na jednotku objemu)  $\vec{F}_V = (F_{V1}; F_{V2}; F_{V3})$ , pak na objemový element  $dV$  působí objemová síla  $\vec{F}_V dV$ . Výsledná objemová síla působící na těleso o objemu  $V$  je  $\vec{F} = \int_0^V \vec{F}_V dV$ .

**Síly plošné** působí na jednotku plochy (na plošné elementy  $dS$ ) a jsou úměrné velikosti plošného elementu. Jedná se např. o sílu, kterou působí kapalina (nebo plyn) na stěny nádoby, v níž jsou uzavřeny, o sílu, která působí na libovolný horizontální řez vertikálně zavěšené a zatížené gumy, ... Plošná síla vztahovaná na jednotku plochy se nazývá **napětí** (u kapalin a plynů má tato veličina název tlak). Vzhledem k tomu, že se jedná o podíl vektorové veličiny (síly) a skalární veličiny (element plochy), je výsledkem vektor. Tento vektor (vektor napětí) se značí  $\vec{T}$ . Plošná síla působící na element plochy  $dS$  je dána tedy vztahem  $d\vec{F} = \vec{T} dS$ .

Uvažujme nyní plošný element (plošku) procházející bodem  $P$ , který prochází normálový vektor  $\vec{n}$  plošky  $dS$  (viz obr. 69). Tento normálový vektor určuje orientaci plošného elementu  $dS$ . (Je tedy možné mluvit o dvou orientacích plošného elementu  $dS$ .) Směr vektoru  $\vec{T}$  obecně nemusí splývat se směrem normálového vektoru  $\vec{n}$ . Je zřejmé, že vektor napětí  $\vec{T}$  nezávisí jen na bodu  $P$ , tj. na umístění plošky  $dS$ , ale i na normále  $\vec{n}$ , tj. na orientaci plošného elementu  $dS$ :  $\vec{T} = \vec{T}(\vec{n})$ . Prochází-li tedy bodem  $P$  více plošných elementů s různými normálami, pak výsledné vektory napětí jsou také různé. Jinak řečeno: různě orientovaným plošným elementům procházejícím bodem  $P$ , odpovídají různé vektory napětí v tomto bodě.



obr. 69



obr. 70

Síla  $d\vec{F} = \vec{T} dS$  vyjadřuje vzájemné silové působení dvou částí uvažovaného tělesa na plošce  $dS$ , které z obou stran přiléhají k této plošce. Je zřejmé, že podle třetího Newtonova zákona (zákon akce a reakce) je síla, kterou působí první část na druhou, stejně velká ale opačného směru než síla, kterou působí část druhá na první. To znamená, že platí:  $\vec{T}(-\vec{n}) = -\vec{T}(\vec{n})$ .

Vzhledem k tomu, že vektor napětí  $\vec{T}$  nemusí obecně splývat se směrem normálového vektoru (normály) plochy, je možné rozložit vektor napětí do dvou navzájem kolmých složek: **normálového napětí**  $\vec{T}_n$  a **tečného (smykového) napětí**  $\vec{T}_t$  (viz obr. 70). Pro tato dvě napětí platí:  $\vec{T}_n + \vec{T}_t = \vec{T}$ .

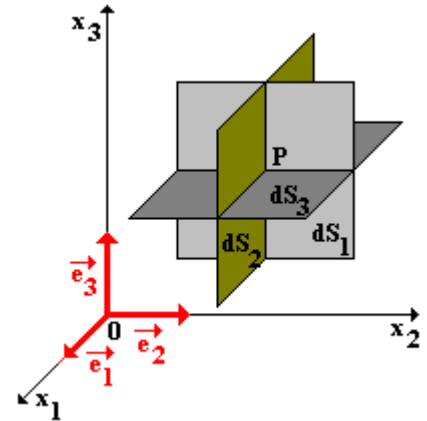
Element plochy  $dS$ , který je zobrazen na obr. 69, lze složit ze tří vzájemně kolmých elementů plochy  $dS_1$ ,  $dS_2$  a  $dS_3$  takových, že ploška  $dS_1$  je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou  $x_2x_3$ ,  $dS_2$  je rovnoběžná s rovinou  $x_1x_3$  a  $dS_3$  je rovnoběžná s rovinou  $x_1x_2$ , jak je zobrazeno na obr. 71. Normálové vektory k ploškám  $dS_1$ ,  $dS_2$  a  $dS_3$  jsou po řadě vektory  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  a  $\vec{e}_3$ . Vektory napětí, které odpovídají ploškám  $dS_1$ ,  $dS_2$  a  $dS_3$  jsou po řadě, vektory  $\vec{T}(\vec{e}_1)$ ,  $\vec{T}(\vec{e}_2)$  a  $\vec{T}(\vec{e}_3)$ . Každý z těchto vektorů je možné vyjádřit jako lineární kombinaci



vektorů báze  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  a  $\vec{e}_3$  (podrobněji o bázi viz odstavec 1.2.2), takže dostáváme:  $\vec{T}(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \vec{e}_j = \tau_{ij} \vec{e}_j$  pro  $i = 1, 2, 3$  (poslední úprava je provedena na základě Einsteinova sumačního pravidla - viz odstavec 1.7.3.3).

Právě uvedeným vztahem je definováno 9 čísel, která jsou souřadnicemi tenzoru 2. řádu - **tenzoru napětí**  $\vec{\tau}$ . Na základě právě uvedeného a na základě rozkladu vektoru napětí do dvou kolmých složek  $\vec{T}_n$  a  $\vec{T}_t$  je zřejmé, že z právě uvedených 9 souřadnic tenzoru napětí  $\vec{\tau}$  udávají souřadnice na hlavní diagonále (tj. souřadnice  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$  a  $\tau_{33}$ ) velikosti normálových napětí a zbývajících 6 souřadnic (tj. souřadnice  $\tau_{ij}$  pro  $i \neq j$ ) velikost smykových napětí.

Pomocí souřadnic tenzoru napětí  $\vec{\tau}$  lze získat vektor napětí  $\vec{T}(\vec{n})$  pro libovolný normálovou vektor  $\vec{n}$ . Budeme-li uvažovat plošný element  $dS$ , který prochází bodem  $P$  a který má normálu  $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ , je možné psát  $T_i(\vec{n}) = \sum_{j=1}^3 \tau_{ji} n_j = \tau_{ji} n_j$  pro  $i = 1, 2, 3$  (opět bylo použito Einsteinovo sumační pravidlo z odstavce 1.7.3.3). Vektor napětí  $\vec{T}(\vec{n})$  má přitom souřadnice  $\vec{T}(\vec{n}) = (T_1(\vec{n}); T_2(\vec{n}); T_3(\vec{n}))$ . Jinými slovy: vektor napětí  $\vec{T}(\vec{n})$  je jednoznačně určen tenzorem napětí  $\vec{\tau}$  a normálovým vektorem  $\vec{n}$  elementu plochy  $dS$ .



obr. 71

## 1.12.6 Tenzorová analýza

V technických aplikacích matematiky (fyzika, elektrotechnika, ...) se v pokročilejších partiích neobejdeme bez určitých, na první pohled poněkud komplikovaných operací, které ale velmi zjednodušují jednak matematický zápis problému a jednak zpřehledňují danou fyzikální, elektrotechnickou, ... problematiku. V tomto textu se patrně nedostaneme tak daleko, abyste na pochopili zjednodušení fyzikálního aspektu věci, ale budu se snažit tyto operace vysvětlit bez složitých definicí a pokud možno srozumitelně.

### 1.12.6.1 Hamiltonův operátor nabla

Dříve než se pustíme do složitějších operací, je nutno zavést tzv. Hamiltonův operátor nabla. Tento operátor je pojmenován po irském matematikovi a fyzikovi Williamu Rowanovi Hamiltonovi (4. 8. 1805 - 2. 9. 1865), který zavedl do matematiky kvaterniony (uspořádané čtveřice reálných čísel - jakousi nadstavbu čísel komplexních), podílel se na rozvoji maticové algebry a tím nepřímo přispěl i k rozvoji fyziky. Pomocí operátoru nabla je možné v současném způsobu zápisu rovnic a fyzikálních veličin velice jednoduše zapsat řadu fyzikálních výsledků (např. Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole, ...).

Hamiltonův operátor nabla je definován takto:  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$  (znak  $\nabla$  se čte „nabla“). Jedná se o vektorový operátor, který musí být aplikován na nějakou funkci. Aplikace na jakoukoli další funkci (skalární, vektorovou, ...) spočívá ve vynásobení tohoto operátoru (skalárně, vektorově, ...) danou funkcí.

*Poznámka:* Operátor nabla je vysvětlován v rámci tenzorů, protože se dá ukázat, že má vlastnosti tenzoru. Je to tedy tenzor. V dalším s ním ale tak počítat nebudeme - ukážeme jen jeho použití.

### 1.12.6.2 Gradient, divergence, rotace

Gradient, divergence a rotace jsou lineární diferenciální operátory. Lineární proto, že se v nich derivace dané funkce vyskytuje v první mocnině (tj. je lineární), diferenciální proto, že jsou definovány pomocí derivace. Vzhledem k tomu, že fyzikální veličiny závisí většinou na více parametrech (proměnných), jedná se o derivace parciální. Vysvětlení parciálních derivací je uvedeno v odstavci 1.10.4.6.2.

Gradient, divergence a rotace se definují pomocí operátoru nabla (viz odstavec 1.12.6.1). Slova „gradient“, „divergence“ a „rotace“ (resp. jejich zkratky grad, div a rot) jsou pouze zkrácením matematického zápisu. Při vlastním výpočtu je třeba tyto zkratky „dešifrovat“ rozepsáním a vyjádřením pomocí nabla operátoru.

Všechny uvedené operátory mají své přesné definice. Pokusíme se ale zavést jednotlivé operátory bez složitých definic pomocí určitého „triku“. Tento „trik“ spočívá v tom, že si uvědomíme, jaké součiny lze provádět s vektory:

1. součin bez označení - lze aplikovat na vektor  $\vec{v}$  a skalár  $\lambda$  a výsledkem je vektor ( $\lambda$  násobek vektoru  $\vec{v}$ ):  $\vec{w} = \lambda \vec{v}$  nebo jej lze aplikovat na dva vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  a získáme tenzor:  $\vec{u}\vec{v} = \vec{T}$
2. součin označený tečkou - lze aplikovat na dva vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  a získáme skalár (operace se nazývá skalární součin - viz odstavec 1.8.1):  $\lambda = \vec{u} \cdot \vec{v}$  nebo jej lze aplikovat na vektor  $\vec{v}$  a tenzor  $\vec{T}$  a

získáme vektor:  $\vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{T}$  (mnemotechnická pomůcka: tečka v součinu ničí vektor - ničí jednu šipku; no a tenzor se značí dvěma šipkami)

3. součin označený křížkem - lze aplikovat na dva vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  a získáme vektor (operace má název vektorový součin - viz odstavec 1.8.2):  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

Právě uvedený „rozbor součinů“ nelze považovat za definice. Ty se dají nalézt v řadě vysokoškolských skript. Uvedený „rozbor“ se snaží danou problematiku trochu zlidštit.

V souvislosti s „rozбором součinů“ je důležité, že stejným způsobem lze zavést jednotlivé lineární diferenciální operátory. Uvědomíme-li si, že operátor nabla, pomocí něhož budeme definovat další operátory, je vektor, jsou další pravidla už jasná.

1. gradient (grad) se zavádí takto:  $\text{grad } \lambda = \vec{\nabla} \lambda$  resp.  $\text{grad } \vec{v} = \vec{\nabla} \vec{v}$
2. divergence (div) se zavádí takto:  $\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  resp.  $\text{div } \vec{T} = \vec{\nabla} \cdot \vec{T}$
3. rotace (rot) se zavádí takto:  $\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$

Právě definované operátory mají tyto vlastnosti a platí následující vztahy, v jejichž úpravách se používají vztahy vektorového a skalárního součinu a jejich kombinací (viz odstavec 1.8):

$$\begin{aligned} \text{grad } \lambda_1 \lambda_2 &= \vec{\nabla} \lambda_1 \lambda_2 = \left( \frac{\partial(\lambda_1 \lambda_2)}{\partial x}; \frac{\partial(\lambda_1 \lambda_2)}{\partial y}; \frac{\partial(\lambda_1 \lambda_2)}{\partial z} \right) = \left( \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}; \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}; \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} \right) = \\ &= \lambda_1 \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}; \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}; \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} \right) + \lambda_2 \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}; \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}; \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} \right) = \lambda_1 \vec{\nabla} \lambda_2 + \lambda_2 \vec{\nabla} \lambda_1 = \lambda_1 \text{grad } \lambda_2 + \lambda_2 \text{grad } \lambda_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{div } \lambda \vec{v} &= \vec{\nabla} \cdot \lambda \vec{v} = \frac{\partial(\lambda v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda v_z)}{\partial z} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \\ &= \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_x \frac{\partial \lambda}{\partial x} + v_y \frac{\partial \lambda}{\partial y} + v_z \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \lambda = \lambda \text{div } \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad } \lambda \end{aligned}$$

$$\text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{\partial(\vec{u} \times \vec{v})_x}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{u} \times \vec{v})_y}{\partial y} + \frac{\partial(\vec{u} \times \vec{v})_z}{\partial z} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{\nabla} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{u} - \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{v}$$

$$\text{rot } \lambda \vec{v} = \vec{\nabla} \times \lambda \vec{v} = \lambda \vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{\nabla} \lambda \times \vec{v} = \lambda \vec{\nabla} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{\nabla} \lambda = \lambda \text{rot } \vec{v} - \vec{v} \times \text{grad } \lambda$$

U následujících dvou vlastností se jedná o matematickou vlastnost: vektorový součin dvou stejných (resp. rovnoběžných) vektorů je nulový.

$$\text{div rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$$

$$\text{rot grad } \lambda = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \lambda = 0$$

Nabla není jediný operátor. Pomocí následující kombinace lineárních diferenciálních operátorů je zavádí operátor laplace, nazvaný podle francouzského matematika a fyzika Pierra Simona Marquise de Laplace (28. 3. 1749 - 5. 3. 1827):  $\text{div grad } \lambda = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \lambda = |\vec{\nabla}|^2 \lambda = \Delta \lambda$ .

Jak je vidět, pro operátor laplace platí:  $\Delta = |\vec{\nabla}|^2$ . S použitím definice operátoru nabla z odstavce 1.12.6.1

$$\text{je možné psát: } \Delta = \left( \sqrt{\left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^2} \right)^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \text{ Poslední úpravou}$$

jsme vyjádřili operátor laplace pomocí druhých parciálních derivací (tj. příslušný skalár, vektor či tenzor zderivujeme jednou a pak výsledné derivace zderivujeme znovu: derivaci podle  $x$  znovu podle  $x$ , derivaci podle  $y$  znovu podle  $y$  a derivaci podle  $z$  znovu podle  $z$ ).

Na základě operátoru laplace je možné rozepsat tuto složenou operaci s operátory:  $\text{rot rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \Delta \vec{v}$

### 1.12.6.3 Fyzikální význam

V odstavci 1.12.6.2 byly zavedeny tři lineární diferenciální operátory a jejich kombinace na čistě matematickém základě. Všechny tyto operátory mají značný význam ve fyzikální či jiné technické praxi.

Význam **gradientu** nejlépe pochopíme asi na teplotě. Představte si, že jsme v zimě v místnosti, v níž je těsně u venkovní zdi (obvodová zeď domu) teplota  $20^\circ \text{C}$ . Venku je teplota  $-5^\circ \text{C}$  a obvodová zeď domu má tloušťku půl metru. Je jasné, že z jedné strany má zeď teplotu  $20^\circ \text{C}$  (z té strany, co je v pokoji) a z druhé (té vnější) má teplotu  $-5^\circ \text{C}$ . Na vzdálenosti půl metru (tloušťka zdi) se teplota zdi mění od  $-5^\circ \text{C}$  ke  $20^\circ \text{C}$ . Jaký bude průběh (lineární, exponenciální, ...) není podstatné. (Závisí to na materiálu, ztrátách, ...) Podstatné je, že

teplota má na šířce zdi (oněch půl metru) nějaký **spád**, nějak **klesá (roste)**. Nebo můžeme též říci, že teplota má v závislosti na vzdálenosti (např. od venkovní omítky zdi) jistý **gradient**.

**Gradient** tedy udává směr, kterým určitá veličina nejvíce reste (klesá); udává směr spádu. Právě zmíněný směr se promítne do parciálních derivací, pomocí nichž je gradient definován. (U příkladu s teplotou je to směr kolmý na zeď - ve směru, který svírá s tímto směrem úhel např. 45° teplota klesá resp. roste také, ale už pozvolněji.)

Fyzikální význam **divergence** je následující. Divergence popisuje **zdroj, zřídlo** nějaké fyzikální veličiny. Opět velmi jednoduchý příklad. Na louce jsou dvě studny, z nichž jedna je zcela vyschlá a druhá je plná vody a odtéká z ní malý potůček. To, co bylo právě vysloveno normální řečí, se dá vyjádřit matematicky tak, že divergence suché studny je nulová (studna není zdrojem žádné vody), zatímco divergence studny s vodou je nenulová - studna je zdrojem vody pro potůček, který z ní vyvěrá.

S divergencí je možné se setkat ve slavných Maxwellových rovnicích, kterými anglický fyzik James Clerk Maxwell (13. 11. 1831 - 5. 11. 1879) poprvé sjednotil teorii elektromagnetického pole. Dvě z těchto rovnic mají tvar:

1.  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$  - tato rovnice říká, že elektrické pole popsané indukcí elektrického pole  $\vec{D}$  má své zdroje (náboje), které mají nějakou prostorovou hustotu  $\rho$
2.  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  - tato rovnice říká, že magnetické pole popsané magnetickou indukcí  $\vec{B}$  nemá žádné zdroje, tj. neexistují magnetické „náboje“

**Rotace** udává, jestli nějaká fyzikální veličina tvoří vír, propletenec, nějak se otáčí, pohybuje. Příklad z praktického života by mohl znít takto: Představte si umyvadlo zašpuntované špuntem. Nebudete-li v umyvadle hýbat rukama či nějakými předměty, voda bude v klidu - nebudou vznikat žádné víry. Rotace vody bude nulová. Pokud ale umyvadlo vypustíte, začnou se vlivem Coriolisovy síly vytvářet víry, které budou (na severní části Země) pravotočivé. Jinými slovy - nyní voda víří, to znamená, že její rotace je nenulová.

I s rotací je možné se setkat v Maxwellových rovnicích:

1.  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  - při časové změně magnetického pole (popsáno magnetickou indukcí  $\vec{B}$ ) je elektrické pole vírové (siločáry jsou uzavřené) a podél vírů je možno měřit napětí (skutečnost, že při změně magnetického pole je možné měřit napětí pak popisuje Faradayův zákon elektromagnetické indukce)
2.  $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$  - teče-li obvodem proud, vzniká kolem něho magnetické pole (tj. mg. pole je vírové) - Oerstedův - Ampérův jev; další výklad: změnou elektrického pole vzniká pole magnetické (Maxwellův posuvný proud  $\vec{j}$ );  $\vec{H}$  značí intenzitu magnetického pole

S lineárními diferenciálními operátory je možné se setkat ve všech partiích fyziky.

## 2. FYZIKÁLNÍ APLIKACE MATEMATIKY

### 2.1 Názvosloví fyzikálních veličin

Ve fyzice se používá celá řada veličin, z nichž mnohé se liší jen přívlaskem. Rozlišení z hlediska českého jazyka poměrně malé, znamená většinou velice radikální rozdíl ve fyzikální veličině (tj. přívlaskem doplněná fyzikální veličina popisuje jinou vlastnost objektů).

Následuje seznam častých přívlasků s jejich vysvětlením:

1. relativní (poměrný) - daná veličina  $X$  je definována jako podíl dvou veličin téhož druhu. Veličina  $X$  tedy nemá jednotku, tj.  $[X]=1$ . Tyto veličiny lze v některých případech udávat též v procentech. Např. relativní prodloužení  $\varepsilon$ , ...
2. měrný - veličina  $x$  je definována pomocí veličiny  $X$  vztažené na jednotku hmotnosti. Pro jednotky platí:  $[x]=[X]kg^{-1}$ . Např. měrné skupenské teplo tání, ...
3. molární - veličina  $x$  je definována na základě veličiny  $X$  vztažené na jednotku látkového množství,  $[x]=[X]mol^{-1}$ . Např. molární hmotnost  $M_m$ , molární objem  $V_m$ , ...
4. tepelný - veličina  $x$  je definována pomocí veličiny  $X$  vztažené na jednotku tepla,  $[x]=[X]J^{-1}$ . Např. tepelná kapacita  $C$ , ...
5. teplotní - veličina  $x$  je definována pomocí veličiny  $X$  vztažené na jednotku teploty,  $[x]=[X]K^{-1}$ . Např. součinitel teplotní délkové roztažnosti  $\alpha$ , součinitel teplotní závislosti odporu  $\alpha$ , ...
6. (objemová) hustota veličiny - veličina  $x$  je definována pomocí veličiny  $X$  vztažené na jednotku objemu,  $[x]=[X].m^{-3}$ . Např. hustota hmotnosti = hustota, objemová hustota částic, ...
7. plošná hustota veličiny - veličina  $x$  je definována pomocí veličiny  $X$  vztažené na jednotku plochy,  $[x]=[X].m^{-2}$ . Např. plošná hustota náboje, plošná hmotnost plátna na výrobu balónů, ...
8. délková hustota veličiny - veličina  $x$  je definována pomocí veličiny  $X$  vztažené na jednotku délky,  $[x]=[X].m^{-1}$ . Např. délková hustota náboje, délková hustota drátu, ...

## 2.2 Tuhé těleso

### 2.2.1 Tuhé těleso a jeho pohyby

Moment setrvačnosti je fyzikální veličina, která je charakteristická pro **tuhé těleso**. Tuhé těleso je model (abstrakce, idealizace) skutečných těles, který zavádíme do fyziky proto, abychom si zjednodušili situaci a nemuseli studovat všechny fyzikální děje najednou. U tuhého tělesa se nebudeme zajímat o jeho deformace, tj. tuhé těleso bude reprezentovat model tělesa, které není možné deformovat účinkem libovolně velkých sil. Tuhé těleso je charakterizováno svojí hmotností a objemem (a tím pádem i hustotou). Síly, které na tuhé těleso působí, mohou způsobit pouze pohyb tuhého tělesa.

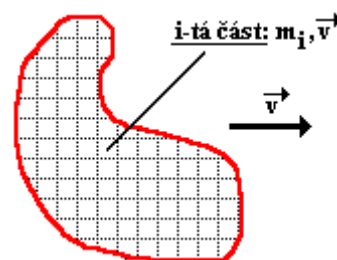
Každý pohyb tuhého tělesa si lze představit jako pohyb složený z pohybu:

1. posuvného (translace) - při něm se všechny body tělesa pohybují stejnou rychlostí po vzájemně rovnoběžných trajektoriích. Např. vagón jedoucí po přímé trati, bedna posunovaná po podlaze, píst ve spalovacím motoru, ...
2. otáčivého (rotace) - při něm se všechny body tělesa pohybují se stejnou úhlovou rychlostí po soustředných kružnicích, jejichž středy leží na ose otáčení. Otáčivý pohyb se děje vždy kolem nějaké okamžité osy otáčení. Pro jednoduchost budeme uvažovat, že se poloha osy, kolem níž těleso rotuje, nemění. Příklady pohybů: vodní kohoutek, dveře, ventilátor, brusný kotouč, ...

V praxi dochází ke skládání obou pohybů v jeden - valící se kolo, Země při svém pohybu kolem Slunce, ... Tak například přední kolo u bicyklu koná tyto dva pohyby současně: jeho střed (těžiště) se posunuje směrem dopředu a zároveň se kolo odvaluje (valí).

### 2.2.2 Kinetická energie tuhého tělesa

Na základě klasifikace pohybů tuhého tělesa (viz odstavec 2.2.1) se poněkud zkomplikuje výpočet kinetické energie tuhého tělesa. Při posuvném pohybu je celková kinetická energie tělesa rovna součtu kinetických energií jednotlivých bodů tělesa. Při posuvném pohybu se pohybují všechny body tělesa stejnou rychlostí, tedy pro kinetickou energii posuvného pohybu je možné psát:  $E_k = \frac{1}{2}v^2(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = \frac{1}{2}mv^2$ . Hmotnosti  $m_i$  (pro  $i = 1, 2, \dots, n$ ) jsou hmotnosti jednotlivých částí tuhého tělesa, na které jsme tuhé těleso pomyslně rozdělili (viz obr. 72).



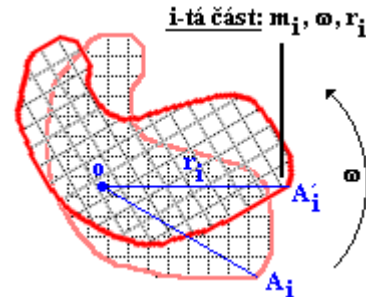
obr. 72

Při otáčivém pohybu tuhého tělesa kolem nehybné osy se všechny body pohybují po kružnicích, jejichž středy leží na ose otáčení, stejnou úhlovou rychlostí  $\omega$ . Kinetickou energii tělesa určíme opět jako součet kinetických energií jednotlivých bodů tělesa. Tedy můžeme psát:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n r_n^2 \omega^2 = \\ = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2)$$

Hmotnosti  $m_i$  (pro  $i=1, 2, \dots, n$ ) jsou hmotnosti jednotlivých částí tuhého tělesa, na které jsme si opět pomyslně tuhé těleso rozdělili,  $r_i$  (pro  $i=1, 2, \dots, n$ ) je vzdálenost uvažované  $i$ -té části tuhého tělesa od osy otáčení  $o$  (viz obr. 73).

Při otáčení tuhého tělesa kolem nehybné osy závisí jeho kinetická energie jednak na velikosti úhlové rychlosti, jednak na hmotnostech jednotlivých bodů (částí) a jejich vzdálenostech od osy otáčení. Kinetická energie tedy závisí na rozložení látky v daném tělese. Rozložení látky v tělese vzhledem k ose rotace vyjadřuje fyzikální veličina **moment setrvačnosti**  $J$  tuhého tělesa vzhledem k ose otáčení, který je definován vztahem  $J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$ . Jednotkou momentu setrvačnosti je  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .



obr. 73

Existují metody (viz odstavec 2.2.3) pomocí nichž se dá moment setrvačnosti daného tělesa vypočítat. Vždy tak dostaneme moment setrvačnosti ve tvaru  $J = kmr^2$ , kde  $m$  je hmotnost tuhého tělesa,  $r$  je poloměr (resp. délka) tuhého tělesa a  $k$  bezrozměrná konstanta.

Kinetická energie tuhého tělesa otáčejícího se kolem nehybné osy úhlovou rychlostí  $\omega$  je dána vztahem  $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$ , kde  $J$  je moment setrvačnosti vzhledem k dané ose otáčení.

Koná-li těleso současně posuvný pohyb a otáčivý pohyb kolem osy procházející těžištěm tělesa, je kinetická energie dána součtem energie posuvného a otáčivého pohybu:  $E_k = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2$ , kde  $J_0$  je moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm tělesa.

### 2.2.3 Výpočet momentů setrvačnosti

Výpočet momentů setrvačnosti následujících těles vychází z použití integrálního počtu (viz odstavec 1.11). Pro výpočet momentu setrvačnosti je v podstatě nutné zopakovat výpočet uvedený v odstavci 2.2.2, tj. napodobit vztah  $J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$ . Abychom dostali co nejpřesnější výsledek, je třeba dané tuhé těleso rozdělit na „hodně velký počet velmi tenkých plátků“, s nimiž si už „dokážeme poradit“. Pokud ale chceme dělit těleso na „hodně velký počet velmi tenkých plátků“, které pak musíme opět „dát dohromady“ (tj. sečíst), je použití integrálního počtu nasnadě.

S využitím integrálního počtu je možné moment setrvačnosti definovat vztahem:  $J = \int_0^m r^2 dm$ , což v případě homogenního tuhého tělesa (jiné zatím v tomto textu vyšetřovat nebudeme), která má konstantní hustotu, lze přepsat ve tvaru:  $J = \int_0^m r^2 dm = \int_0^V r^2 \rho dV = \rho \int_0^V r^2 dV$ .

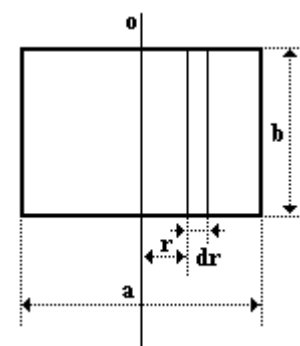
Všechny momenty setrvačnosti jsou počítány vůči ose rotace, která je shodná s osou symetrie daného útvaru.

#### 2.2.3.1 Obdélníková deska

Obdélníkovou desku si pro účely výpočtu momentu setrvačnosti rozdělíme na úzké obdélníčky, jejichž vzdálenost šířka je  $dr$ . Vzdálenost uvažovaného obdélníčku od osy rotace je pak  $r$  (viz obr. 74). Hmotnost  $m$  desky vyjádříme pomocí **plošné hustoty**  $\sigma$ :  $m = \sigma S = \sigma ab$ . Hmotnost  $dm$  uvažovaného obdélníčku je pak rovna  $dm = \sigma b dr$ .

Nyní je možné už psát pro moment setrvačnosti:

$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} r^2 \sigma b dr = 2\sigma b \int_0^{\frac{a}{2}} r^2 dr = 2\sigma b \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{\frac{a}{2}} = 2\sigma b \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{8} =$$



obr. 74

$$= \sigma b a \frac{a^2}{12} = \frac{1}{12} m a^2$$

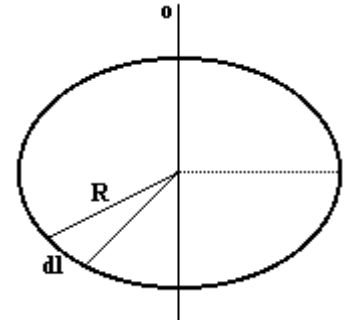
Vzhledem k tomu, že právě odvozený vztah nezávisí na šířce desky  $b$ , platí pro libovolně širokou destičku. Tedy i pro tenkou tyč, která se bude otáčet okolo osy procházející jejím středem kolmo na podélnou osu tyče.

### 2.2.3.2 Obruč

Při výpočtu momentu setrvačnosti obruče si tuto obruč rozdělíme na takové kousky, že danou obruč vlastně nahradíme uzavřenou lomenou čarou, tj. mnohoúhelníkem s velmi velkým („nekonečným“) počtem vrcholů (stran). Dále zavedeme pojem **délková hustota**  $\rho_l$  jako podíl hmotnosti tělesa a jeho délky. Pomocí délkové hustoty vyjádříme nyní hmotnost jednoho dílku:  $dm = \rho_l dl$ . Ilustrační náčrt je na obr. 75.

Nyní je možné již výpočtem určit moment setrvačnosti obruče:

$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_0^{2\pi R} R^2 \rho_l dl = R^2 \rho \int_0^{2\pi R} dl = R^2 \rho [l]_0^{2\pi R} = R^2 \rho \cdot 2\pi R = R^2 m$$



obr. 75

### 2.2.3.3 Obal válce

Výpočet momentu setrvačnosti obalu válce provedeme na základě momentu setrvačnosti obruče (viz odstavce 2.2.3.1). Obal válce si představíme jako „velké množství nekonečně tenkých“ obručí naskládaných na sebe, přičemž jedna obruč má výšku  $dz$  (viz obr. 77). Pomocí **plošné hustoty**  $\sigma$ , která je definována jako podíl hmotnosti a uvažovaného tělesa (obalu válce) a jeho plochy, vyjádříme hmotnost  $m$  obalu válce:  $m = \sigma S = 2\pi R v \sigma$ . Hmotnost  $dm$  jedné obruče, z níž je obal válce sestaven pak bude:  $dm = 2\pi R \sigma dz$ .

Nyní je možné přistoupit k samotnému výpočtu momentu setrvačnosti obalu válce:

$$J = \int_0^m r^2 dm = R^2 \int_0^v 2\pi R \sigma dz = 2\pi R^3 \sigma \int_0^v dz = 2\pi R^3 \sigma [z]_0^v = 2\pi R^3 \sigma v = 2\pi R v \sigma R^2 = m R^2$$

Z výpočtu je vidět, že moment setrvačnosti obruče a obalu válce jsou stejné. Jinými slovy, u obruče nezávisí na její výšce - i kdybychom jí brali jako malý obal válce, její moment setrvačnosti se nezmění.

### 2.2.3.4 Kruhová deska

Při výpočtu momentu setrvačnosti kruhové desky budeme postupovat analogicky jako při výpočtu momentu setrvačnosti obruče (viz odstavce 2.2.3.1) jen s tím rozdílem, že zavedeme tentokrát **plošnou hustotu**  $\sigma$  jako podíl hmotnosti tělesa (kruhu) a jeho plochy. Platí tedy:  $m = S\sigma = \pi R^2 \sigma$ . Kruh si nyní rozdělíme na soustavu mezikruží, které mají šířku  $dr$ . Budeme uvažovat takové mezikruží, jehož menší ohraničující kružnice má poloměr je  $r$  a jehož šířka je  $dr$ . Pro jeho plochu pak dostáváme (podle obr. 76):

$$S_{\text{mezikruží}} = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2r \cdot dr + (dr)^2 - r^2) = \pi(2r \cdot dr + (dr)^2).$$

Vzhledem k tomu, že šířka mezikruží  $dr$  je infinitesimálně malá, je možné psát:  $S_{\text{mezikruží}} \doteq 2\pi r \cdot dr$ , tj. výraz  $(dr)^2$  vůči druhému členu zanedbat.

Hmotnost uvažovaného mezikruží pak bude:  $dm = 2\pi \sigma r \cdot dr$ . Nyní už můžeme přistoupit k výpočtu vlastního momentu setrvačnosti kruhu:

$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi \sigma r \cdot dr = 2\pi \sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \sigma \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi \sigma \frac{R^4}{4} = \pi R^2 \cdot \sigma \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

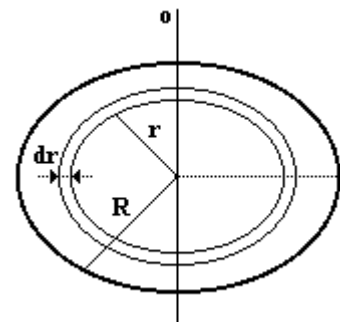
### 2.2.3.5 Plný válec

K odvození momentu setrvačnosti válce je možno přistoupit dvěma různými způsoby (analogicky jako u obalu válce - viz odstavce 2.2.3.3).

#### 2.2.3.5.1 VÝPOČET NA ZÁKLADĚ MOMENTU SETRVAČNOSTI KRUHOVÉ DESKY

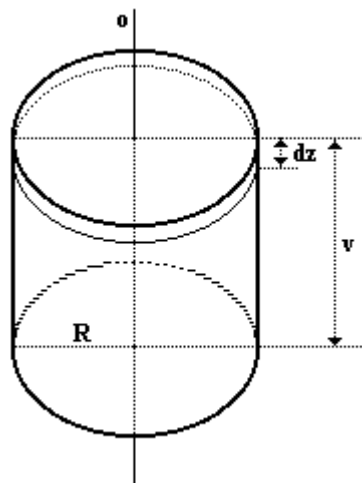
Máme-li k dispozici výpočet (resp. výsledek výpočtu) momentu setrvačnosti kruhové desky (viz odstavce 2.2.3.3), je možné jej použít k výpočtu momentu setrvačnosti plného válce. Válec si složíme z kruhových desek, tj. rozdělíme si jej na tenké plátky, které budou mít „skoro nulovou“ tloušťku  $dz$  (viz obr. 77). Hmotnost  $m$  válce vyjádříme pomocí jeho **objemové hustoty**  $\rho$  takto:  $m = \rho V = \rho \pi R^2 v$ . Pro hmotnost  $dm$  jedné uvažované kruhové desky, z níž je válec složen, pak dostáváme  $dm = \rho \cdot dV = \rho \pi R^2 \cdot dz$ .

Nyní můžeme (ze znalostí výsledku z odstavce 2.2.3.3) vypočítat moment setrvačnosti plného válce:

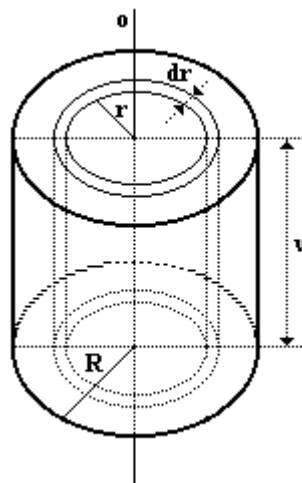


obr. 76

$$J = \int_0^m \frac{1}{2} R^2 dm = \frac{1}{2} R^2 \int_0^v \rho \pi R^2 dz = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 \int_0^v dz = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 [z]_0^v = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 v = \frac{1}{2} R^2 \rho \pi R^2 v = \frac{1}{2} m R^2$$



obr. 77



obr. 78

### 2.2.3.5.2 VÝPOČET BEZ ZNALOSTI MOMENTU SETRVAČNOSTI KRUHOVÉ DESKY

Pokud není výsledek výpočtu momentu setrvačnosti kruhové desky znám, použijeme metodu, která byla vysvětlena právě v odstavci popisující výpočet jejího momentu setrvačnosti (viz odstavec 2.2.3.3). Válec si rozdělíme na souosé válce, které budou mít velmi malé vzdálenosti od sebe, tj. jejich poloměry se budou lišit o vzdálenost  $dr$  (viz obr. 78). Hmotnost  $m$  válce vyjádříme pomocí **objemové hustoty**  $\rho$ :  $m = \rho V$ . Pro hmotnost  $dm$  jednoho uvažovaného válečku dostáváme tedy  $dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r v \cdot dr$ , kde výraz  $2\pi r dr$  udává plochu mezikruží, které vznikne řezem vedeným kolmo na osu  $o$  válce. Odvození tohoto vztahu je uvedeno v odstavci 2.2.3.3 u výpočtu momentu setrvačnosti kruhové desky.

Moment setrvačnosti plného válce je nyní možno určit takto:

$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_0^R 2\pi r v \rho r^2 \cdot dr = 2\rho\pi v \int_0^R r^3 dr = 2\rho\pi v \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\rho\pi v \frac{R^4}{4} = \rho\pi R^2 v \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

Jak způsobem uvedeným zde, tak způsobem uvedeným v odstavci 2.2.3.5.1 jsme obdrželi moment setrvačnosti ve stejném tvaru, jako je moment setrvačnosti kruhové desky. Jinými slovy, u kruhové desky, jejíž výšku jsme původně neuvažovali, na její výšce nezávisí. Moment setrvačnosti je stejný a na výšce desky nezávislý.

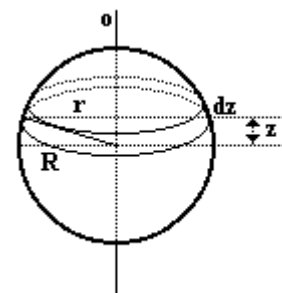
### 2.2.3.6 Koule

Při výpočtu momentu setrvačnosti koule vyjdeme z momentu setrvačnosti kruhové desky (viz odstavec 2.2.3.4). Kouli je možné si totiž představit složenou z řady na sebe položených kruhových desek, jejichž poloměr se plynule zvětšuje (a pak zase zmenšuje). Nicméně v rámci jedné desky, která má tloušťku  $dz$  budeme pokládat tuto desku za všude stejně silnou (tj. za válec). Hmotnost  $m$  koule

vyjádříme pomocí její objemové hustoty  $\rho$  a jejího objemu:  $m = \rho V = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ .

Pro hmotnost  $dm$  jedné uvažované desky (která je vlastně válcem) platí:

$$dm = \rho \pi r^2 \cdot dz.$$



obr. 79

Pro moment setrvačnosti koule pak platí:  $J = \int_0^m \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \rho \pi r^2 r^2 \cdot dz = \rho \pi \int_0^R r^4 dz$ . Nyní je třeba si

uvědomit (viz obr. 79), že na základě Pythagorovy věty je možné psát:  $r = \sqrt{R^2 - z^2}$ . Dosazením do integrálu v momentu setrvačnosti je možné pokračovat ve výpočtu dále:

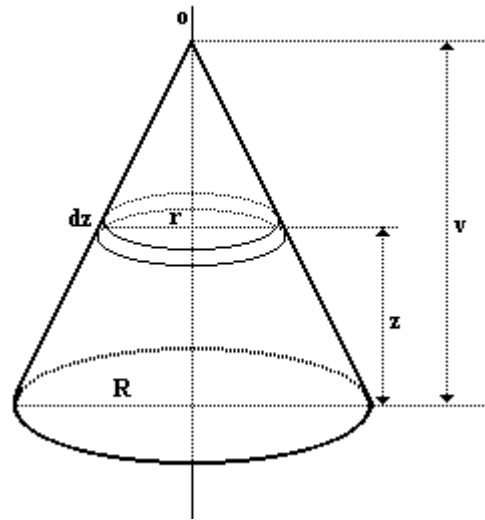
$$\begin{aligned} J &= \rho \pi \int_0^R r^4 dz = \rho \pi \int_0^R \left( \sqrt{R^2 - z^2} \right)^4 dz = \rho \pi \int_0^R (R^2 - z^2)^2 dz = \rho \pi \int_0^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \\ &= \rho \pi \left[ R^4 z - \frac{2R^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right]_0^R = \rho \pi \left( R^5 - \frac{2R^5}{3} + \frac{R^5}{5} \right) = \rho \pi \frac{8R^5}{15} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{2R^2}{5} = \frac{2}{5} m R^2 \end{aligned}$$

### 2.2.3.7 Kužel

Moment setrvačnosti kužele určíme analogicky jako moment setrvačnosti koule (viz odstavec 2.2.3.6). Kužel si rozdělíme na tenké kruhové desky, jejichž tloušťka je  $dz$  a jejichž poloměr se od vrcholu kužele postupně zvyšuje. Pomocí objemové hustoty  $\rho$  vyjádříme hmotnost  $m$  kužele:

$m = \rho V = \frac{1}{3} \pi R^2 v \rho$ . Pro hmotnost  $dm$  kruhové desky, která je vlastně tenkým válcem a pomocí nichž je tvořen kužel, pak platí:  $dm = \rho \pi r^2 dz$ .

Pro moment setrvačnosti kužele je pak možné psát:  $J = \int_0^m \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^v \rho \pi r^2 r^2 dz = \frac{1}{2} \rho \pi \int_0^v r^4 dz$ . Poloměr  $r$  jedné uvažované kruhové desky je možné určit na základě obr. 80 pomocí podobnosti trojúhelníků. Platí totiž  $\frac{v-z}{r} = \frac{v}{R}$ . Odtud je možné vyjádřit  $r$  takto:  $r = (v-z) \frac{R}{v}$ .



obr. 80

Dosadíme-li nyní do integrálu, pomocí něhož počítáme moment setrvačnosti kužele, dostaneme:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \rho \pi \int_0^v r^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi \int_0^v (v-z)^4 \frac{R^4}{v^4} dz = \frac{1}{2} \frac{R^4}{v^4} \rho \pi \int_0^v (v^4 - 4v^3 z + 6v^2 z^2 - 4v z^3 + z^4) dz = \\ &= \frac{1}{2} \frac{R^4}{v^4} \rho \pi \left[ v^4 z - \frac{4v^3 z^2}{2} + \frac{6v^2 z^3}{3} - \frac{4v z^4}{4} + \frac{z^5}{5} \right]_0^v = \frac{1}{2} \frac{R^4}{v^4} \rho \pi \left( v^5 - 2v^5 + 2v^5 - v^5 + \frac{v^5}{5} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{R^4}{v^4} \rho \pi \frac{v^5}{5} = \frac{1}{10} R^4 \rho \pi v = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} \rho \pi R^2 v R^2 = \frac{3}{10} m R^2 \end{aligned}$$

### 2.2.4 Přehled momentů setrvačnosti některých těles

Momenty setrvačnosti jsou uváděny vzhledem k ose rotace, která je zároveň osou symetrie tělesa o hmotnosti  $m$ .  $R$  značí poloměr těles (resp. jejich podstav) s výjimkou tyče, kde  $R$  představuje její délku.

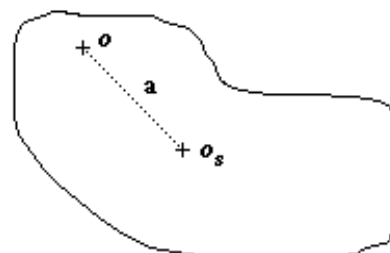
tyč (rotuje kolem osy symetrie kolmé k tyči)	$J = \frac{1}{12} R^2 m$
obruč	$J = R^2 m$
kruhová deska	$J = \frac{1}{2} R^2 m$
válec	$J = \frac{1}{2} R^2 m$
plášť tenkostěnného válce	$J = R^2 m$
koule	$J = \frac{2}{5} R^2 m$
kužel	$J = \frac{3}{10} R^2 m$

### 2.2.5 Steinerova a Königova věta

Steinerova věta slouží k určení momentu setrvačnosti tělesa, u něhož je znám moment setrvačnosti vzhledem k ose symetrie, ale těleso právě rotuje podle jiné osy. K určení momentu setrvačnosti vzhledem k této současné ose stačí určit vzdálenost osy symetrie od současné osy rotace.

Pohled na těleso shora označuje osu symetrie  $o_s$  a současnou osu rotace  $o$ .

Je-li  $J_s$  moment setrvačnosti vzhledem k ose symetrie  $o_s$ , pak pro moment setrvačnosti vzhledem k ose  $o$  platí:  $J = J_s + ma^2$ , kde  $a$  je vzdálenost osy symetrie od současné osy rotace a  $m$  je hmotnost (celého) tělesa.





obr. 81

Königova věta slouží pro určení celkové kinetické energie, kterou má těleso, které koná zároveň dva pohyby: rotační pohyb kolem (okamžité) osy otáčení a posuvný pohyb těžiště. (Příkladem může být např. koule valící se z kopce: bezpochyby koná rotační pohyb kolem okamžité osy otáčení, ale zároveň „se posouvá“ od vrcholu kopce směrem k úpatí, tj. koná posuvný pohyb. Tento posuvný pohyb lze dobře charakterizovat pohybem těžiště, do něhož soustředíme veškerou hmotnost koule.)

Königovu větu lze matematicky zapsat takto:  $E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$ , kde  $m$  je hmotnost tělesa,  $v$  velikost rychlosti posuvného pohybu těžiště,  $J$  moment setrvačnosti tělesa vzhledem k okamžité ose otáčení a  $\omega$  úhlová rychlost rotace.

### 2.2.6 Setrvačnický

Při otáčení tělesa kolem nehybné osy působí na jednotlivé body tělesa setrvačné síly, směřující od osy rotace. Tyto síly namáhají osu svou výslednicí, jestliže osa neprochází těžištěm tělesa, nebo také silovou dvojicí vychylující osu z její polohy. Při vhodné poloze osy se setrvačné síly vzájemně ruší a osa není namáhána silou ani silovou dvojicí. Takové ose se říká **volná osa**. Volná osa prochází vždy těžištěm tělesa.

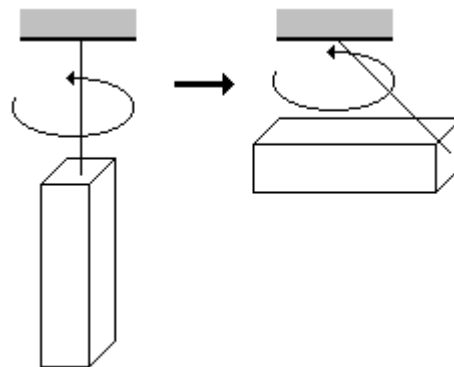
Těleso otáčivé kolem volné osy, vzhledem k níž má velký moment setrvačnosti, se nazývá **setrvačnický**. Setrvačnický mají některé zajímavé vlastnosti, kterých se využívá v praxi:

1. osa setrvačnického, otáčejícího se velkou úhlovou rychlostí, zachovává svůj směr vzhledem k inerciální vztažné soustavě, pokud na setrvačnický nepůsobí vnější síly
2. ke změně směru rotační osy je třeba poměrně velkého momentu síly
3. roztočený setrvačnický má velkou kinetickou energii

Tyto vlastnosti činí setrvačnický velmi praktickými a nacházejí mnohé uplatnění v praxi. Tak například těžké setrvačnický u parních strojů vyrovnávají náhlá zatížení nebo odlehčení strojů, takže jejich chod je rovnoměrnější. Skutečnost, že osa setrvačnického zachovává svůj směr se využívá ke stabilizaci lodí, ke konstrukci setrvačnickových kompasů, umělého horizontu a zatačkoměru u letadel.

#### 2.2.6.1 Volný setrvačnický

Při zkoumání volného (bezsilového) setrvačnického (tj. setrvačnický, jehož moment sil je nulový) zjistíme, že dané těleso je ochotno rotovat rovnoměrně kolem tří vzájemně kolmých os (a to bez ohledu na rozložení hmotnosti či tvar tělesa). Těmto osám říkáme **hlavní osy rotace** a momentům setrvačnosti  $J_1$ ,  $J_2$  a  $J_3$  příslušným těmto osám **hlavní momenty setrvačnosti**. Tyto hlavní osy můžeme navíc ztotožnit s osami myšleného elipsoidu (tzv. **elipsoidu setrvačnosti**), pomocí něhož je možné určit moment setrvačnosti vzhledem k libovolné jiné ose procházející těžištěm. Těleso sebenepřavidelnějšího tvaru (družice s anténami, krasobruslařka, automobil, brambora, ...) pak můžeme z hlediska rotačních vlastností nahradit elipsoidem, který je plně určen třemi čísly - hlavními momenty setrvačnosti. Pak se nemusíme starat o nepravidelnosti a výstupky daného tělesa.



obr. 82

Rotace kolem hlavní osy rotace nemusí být vždy stabilní. Platí-li  $J_1 < J_2 < J_3$ , pak těleso „dává přednost“ rotaci kolem osy s nejmenším nebo největším momentem setrvačnosti (rotace kolem střední osy je nestabilní). Je-li  $J_1 = J_2 < J_3$ , dává těleso přednost rotaci kolem osy s největším momentem setrvačnosti (takový setrvačnický se nazývá **symetrický** a jeho elipsoid setrvačnosti je rotační). Na obr. 82 je znázorněno těleso, které samovolně mění osu rotace.

#### 2.2.6.2 Eulerovy úhly

Rotační pohyb je popsán vektorem úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$ , který leží v ose rotace. Obecnou prostorovou rotaci je možné rozložit do tří směrů (tři vektorů). Výhodný rozklad prostorové rotace na tři dílčí zavedl již v polovině 18. století Leonard Euler a proto se příslušné úhly nazývají **Eulerovy úhly**.

Pohyb tělesa budeme popisovat v inerciální kartézské soustavě  $x, y, z$ . S tuhým rotujícím tělesem spojíme soustavu  $x', y', z'$  (ta není inerciální). Počátky obou soustav na začátku budou splývat a budou také splývat příslušné odpovídající si osy.

První otočení provedeme kolem osy  $z$  o úhel  $\psi$ . Díky tomu přejde osa  $x'$  (původně totožná s osou  $x$ ) do polohy  $x'_1$  a osa  $y'$  (původně totožná s  $y$ ) do polohy  $y'_1$ .

Druhé otočení vykonáme kolem osy  $x'_1$  o úhel  $\vartheta$ . Osa  $y'_1$  přejde do polohy  $y'_2$  a osa  $z'$  (původně totožná s osou  $z$ ) do konečné polohy  $z'$ .

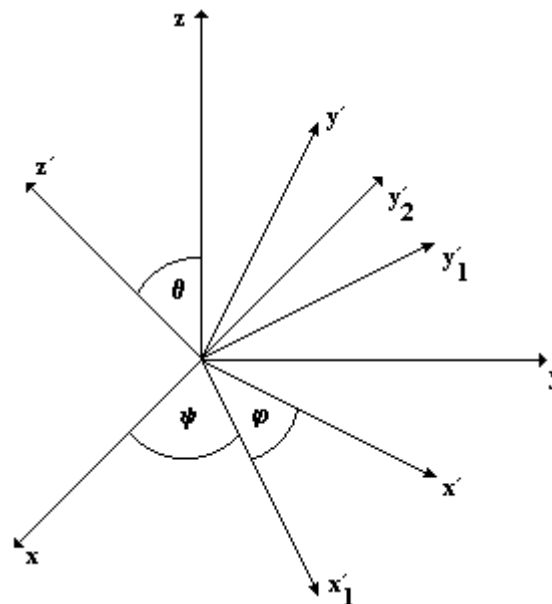
Třetí otočení provedeme kolem této osy  $z'$  o úhel  $\varphi$ , přičemž osa  $y'_2$  přejde do konečné polohy  $y'$  a osa  $x'_1$  do konečné polohy  $x'$ .

Eulerovy úhly mají se nazývají:

1.  $\varphi$  - **úhel vlastní rotace**
2.  $\psi$  - **precesní úhel**
3.  $\vartheta$  - **nutací úhel**

Pojmy precese a nutace nejlépe vysvětlíme na dětské hračce - dětském vlčku. Roztočíme-li ho, bude vykonávat vlastní rotaci. Při postupném zpomalování dojde k vychýlení jeho osy a tato osa bude opisovat plášť rotačního kužele s vrcholovým úhlem  $\vartheta$  - dojde k **precesi**. Ta je způsobena nenulovým momentem tíhové síly. Bude-li se vrcholový úhel  $\vartheta$  měnit v čase, dojde k **nutaci** (způsobené skutečností, že vektor momentu hybnosti  $\vec{L}$  nebude zachovávat v prostoru stálý směr). Konec osy dětského vlčku nebude již opisovat kružnici (hranici podstavy rotačního kužele), ale bude opisovat „zvlněnou kružnici“.

Precese a nutace se projeví i u Země. Tyto pohyby vznikají v důsledku silového působení Slunce a Měsíce na Zemi.



obr. 83

## 2.3 Fourierova transformace

Fourierova transformace je matematický postup, který umožňuje spojitou a periodickou funkci vyjádřit pomocí funkcí sinus a kosinus, tj. jako harmonickou řadu. Při následujícím výkladu se budeme opírat o fyzikální aspekty problému a proto některé věci zjednodušíme. V obecném případě by se problém komplikoval matematicky (např. by se musely zvlášť vyšetřit nespojitě funkce, s nimiž se ve fyzice stejně nesetkáváme). Autorem zmíněného matematického postupu je francouzský matematik a fyzik baron Jean-Baptiste Joseph Fourier (21. 3. 1768 - 16. 5. 1830).

### 2.3.1 Matematický popis

Jestliže funkce  $f(t)$  vyjadřuje časovou závislost (např. tlaku vzduchu v případě hudebního tónu), dá se očekávat, že se funkce  $f(t)$  dá vyjádřit jako součet jistého počtu jednoduchých harmonických funkcí času pro každou z různých harmonických frekvencí. Toto oprávnění je na místě, protože jak už bylo zmíněno, funkce používané ve fyzice jsou spojitě - tlak vzduchu se nemění skokem (nespojité), ale spojitě. Jestliže je perioda kmitů  $T$ , potom základní úhlová frekvence bude  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  a harmonické úhlové frekvence pak budou  $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $4\omega$ , ...

Situace je ale trochu složitější, protože nemůžeme očekávat, že počáteční fáze všech dílčích kmitání budou stejné. Musíme tedy pracovat s funkcemi typu  $\cos(\omega t + \varphi)$ , kde  $\varphi$  je zmíněná počáteční fáze. Vzhledem k tomu, že platí  $\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi$ , rozepíšeme danou funkci  $f(t)$  i pomocí funkce sinus. Pro další je důležité, že počáteční fáze  $\varphi$  je konstantní a tudíž i  $\sin \varphi$  resp.  $\cos \varphi$  je také konstantní. Tím docházíme k závěru, že každou spojitou a periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možné rozepsat ve tvaru:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots,$$

kde  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $a_i$  a  $b_i$  jsou číselné konstanty, které udávají s jakou váhou je každá (harmonická) složka kmitů přítomna v kmitu funkce  $f(t)$ . Uvedené vyjádření funkce  $f(t)$  se nazývá **Fourierova řada** pro funkci  $f(t)$ .

**Poznámka:** Člen  $a_0$  je většinou v hudebních tónech (o něž se ve výkladu Fourierovy transformace opíráme) většinou nulový, ale s jeho zavedením do transformace je tato transformace obecnější.

Pokud jsou dané všechny koeficienty  $a_i$  a  $b_i$  je jednoduché dopočítat funkční hodnotu funkce  $f(t)$  v libovolném časovém okamžiku  $t$  (pro jakoukoliv hodnotu neznámé  $t$ , která vystupuje ve výrazu  $f(t)$ ). Zajímavější (a v praxi častější a složitější) případ je zjišťování koeficientů  $a_i$  a  $b_i$  pro danou funkci  $f(t)$ , kterou chceme vyjádřit pomocí harmonických frekvencí. Základní idea je relativně jednoduchá, jen je komplikovaná matematicky - neobejde se totiž bez integrálního počtu.

### 2.3.2 Odvození koeficientů

Fourierova geniální myšlenka vedla k určení jednotlivých koeficientů  $a_i$  a  $b_i$ . Člen  $a_0$  vyjadřuje posun střední hodnoty za jednu periodu (tj. za časový interval od 0 do  $T$ ). Jinými slovy určuje „posun nulové hladiny“ dané funkce. Střední hodnota funkce  $y = A \cdot \sin kx$  nebo  $y = A \cdot \cos kx$ , kde  $A$  a  $k$  jsou reálné konstanty, je rovna nule.

Střední hodnota součtu se rovná součtu středních hodnot. Proto je střední hodnotou  $f(t)$  rovna právě střední hodnotě z  $a_0$ . Vzhledem k tomu, že  $a_0$  je konstanta, je její střední hodnota totožná s ní samou. Střední (průměrnou) hodnotu u spojitě funkce je možné definovat výrazem:  $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ .

*Poznámka:* V případě (diskrétních, tj. nespojitých) hodnot naměřených během experimentu by střední hodnota (průměr) definován výrazem  $a_{\text{střední}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i = \frac{1}{N} (f_1 + f_2 + \dots + f_n)$ .

Pro určení dalších koeficientů použijeme trik, který použil Fourier. Vynásobíme obě strany rovnice Fourierovy řady nějakou harmonickou frekvencí - např.  $\cos 7\omega t$ , čímž dostaneme:

$$f(t) \cos 7\omega t = a_0 \cos 7\omega t + a_1 \cos \omega t \cdot \cos 7\omega t + b_1 \sin \omega t \cdot \cos 7\omega t + a_2 \cos 2\omega t \cdot \cos 7\omega t + b_2 \sin 2\omega t \cdot \cos 7\omega t + \dots$$

Nyní najdeme střední hodnoty obou stran právě napsané rovnice. Nejprve se podívejme na členy, které obsahují  $a_i$ . Střední hodnota členu s koeficientem  $a_0$  je nulová, protože střední hodnota  $\cos n\omega t$ , kde  $n \in \mathbb{Z}$ , je nulová.

Obecně platný vztah  $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$  použijeme pro zjednodušení dalších členů. Člen u  $a_1$  je  $\frac{1}{2} a_1 (\cos 8\omega t + \cos 6\omega t)$  (víme, že funkce kosinus je funkce sudá, tj.  $\cos x = \cos(-x)$ ).

Střední hodnota tohoto členu je tedy nulová. Podobně dostaneme pro člen s  $a_2$ :  $\frac{1}{2} a_2 (\cos 9\omega t + \cos 5\omega t)$  - tedy opět střední hodnota tohoto členu je nulová. Podobným způsobem bychom mohli postupovat dále a pro všechny členy až na jeden jediný (v našem případě člen s  $a_7$ ) dostáváme střední hodnotu nulovou. Člen s  $a_7$  je možné rozepsat takto:  $\frac{1}{2} a_7 (\cos 14\omega t + \cos 0)$ . Střední hodnota toho členu je tedy rovna  $\frac{1}{2} a_7$ , protože střední hodnota  $\cos 0$  je jedna.

Pro členy, které obsahují  $b_i$  je situace podobná. Nyní ale využijeme vztah  $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$ , s jehož pomocí opět určíme střední hodnoty jednotlivých členů. Nyní je situace ještě jednodušší než u členů s  $a_i$ : všechny členy s  $b_i$  jsou totiž nulové.

Použitý Fourierův trik tedy působil jako síto: po vynásobení Fourierovy řady výrazem  $\cos 7\omega t$  zůstal jediný člen nenulový: člen  $a_7$ . Dostali jsme tak, že střední hodnota výrazu  $f(t) \cos 7\omega t$  je rovna  $\frac{1}{2} a_7$ , což se

dá zapsat matematicky takto:  $\frac{1}{2} a_7 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos 7\omega t dt$ . Odtud dostáváme:  $a_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos 7\omega t dt$ .

Naprostu analogicky bychom postupovali v případě určení jednoho z koeficientů  $b_i$  - např. člen  $b_7$  bychom určili násobením Fourierovy řady výrazem  $\sin 7\omega t$ .

Právě popsáný postup výpočtu koeficientů členů  $a_7$  a  $b_7$  je možné zobecnit pro výpočet libovolného členu Fourierovy řady. Výsledky v obecnějším matematickém tvaru nyní zobecníme. Pro libovolná nenulová čísla  $n$  a  $m$  a  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  platí:

1.  $\int_0^T \sin n\omega t \cdot \cos m\omega t dt = 0$
2.  $\int_0^T \cos n\omega t \cdot \cos m\omega t dt = \int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin m\omega t dt = 0$  pro  $n \neq m$
3.  $\int_0^T \cos n\omega t \cdot \cos m\omega t dt = \int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin m\omega t dt = \frac{T}{2}$  pro  $n = m$
4.  $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$

$$5. \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t dt$$

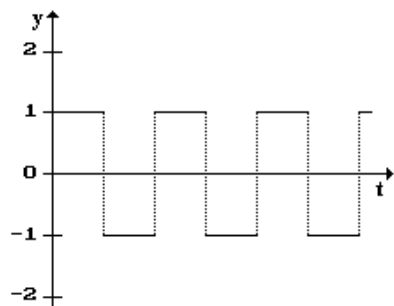
Nyní tedy umíme periodickou funkci „rozložit“ na její harmonické složky. Tento postup se nazývá **rozvoj do Fourierovy řady** a jednotlivé členy se nazývají **Fourierovy složky**.

Matematicky je možné pro širokou třídu funkcí (všechny, které se uplatní ve fyzice) dokázat, že pokud umíme vypočítat integrály, které vystupují v jednotlivých **Fourierových koeficientech**  $a_i$  a  $b_i$ , pak se jejich sečtením dostaneme zpět k původní funkci  $f(t)$ .

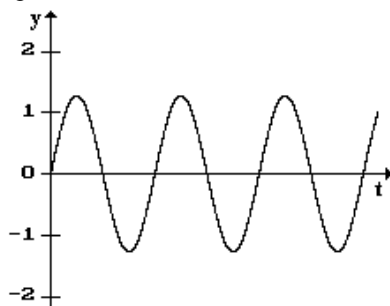
Pokud je ale funkce  $f(t)$  nespojitá (tj. změní se skokem z jedné hodnoty na jinou), dostaneme součtem Fourierovy řady v bodě nespojitosti hodnotu, která leží uprostřed mezi dolní a horní hodnotou skutečné funkce v daném bodě nespojitosti. Tuto výjimku ale můžeme klidně akceptovat, protože ve fyzice se s nespojitými funkcemi setkáme v případě, kdy si zjednodušujeme reálnou fyzikální funkci.

### 2.3.3 Praktický výpočet

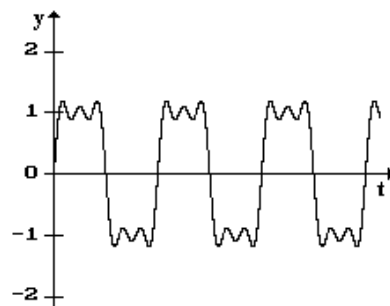
Ve Fourierově řadě se vyskytují dvě sumy, v nichž se sčítá od jedné až do nekonečna. To je v praxi nemožné, takže vždy musíme volit jisté zanedbání a řadu  $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$  nahradit řadou  $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^N b_n \sin n\omega t$ , kde za  $N$  volíme „dostatečně vysoké číslo“, abychom Fourierovu řadu dostali s „dostatečnou přesností“.



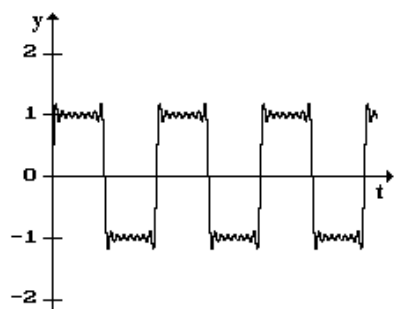
obr. 84



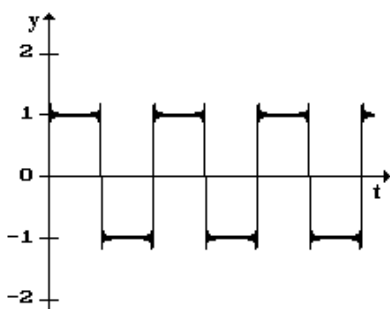
obr. 85



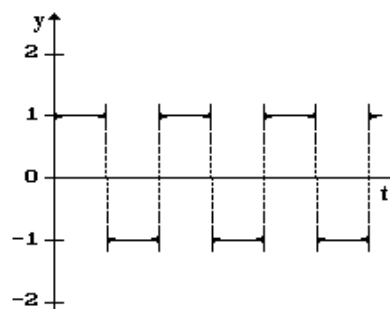
obr. 86



obr. 87



obr. 88



obr. 89

Jak se mění tvar Fourierovy řady v závislosti na počtu sečtených členů si ukážeme na konkrétním příkladu.

**Příklad:** Funkce  $f(t)$  je dána takto:

$$f(t) = 1 \text{ pro } kT \leq t < (2k+1)\frac{T}{2}$$

$$f(t) = -1 \text{ pro } (2k+1)\frac{T}{2} \leq t < (k+1)T, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Najděte její Fourierovskou řadu v závislosti na počtu sečtených členů.

**Řešení:** Tato funkce  $f(t)$  je zobrazena na obr. 84 a její Fourierova řada je:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\omega t),$$

kteřou pro praktický výpočet užijeme ve tvaru  $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\omega t)$ . Na obr. 85 až obr. 89 jsou postupně vykresleny Fourierovy řady této funkce pro  $N = 2; 5; 15; 50; 200$ .

## 2.4 Trasfigurace elektrického obvodu

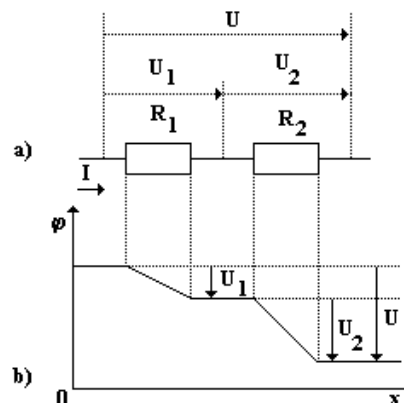
Trasfigurací elektrického obvodu se rozumí postupné zjednodušování složeného obvodu (několik větví, několik různě spojených rezistorů, ...) do obvodu jednoduššího, který by se řešil snáze. U některých obvodů se ale nevystačí pouze se vztahy pro výsledný odpor dvou (a více) sériově (viz odstavec 2.4.1) či paralelně (viz odstavec 2.4.2) spojených rezistorů, ale je třeba použít i vztah pro trasfiguraci tří rezistorů spojených do trojúhelníka na obvod, v němž jsou rezistory spojené do hvězdy (viz odstavec 2.4.3) nebo naopak (viz odstavec 2.4.4).

Pro libovolnou z právě uvedených trasfigurací musí vždy platit, že výsledný odpor mezi libovolnými dvěma uzly je pro zapojení před provedenou trasfigurací a pro zapojení po provedené trasfiguraci stejný.

### 2.4.1 Sériové spojení rezistorů

Při vyšetřování celkového odporu dvou sériově spojených rezistorů o odporech  $R_1$  a  $R_2$  (obr. 90a) zanedbáme odpor spojovacích vodičů. Oběma rezistory prochází stejný proud  $I$ , neboť vodivostní elektrony v obvodu nevznikají ani nezanikají. Celkové napětí na obou rezistorech je rovno součtu napětí na jednotlivých rezistorech (pokles elektrického potenciálu je znázorněn na obr. 90b):  $U = U_1 + U_2$ . Podle Ohmova zákona lze psát:  $U = R_1 I + R_2 I = RI$ . Celkový odpor  $R$  rezistoru, který danou část obvodu nahradí, je tedy roven součtu odporu jednotlivých rezistorů:  $R = R_1 + R_2$ .

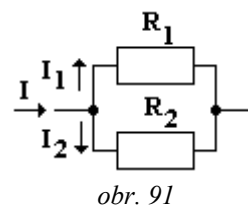
Celkové napětí se při sériovém spojení rezistorů rozdělí v poměru jednotlivých odporů:  $U : U_1 : U_2 = R : R_1 : R_2$ .



obr. 90

### 2.4.2 Paralelní spojení rezistorů

Při paralelním spojení dvou rezistorů o odporech  $R_1$  a  $R_2$  je na všech stejné napětí  $U$ . Celkový proud je roven součtu proudů procházejících jednotlivými rezistory:  $I = I_1 + I_2$ , neboť každý vodivostní elektron projde jen jedním rezistorem. Podle Ohmova zákona je možné psát:  $I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R}$ . Pro celkový odpor a vodivost dané



obr. 91

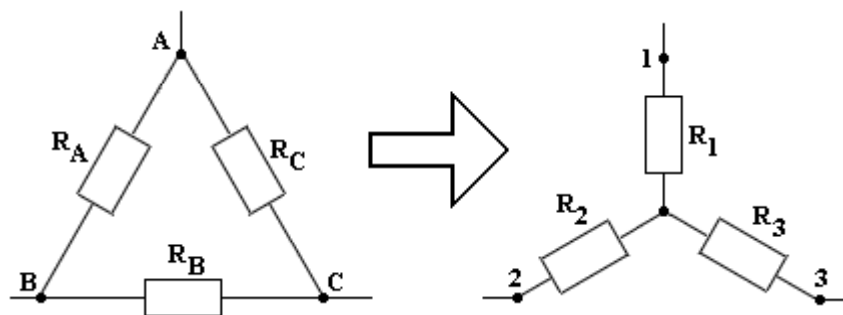
části obvodu dostáváme:  $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = G_1 + G_2$ .

Proud se při paralelním spojení rezistorů rozdělí v poměru  $I : I_1 : I_2 = G : G_1 : G_2 = \frac{1}{R} : \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2}$ .

Vztahy odvozené v odstavcích 2.4.1 a 2.4.2 lze zobecnit pro libovolný počet spojených rezistorů.

### 2.4.3 Přeměna (trasfigurace) trojúhelníka na hvězdu

Přeměnu (trasfiguraci) trojúhelníka na hvězdu je možné sledovat na obr. 92. Na svorky trojúhelníka  $A$ ,  $B$  a  $C$  jsou připojeny rezistory s odpory  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$ . Tyto rezistory chceme nahradit rezistory s odpory  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$  spojenými do trojúhelníku tak, aby výsledné odpory mezi jednotlivými uzly zůstaly nezměněny.



obr. 92

Výsledný odpor  $R_{AB}$  mezi body  $A$  a  $B$  v zapojení tří rezistorů do trojúhelníka je:  $\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B + R_C}$ ,

odkud  $R_{AB} = \frac{R_A(R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C}$ . Odpor  $R_{12}$  mezi svorkami (uzly)  $1$  a  $2$  v zapojení do hvězdy je  $R_{12} = R_1 + R_2$ .

Vzhledem k tomu, že v souladu s trasfigurací musí být odpory  $R_{AB}$  a  $R_{12}$  stejné, dostáváme rovnici:

$\frac{R_A(R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_2$ . Analogicky je možné odvodit další dvě rovnice, takže nakonec získáme soustavu tří rovnic:

$$\frac{R_A(R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_2$$

$$\frac{R_B(R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = R_2 + R_3$$

$$\frac{R_C(R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_3$$

Vyřešit tuto soustavu, tj. určit hodnoty odporů  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$  rezistorů zapojených do hvězdy tak, aby odpovídaly ekvivalentnímu zapojení rezistorů o odporech  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$  do trojúhelníka, je již jednoduché. Stačí použít sčítací metodu: sečíst první a třetí rovnici a odečíst od nich rovnici druhou. Tak postupně dostaneme:

$$\frac{R_A(R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_2$$

$$\frac{R_B(R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = R_2 + R_3$$

$$\frac{R_C(R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_3$$

$$\Rightarrow 2R_1 = \frac{R_A R_B + R_A R_C - R_A R_B - R_B R_C + R_A R_C + R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \Rightarrow 2R_1 = \frac{2R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} \Rightarrow R_1 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$\frac{R_A(R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_2$$

$$-\frac{R_B(R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = -R_2 - R_3$$

$$\frac{R_C(R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_3$$

Analogicky bychom mohli postupovat dále a vyjádřit tak postupně i hodnoty odporů  $R_2$  a  $R_3$  v závislosti na odporech rezistorů  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$ . Ze symetrie zapojení je zřejmé, že obdržíme tyto vztahy:

$$R_1 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

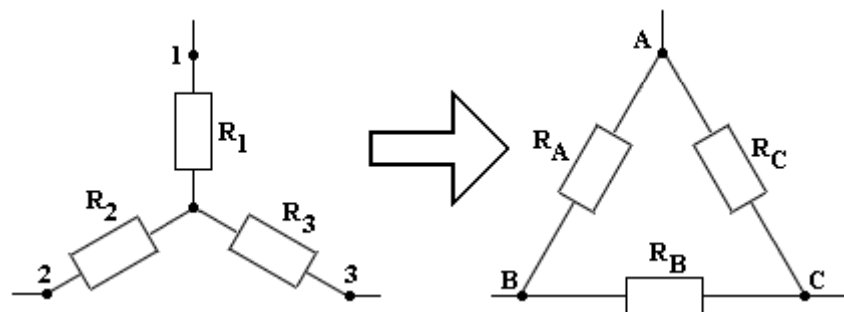
$$R_2 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_3 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

Tím je transfigurace trojúhelníka na hvězdu hotova. Stačí jen překreslit schéma ze zapojení do trojúhelníka do zapojení do hvězdy a hodnoty odporů rezistorů  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$  nahradit právě vypočtenými hodnotami odporů  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$ .

#### 2.4.4 Přeměna (transfigurace) hvězdy a na trojúhelník

Přeměnu (transfiguraci) hvězdy na trojúhelník je možné sledovat na obr. 93. Ke svorkám (uzlům) 1, 2 a 3 hvězdy jsou připojeny rezistory s odpory  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$ . Tyto rezistory chceme nahradit rezistory s odpory  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$  spojenými do trojúhelníka tak, aby výsledné odpory mezi jednotlivými uzly zůstaly nezměněny.



obr. 93

Postup je naprosto totožný s postupem uvedeným v odstavci 2.4.3 (proto jej zde již nebudeme opakovat). Na základě rovnosti odporů mezi odpovídajícími si uzly (body) je možné dospět k soustavě rovnic:

$$\frac{R_A(R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_2$$

$$\frac{R_B(R_A + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = R_2 + R_3$$

$$\frac{R_C(R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_3$$

Z této soustavy rovnic nyní potřebujeme vyjádřit hodnoty neznámých odporů  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$  pomocí odporů  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$ .

Po úpravách dojdeme ke trojici rovnic:

$$R_A = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_B = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_C = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}$$

Tím je transfigurace hvězdy na trojúhelník hotova. Stačí překreslit schéma ze zapojení do hvězdy do zapojení do trojúhelníka a hodnoty odporů rezistorů  $R_1$ ,  $R_2$  a  $R_3$  nahradit právě vypočtenými hodnotami odporů  $R_A$ ,  $R_B$  a  $R_C$ .

## 2.5 Kvantová fyzika

### 2.5.1 Historicko - fyzikální úvod

#### 2.5.1.1 Od Démokrita k Millikanovi

První zmínky o struktuře hmoty se objevují u řeckých filosofů, kteří svým učením vytvořili nový filosofický směr - **atomismus**: Leukippos z Milétu, Démokritos z Abdéry a Epikúros ze Samu. Na jejich učení později navázal římský básník Lucretius Cara (asi 97 - 55 př. n. l.), který soustředil nejúplnější výklad starověkého atomismu ve svém díle *De rerum natura (O přírodě)*.

V představách antických učenců se svět skládá z atomů (nepatrných, okem neviditelných, kompaktních, neměnných, nepropustných a nedělitelných částic) a prázdného prostoru. Obě tyto složky jsou věčné a přechod mezi nimi není možný. Veškeré přírodní, psychické a společenské dění spočívá ve spojování, srážení, postrkávání a rozpojování atomů lišících se navzájem tvarem (kulaté, hranaté, udicovité, ...) a hmotností. Vlastnosti látek závisejí na druhu atomů, z nichž jsou složeny, i na jejich uspořádání.

Téměř 2000 let zůstal Lucretiův epos o stavbě hmoty nepřekonán. Proti atomům jako pevným částicím, které se při svém pohybu nikdy neopotřebují, nenamítal nic ani Isaac Newton. Teprve na přelomu osmnáctého a devatenáctého století byl antický model zpřesněn anglickým fyzikem a chemikem Johnem Daltonem (1766 - 1844) - nastupuje **atomismus chemický**. Dalton zjišťuje, že se chemické prvky neslučují v libovolných množstvích, ale jen v určitých stálých hmotnostních poměrech. To lze vysvětlit tak, že se atomy jednotlivých prvků spojují v molekuly jakožto nejmenší částice chemických sloučenin. Dospíváme tedy k závěru: **Makroskopická tělesa nejsou spojitá, ale mají přetržitou strukturu. Skládají se z molekul, jako nejmenších částic chemických sloučenin. Molekuly se skládají z atomů, jako nejmenších částic chemických prvků.**

Ve druhé polovině devatenáctého století probíhalo intenzivní studium elektrických a magnetických jevů, neboť podstata el. proudu nebyla zatím známa. V roce 1859 objevil Plücker katodové paprsky, které vznikají ve výbojové trubici za silně sníženého tlaku. Pokusy bylo zjištěno, že tyto paprsky vyletují z katody, ionizují plyny, vyvolávají světélkování a zahřívání látky, roztáčejí malý lehký mlýnek, pronikají tenkým hliníkovým plíškem a odchylují se v el. a mg. poli jako záporně nabitě částice. Při dopadu na anodu vyvolávají rentgenové záření, jak zjistil v roce 1895 W. C. Röntgen, nositel první Nobelovy ceny za fyziku z roku 1901.

Na základě těchto a podobných pokusů vyslovil v roce 1897 ve přednášce v Royal Institutu Joseph John Thomson (anglický fyzik 1856 - 1940, nositel Nobelovy ceny za rok 1906) hypotézu o **elektronu**. Prokázal, že katodové paprsky jsou proudem rychle letících záporně nabitých částic („atomů elektriny“). Tyto elektrony se musí uvolňovat z atomů tvořících katodu. Později byly zjištěny další zdroje elektronů - uvolňují se ze záporně nabitě zinkové destičky při dopadu světla, z rozžhaveného kovového drátku, při radioaktivním rozpadu, ...

Na základě odchylování elektronů v el. a mg. polích určil J. J. Thomson měrný náboj elektronu, tj. poměr el. náboje elektronu a jeho hmotnosti. První elementární částice, kterou Thomson objevil, má tedy náboj  $q_e = -e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  a hmotnost  $m_e = 9,110 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

Podobným tématem se zabýval také americký fyzik Robert Andrews Millikan (1868 - 1953, Nobelova cena za rok 1923) v roce 1910. Při svých pokusech Millikan změřil náboje kapiček ricinového oleje a zjistil, že náboj je vždy malým celočíselným násobkem záporně vzatého elementárního náboje. Vysvětlit to lze tak, že na

kapičce vždy ulpí několik málo elektronů. Tím bylo ukázáno, že elektrický náboj je **kvantován** (tj. je možné ho měnit jen nespojitě - skokově).

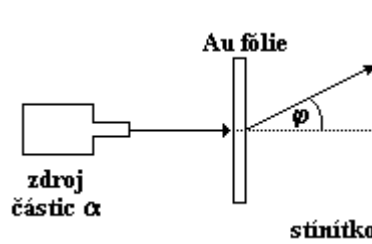
### 2.5.1.2 První modely atomů

Poznatek o tom, že elektrony vylétují z atomů, vyvrátil odvěkou představu o nedělitelnosti atomů a nastolil otázku jejich struktury. Předpokládejme, že atom obsahuje  $Z$  elektronů. Zároveň je atom jako celek elektricky neutrální, proto se v něm musí vzájemně vyrovnávat záporný náboj elektronů  $-Ze$  a kladný náboj  $Ze$ . Otázkou ovšem zůstává, jak jsou kladné a záporné náboje v atomu uspořádány. J. J. Thomson předpokládal, že kladný náboj je rozložen rovnoměrně v celém objemu atomu a záporně nabitě elektrony jsou v něm rozmístěny náhodně jako rozinky v oblíbeném anglickém pudinku. Tak vznikl **Thomsonův (pudinkový) model atomu**. Náhodné rozmístění záporně nabitých elektronů v kladné hmotě atomu je ale takové, aby atom držel pohromadě a byl stabilní. Neboť pozorování nasvědčovalo tomu, že atom je útvar stabilní.

### 2.5.1.3 Objev atomového jádra

Skutečnou strukturu atomu však odhalily až pokusy Ernesta Rutherforda (1871 - 1937, Nobelova cena za chemii za rok 1908), Hanse (Johannese) Geigera (1882 - 1945, německý fyzik) a E. Marsdena v roce 1911. V té době již byly známy radioaktivní látky, které uvolňují záření  $\alpha$  a  $\beta$ . Rutherford ověřil, že záření  $\alpha$  představují rychle letící kladně nabitě částice. Jedná se o atomy helia zbavené elektronů, mají elektrický náboj  $2e$  a hmotnost 7293krát větší než elektron.

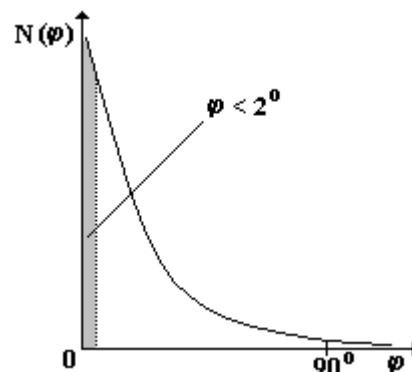
Zároveň se Rutherfordovi podařilo nalézt způsob, jak tyto částice počítat pomocí záblesků, který vyvolávají při dopadu na stínítko pokryté sulfidem zinečnatým.  $\alpha$  částice poté využil Rutherford jako střely, kterými zkoumal atom. Nechal tyto částice pronikat zlatou fólií (viz obr. 94), kterou je možné vytepat na tenkou (jednoatomovou) tloušťku. Poté registroval částice na pohyblivém stínítku a studoval jejich rozptyl. Jako pohyblivé stínítko byl použit mikroskop, jehož objektiv byl tvořen destičkou, na níž byla nanesena vrstva sulfidu zinečnatého.



obr. 94

Lehké elektrony v atomech zlata nemohou trajektorii těžkých  $\alpha$  částic znatelně ovlivnit. Je-li kladný náboj rozprostřen v celém atomu rovnoměrně, jak předpokládá Thomson a jeho model atomu, pak částice  $\alpha$  prolétávající středem atomu se nebudou odchylovat vůbec od původního směru a částice prolétávající dále od středu se budou vychylovat jen mírně (maximálně o úhel  $1^\circ - 2^\circ$ ). Experiment však ukázal něco zcela nečekaného. Odchytky byly podstatně větší, některé částice se dokonce vychýlily o úhel blízký  $180^\circ$ , tj. odrážely se zpět.

Názorně tuto situaci zobrazuje graf na obr. 95. Veličina  $N(\varphi)$  popisuje počet částic, které se vychýlily z původního směru o úhel  $\varphi$ . Teoreticky očekávaná odchylka  $1^\circ - 2^\circ$  odpovídá největšímu počtu částic, ale jsou částice, které se vychylují pod úhlem větším než  $90^\circ$ .



obr. 95

Výsledek experimentu bylo možné vysvětlit pouze tak, že celý kladný náboj a téměř celá hmotnost atomu jsou soustředěny v nesmírně malé centrální oblasti - v atomovém jádře. Rutherford odvodil vzorec pro rozptyl částic  $\alpha$  na jádře a určil odtud jeho rozměr na řádově  $10^{-15} - 10^{-14} m$  zatímco rozměr celého atomu je řádově  $10^{-10} m$ . Znamená to tedy, že atom je v podstatě prázdný prostor, v němž se pohybuje několik elektronů (v tzv. elektronovém obalu) a v jeho středu je nepatrné, ale velmi těžké jádro.

**Atom se skládá z malého kladně nabitého jádra, v němž je soustředěna téměř celá hmotnost atomu a z elektronového obalu. Kladný náboj jádra  $Ze$  a záporný náboj obalu  $-Ze$  se vzájemně vyrovnávají.**

Rutherfordova metoda sondování mikroobjektů pomocí rychle letících částic je od té doby ve fyzice užívána univerzálně.

Na základě svého objevu dospěl Rutherford k modelu atomu, který si představoval podobně jako Sluneční soustavu. Roli Slunce zde hrálo jádro, kolem něhož obíhaly elektrony tak, jako obíhají planety kolem Slunce. Tomuto modelu se říká **Rutherfordův planetární model atomu**. Elektron se v něm pohybuje po kruhových trajektoriích, pod vlivem dostředivé síly, která je zde realizována elektrostatickou silou působící mezi záporně nabitým elektronem a kladně nabitým jádrem atomu. Popis pomocí matematických vztahů je analogický popisu, který později prováděl Bohr (viz odstavec 2.5.10) s tím rozdílem, že elektrony se nenacházejí na určených drahách. V Rutherfordově modelu se tedy elektrony pohybují po kružnicích o „libovolných“ poloměrech. Důležité je, že se jedná o pohyb se zrychlením, při němž nabitá částice vyzařuje elektromagnetické záření. Toto vyzařování se děje na úkor energie elektronu. Tím, že elektron ztrácí svoji energii, klesá velikost jeho rychlosti a elektron se přibližuje k jádru, až na něj spadne. Tento pád do jádra nastane za dobu řádově



$10^{-16}$  s, což ale znamená, že atom by byl útvar značně nestabilní. Rutherfordův model tedy nedopovídá skutečnosti, protože atomy (a objekty z nich složené - věci, lidé, ...) jsou útvary stabilní.

S vylepšením tohoto modelu přišel Bohr (viz odstavec - 2.5.10).

### 2.5.2 Složení jádra

Molekuly a atomy jsou elektricky neutrální, tj. jejich celkový elektrický náboj je nulový. Atom daného prvku obsahuje  $Z$  elektronů, přičemž číslo  $Z$  zároveň určuje pořadí prvku v Mendělejevově periodické soustavě prvků. To ale znamená, že náboj jádra tohoto prvku musí být roven  $Ze$ , aby se vyrovnal záporný náboj elektronů.

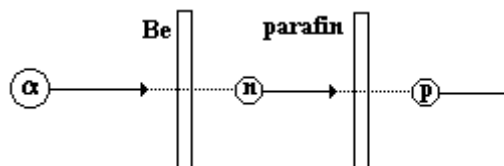
Počátkem 20. století bylo v souvislosti s objevem radioaktivity zjištěno, že mohou existovat atomy téhož prvku s tímž počtem elektronů  $Z$ , které se ale budou lišit svojí hmotností. Jejich jádra mají tedy stejný náboj, ale různou hmotnost. Je proto dobré rozlišovat **chemický prvek**, který je tvořen atomy s tímž nábojem jádra  $Ze$  bez ohledu na hmotnost, a **nuklid**, který je tvořen atomy pouze jednoho druhu s jádry o stejném náboji a hmotnosti (tj. nuklid je charakterizován ne jen číslem  $Z$ , ale také svojí hmotností).

Dva různé nuklidy téhož prvku není možné žádnými **chemickými** metodami odlišit a je možné je odlišit pouze **fyzikálně** - mají tedy shodné chemické vlastnosti, ale různé vlastnosti fyzikální. To se projeví např. při průletu daného nuklidu (částice) urychlovačem, kde závisí na rychlosti částice, její hmotnosti, ... tedy na fyzikálních vlastnostech. Nuklidy téhož prvku „sedí“ na stejném místě periodické soustavy prvků, říká se jim **izotopy** (*izo = stejný, topos = místo*). Prvky, které se vyskytují v přírodě, jsou zpravidla směsí více izotopů a to (až na výjimky) ve stálých poměrech.

Podobně je možné hovořit o **izobarech** - nuklidech, které mají stejnou hmotnost, ale liší si číslem  $Z$ . Mají tedy stejné fyzikální vlastnosti, ale různé chemické. V periodické soustavě prvků patří na různá (ale blízká) místa.

#### 2.5.2.1 Objev neutronu

Vysvětlení izotopie je možné provést na základě hypotézy, že atomové jádro je tvořeno jednak kladně nabitými částicemi o hmotnosti jádra nejjednoduššího nuklidu vodíku, kterým říkáme **protony**, jednak přibližně stejně těžkými elektricky neutrálními částicemi, kterým se říká **neutrony**. Oba druhy částic mají společné označení **nukleon**, neboť se nacházejí v jádře.



obr. 96

Existenci neutronu tušil Rutherford již počátkem dvacátých let 20. století, i když objeven byl až v roce 1932 na základě pokusů, které prováděl anglický jaderný fyzik James Chadwick (1891 - 1974, Nobelova cena za rok 1935). Pomocí  $\alpha$  částic ozařoval beryllium a zjistil, že při tom vzniká záření, které se neodchyluje ani v elektrickém ani v magnetickém poli. Navíc velice snadno reaguje s parafinem (uhlovodík nasycený vodíkem). Z parafinu poté vylétávají protony, které nesou energii, kterou před vytržením protonu z parafinu nesla částice o zhruba stejné hmotnosti. Tak byl objeven neutron (obr. 96).

#### 2.5.2.2 Číslo popisující atomové jádro

Atomové jádro je tedy tvořeno protony a neutrony. Počet protonů udává **protonové** (atomové) **číslo  $Z$**  ( $Z \geq 1$ ), počet neutronů v jádře pak **neutronové číslo  $N$**  ( $N \geq 0$ ). Jejich součet je **číslo nukleonové** (hmotnostní)  $A$  ( $A = Z + N$ ).

Atomové jádro je tedy charakterizováno:

1. **hmotností** - experimenty ukázaly, že hmotnost jádra vyjádřená v jednotkách atomové hmotnostní konstanty  $m_u$  se málo liší od celých čísel; proto se bylo zavedeno hmotnostní (nukleonové) číslo  $A$ , které vyjadřuje hmotnost jádra vyjádřenou pomocí této atomové hmotnostní konstanty. U přírodních prvků se ale jedná o hmotnost směsi různých izotopů a proto se může číslo  $A$  od celých čísel lišit.
2. **nábojem** - který objevil při svých pokusech Rutherford a který je celočíselným  $Z$ -násobkem náboje elektronu, přičemž toto  $Z$  udává polohu prvku v Mendělejevově periodické soustavě prvků

### 2.5.3 Záření absolutně černého tělesa

Struktura látky (tvořená částicemi) není statická - uvnitř molekul, atomů a jejich jader probíhá neustálý pohyb. Částice, z nichž je látka vytvořena, na sebe působí vzájemnými silami, které vysvětlujeme tak, že částice kolem sebe vytvářejí silová pole a jich prostřednictvím působí na ostatní částice.

Fyzikální pole je kromě látky další formou hmoty, s níž se v přírodě setkáváme (v podobě pole gravitačního, elektrického, magnetického, elektromagnetického, ...). Zvláště důležité je pole elektromagnetické, které se může prostorem šířit v podobě elmg. vln. Vlny o krátkých vlnových délkách se šíří přímočaře, v podobě

paprsků a proto o nich hovoříme jako o **záření**. Ve vakuu se všechny druhy elmg. vlnění šíří rychlostí  $c$ , která je vlnovou délkou elmg. vlny  $\lambda$  a její frekvencí  $f$  svázána vztahem  $c = \lambda f$ .

Podle vlnových délek rozlišujeme spektrum elmg. záření (vlny rádiové, mikrovlny, infračervené, světelné, ultrafialové, rentgenové a záření  $\gamma$ ). Lidské oko vnímá jen omezený interval z tohoto spektra - viditelné světlo o vlnových délkách z intervalu  $400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}$ .

Elmg. záření vydávají všechna tělesa. Chladná vyzařují okem neviditelné infračervené záření, zahřátá tělesa (asi nad  $300 \text{ K}$ ) pak záření viditelné. Při dopadu záření na těleso může toto těleso záření:

1. pohltit (absorbovat)
2. odrazit

Důležitým případem je **záření rovnovážné (záření absolutně černého tělesa)**. Toto záření vzniká v uzavřené dutině, jejíž stěny jsou ohřáty. Nastane zde rovnováha mezi vyzařováním a pohlcováním záření stěnami, přičemž se záření může od stěn mnohonásobně odrážet. Nahlížíme-li do dutiny malým otvorem, je možné pozorovat celé spektrum elmg. záření, přičemž tento otvor se nemusí jevit černým.

*Poznámka: Absolutně černým tělesem je i Slunce, jehož rovnovážné záření odpovídá teplotě řádově  $5000 \text{ K}$ . Slunce je možné považovat za absolutně černé těleso proto, že je jeho objem, v němž záření vzniká, je obrovský v porovnání s povrchem, kterým se záření dostává ven. Povrch tedy představuje jakýsi „otvor do dutiny“.*

Rovnovážné záření zahřátých těles bylo intenzivně zkoumáno ve druhé polovině 19. století. Bylo zjištěno, že spektrum takového tělesa závisí pouze na teplotě tělesa, nikoliv na chemickém složení, ... Spektrum tohoto záření je spojité, těleso vyzařuje na všech vlnových délkách. Maximální energie je vyzařována na určité vlnové délce, která se zmenšuje úměrně s rostoucí termodynamickou teplotou (tuto skutečnost popisuje Wienův posunovací zákon), celková intenzita vyzařovaného záření roste úměrně čtvrté mocnině termodynamické teploty (Stefan - Boltzmanův zákon). Roste-li teplota tělesa, intenzita záření velmi rychle vzrůstá a jeho spektrum se posouvá k vyšším frekvencím.

### 2.5.3.1 \*\*\*Vztahy popisující vyzařování absolutně černého tělesa

Právě uvedené zákonitosti byly v 19. století experimentálně potvrzeny. Přesto se nedařilo vysvětlit celý průběh spektra rovnovážného záření, nedařilo se odvodit vzorec závislosti spektrální hustoty intenzity vyzařování  $H$  na frekvenci (resp. vlnové délce) elmg. záření, který by vyjadřoval závislost energie rovnovážného záření na vlnové délce (resp. frekvenci) při dané termodynamické teplotě. Bylo provedeno několik pokusů, které ale vždy vysvětlovaly pouze určitou část spektra:

1. Rayli - Yeans odvodili na základě experimentů vztah  $H \propto \nu^{-4}$ , který (jak se ukázalo) dobře popisoval elmg. záření malých frekvencí. Pro vyšší frekvence na základě tohoto vztahu vycházely nesmyslné výsledky. Proto se v této souvislosti začalo mluvit o tzv. ultrafialové katastrofě, neboť vztah selhával právě pro ultrafialovou část spektra.
2. Wien odvodil z experimentů vztah  $H \propto \nu^{-5} e^{-b\nu/T}$ , který ovšem zase naopak dával dobré výsledky pro velké frekvence elmg. záření a nevystihoval dobře elmg. záření malých frekvencí.
3. Planck intuitivně odvodil vztah  $H \propto \nu^{-3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$ , který už popisoval dobře celé spektrum

elmg. záření. Teorii, kterou Planck rozpracoval a z níž tento vztah poté odvodil přesnými výpočty, nebylo možné vysvětlit klasicky. V této souvislosti se začalo mluvit o krizi klasické fyziky.

Ve vztazích je  $c$  velikost rychlosti světla ve vakuu,  $f$  frekvence elmg. záření,  $T$  teplota absolutně černého tělesa, které elmg. záření vyzařuje,  $k$  Boltzmannova konstanta a  $h$  Planckova konstanta (viz odstavec 2.5.4).

### 2.5.4 Planckova kvantová hypotéza

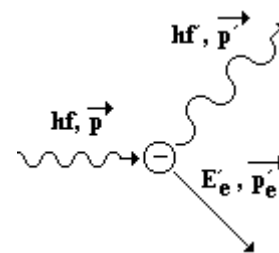
Hledaný vzorec, který by odpovídal celému spektru vyzařovanému absolutně černým tělesem, odvodil (resp. intuitivně „uhádl“) až Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 - 1947; německý fyzik, Nobelova cena v roce 1918). O svém úspěchu podal zprávu 14. 12. 1900 a tento den je pokládán za den vzniku kvantové fyziky. Planck se totiž musel vzdát předpokladu spojitého šíření elmg. záření, tj. záření vydávané a pohlcované jednotlivými atomy zahřátého tělesa se nešíří spojitě, ale v tzv. **kvantech** (dávkách, „chomáčcích“ energie). Energie takového kvanta záření je úměrná jeho frekvenci, přičemž konstantou úměrnosti je tzv. Planckova konstanta  $h$ . Pro energii jednoho kvanta tedy platí:  $E = hf$ .

Kvantová hypotéza říká, že energie nemůže být libovolně malá, neboť je kvantována a její kvantum závisí na frekvenci záření. Z klasické fyziky neplyne žádný důvod pro takové tvrzení a sám Planck je zpočátku

považoval jen za vhodný matematický požadavek při odvozování svého vzorce, aniž by mu přikládal hlubší fyzikální význam.

### 2.5.5 Foton

Albert Einstein začal považovat jako první kvanta elmg. záření za skutečné částice. Přímysl a přesvědčivý důkaz této jejich povahy podal až v roce 1922 americký fyzik Arthur Holly Compton (1892 - 1962, Nobelova cena v roce 1927), který experimentoval s tvrdým rentgenovým zářením o vlnové délce , jehož kvanta mají vysokou energii: . Rovnoběžný svazek tohoto záření nechal dopadat na uhlíkovou destičku a měřil frekvenci záření rozptýleného pod různými úhly. Kvanta záření se přitom chovala jako malé pružné kuličky, které se srážely s elektrony. Protože energie kvant vysoko převyšovala vazebnou energii elektronů v uhlíku, bylo možné považovat elektrony za volně nehybné částice (viz obr. 97).



obr. 97

Při pružných srážkách musí být splněny zákony zachování energie a zákony zachování hybnosti. Frekvence záření rozptýleného pod určitým úhlem pak splňuje rovnici: , kde  $f$  je frekvence záření původního svazku,  $f'$  frekvence záření rozptýleného a  $E_e$  kinetická energie elektronu po srážce. Podle této rovnice je tedy . Tento rozptyl záření na volných elektronech byl nazván **Comptonův jev**.

Na světlo a ostatní druhy elmg. záření lze pohlížet jako na proud částic. Americký fyzik G. N. Lewis pro ně zavedl název fotony. Jedná se o nový druh částic s nulovou klidovou hmotností, které s sobě spojují chování vln i částic, neustále se pohybují rychlostí světla a jejich energie jsou dány vztahy a .

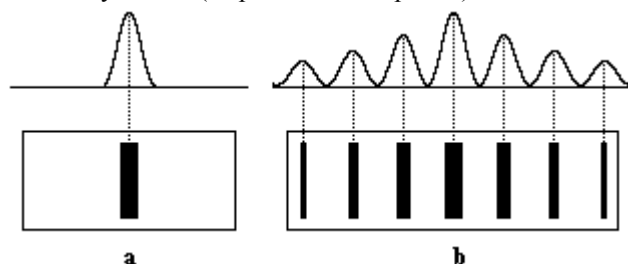
S fotony se člověk setkával již od pradávna, neboť vnímal světlo. Fyzikálně se je podařilo objevit až ve 20. století. Jejich objev souvisí s historií výzkumu podstaty světla. V 17. století byly vypracovány dvě teorie vysvětlující vlastnosti světla:

1. **Newtonova (korpuskulární) teorie** - chápe světlo jako proud částic (korpuskulí)
2. **Huygensova (vlnová) teorie** - světlo chápe jako vlnění světového éteru

Některé jevy (odraz, lom) bylo možné vysvětlit z hlediska obou teorií. Z hlediska Newtonovy teorie se jednalo o částice, které se prostě při dopadu na rozhraní dvou prostředí odráží nebo jím procházejí (jsou natolik malé). Analogicky bylo možné pomocí Newtonovy teorie vysvětlit disperzi světla: bílé světlo je složeno z částic („kuliček“) různých druhů (barev), které vnímáme spolu dohromady jako barvu bílou. Při disperzi se pak částice jednotlivých barev od sebe oddělí.

V 19. století však došlo k zásadnímu zvratu a byla všeobecně přijata teorie vlnová. Young a Fresnel prováděli pokusy s difrací (ohybem) světla. Ohyb nastává na malých překážkách či otvorech (srovnatelných s vlnovou délkou světla), na hraně, vlasu, tenkém drátku, jedné či více štěrbinách, na mřížce. Ve všech těchto případech procházející světelné vlny vzájemně interferují, v některých směrech se vzájemně zesilují, v jiných se zase zeslabují a vytvářejí tak na stínítku charakteristický ohybový obrazec (viz obr. 98b). Tyto experimenty není možné vysvětlit z hlediska korpuskulární teorie - ta dává výsledný obrazec s maximální intenzitou přímo naproti otvoru (viz obr. 98a) bez typického opakování světlých a tmavých míst (resp. barevného spektra).

J. C. Maxwell později dokázal, že světelné vlnění není vlněním éteru, jak se do té doby soudilo, ale že se jedná o zvláštní případ vlnění elektromagnetického. Na základě toho vypracoval celou teorii elektromagnetického pole, která velice dobře souhlasila s již zjištěnými (a ověřenými) fakty a zákony (Ohmův, ...). Zároveň umožnila rozvoj poznatků „novým“ směrem.



obr. 98

Na druhé straně Planckova kvantová hypotéza vysvětlující spektrum rovnovážného záření, Einsteinova teorie fotoefektu a Comptonův jev nás přesvědčují o tom, že světlo má částicový (korpuskulární) charakter. Tím ale vzniká rozpor neřešitelný v rámci klasické, makroskopické fyziky: Je-li světlo proud částic (fotonů), jak je možné vysvětlit jeho difrakci na dvou štěrbinách? Částice přece může projít jen jednou štěrbinou a přítomnost druhé štěrbinu na něj nemůže mít žádný vliv. A přesto, jestliže zakryjeme jednu štěrbinu, difrakční obrazec se změní.

Bylo by možné si představit, že vlnění nastává, pohybuje-li se současně velké množství fotonů, podobně jako vznikají vlny v plynech nebo kapalinách. Proto byly prováděny pokusy s velmi slabým zářením a dlouhými expozičními dobami, kdy do difrakčního systému vstupoval jeden foton po druhém. Každý takový foton vyvolal samozřejmě zčernání jen jednoho bodu fotografické desky v místě, kam náhodně dopadl. Po delší době však zčernalé body začaly opět vytvářet difrakční obrazec jako v případě vlny dopadající současně na obě štěrbinu. Na některá místa fotografické desky dopadlo fotonů méně, na některé více a pravděpodobnost dopadu se řídila přesně chováním vlny při difrakci na dvou štěrbinách.

Proto je nutné připustit, že foton se chová jako částice a zároveň jako vlna. Interferenčními metodami je možné měřit jeho frekvenci a vlnovou délku, pozorujeme-li jeho ohyb na překážkách a štěrbinách. Popisujeme tedy chování fotonu jako vlnu. Na druhé straně při fotoefektu a Comptonově jevu se chová foton jako částice - sráží se s elektrony a předává jim část své energie analogicky jako jedna kulečnicková koule předává energii jiné kouli při vzájemné srážce. Při dopadu na fotografickou desku vyvolá každý foton zčernání v určitém místě jako důsledek chemické reakce. Chová se tedy jako částice.

Uvedený rozpor se nazývá **korpuskulárně vlnový dualismus**. Mnoho fyziků již vedlo spory o tom, jak si představit částici, která se chová jako vlna, a vlnu, která se chová jako částice. Je to ale nesprávně položená otázka. Z naší běžné makroskopické zkušenosti jsme zvyklí buď na pohyb částic, těles (letící kulka, automobil, planeta, ...) a nebo na pohyb vlny (zvuk, vlna na vodní hladině, ...). Částice má v klasické fyzice v každém okamžiku určitou polohu na své trajektorii a určitou rychlost, vlna má zase vlnovou délku a frekvenci a zasahuje současně do celého prostoru.

Foton je objekt mikrosvěta a pohybuje se prostě jinak, než jak jsme zvyklí si představovat. Není možné prostě určit jeho trajektorii a stanovit místo jeho dopadu např. na fotografické desce. Je možné stanovit pouze **pravděpodobnost**, s níž dopadne do daného místa. Podle druhu experimentu, který s fotonem provádíme, může foton projevit buď svou částicovou nebo vlnovou povahu, i když se samozřejmě jedná o tentýž objekt. **Se zkracováním vlnové délky se projevují částicové vlastnosti fotonu výrazněji.**

## 2.5.6 Vlnové vlastnosti částic

### 2.5.6.1 De Broglieho hypotéza

Foton, kvantum elmg. záření, které bylo považováno za čistě vlnový jev, se chová zároveň také jako částice a vymyká se z rámce běžných představ klasické, makroskopické fyziky. V roce 1924 Louis de Broglie (1892 - 1987, francouzský fyzik, Nobelova cena v roce 1929) přišel s velmi odvážnou myšlenkou, která se později ukázala být geniální: Jestliže se kvantum elmg. záření chová jako částice, proč by se ostatní objekty mikrosvěta, které byly dosud považovány za částice v klasickém slova smyslu (elektron, neutron, proton, atomy, molekuly, ale i tělesa z nich vytvořená), nemohly chovat zároveň jako vlna?

L. de Broglie navrhl každé volně se pohybující částici, která má energii  $E$  a hybnost  $p$ , přiřadit frekvenci  $\nu$  a vlnovou délku  $\lambda$  analogickými vztahy, které platí pro fotony. To jsou sice částice o nulové klidové hmotnosti, ale podle de Broglieho hypotézy by měly platit i pro částice o nenulové klidové hmotnosti. Potom je možné psát:

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda},$$

kde  $m$  je hmotnost částice.

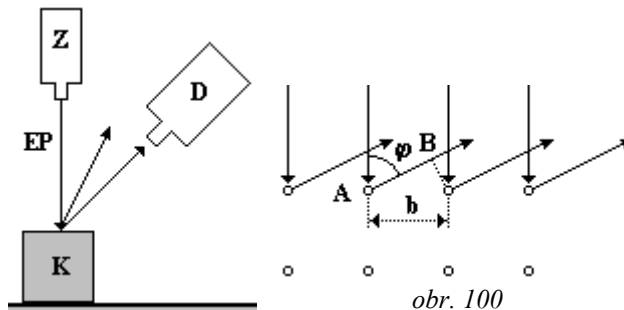
Určitá energie a hybnost charakterizují stav rovnoměrně přímočaře se pohybující částice, určitá frekvence a vlnová délka zase postupnou rovinou vlnu. Oba tyto pohyby, které de Broglie spojil právě uvedenými vztahy, jsou ale pouze ideální. Žádná částice ani vlna se nemůže pohybovat v nekonečném prostoru po nekonečnou dobu.

De Broglieho myšlenka byla dost fantastická a neopírala se o žádné experimenty. Nebylo také jasné, co má být vlastně podstatou de Broglieových vln, „co se vlastně vlní“ a jak jsou vlna a částice vzájemně spojeny. Většina fyziků proto nebrala jeho myšlenku vážně, pouze někteří (A. Einstein, ...) si uvědomili její dosah a hloubku. Aby mohla být experimentálně potvrzena, bylo třeba ověřit, zda např. elektrony projevují takové vlastnosti jako je difrakce nebo interference.

První experimenty, které de Broglieho myšlenku potvrdily, provedli nezávisle na sobě C. Davisson a L. Germer v USA a G. P. Thomson (syn J. J. Thomsona) v Anglii v roce 1927.

V Davissonově - Germanově experimentu, který je znázorněn na obr. 99, dopadal svazek elektronů (elektronový paprsek  $EP$ ) ze zdroje  $Z$  urychlených napětím několika desítek voltů na monokrystal niklu  $K$  a rozptýlené elektrony byly registrovány v závislosti na úhlu rozptylu detektorem  $D$ . Přitom byla pozorována interferenční maxima podobně jako při difrakci rentgenových elmg. vln. Je-li  $b$  vzdálenost atomů v krystalu (mřížková konstanta), můžeme podmínku pro tato maxima psát ve tvaru:

kde  $\lambda$  (viz obr. 100).



obr. 99

obr. 100

Urychlovací napětí dodá elektronům kinetickou energii a rychlost  $v$ .

Odpovídající vlnová délka de Broglieho vlny pak je

**Poznámka:** Uvedený vztah platí pro nerelativistické částice. Pohybuje-li se částice rychlostí, jejíž velikost je srovnatelná s velikostí rychlosti světla, je nutno použít vztah mezi energií a hybností uvedený v STR.

Vlnová délka se při napětích v řádech desítek voltů pohybuje v řádu  $10^{-10}$  m, což je délka srovnatelná s mřížkovou konstantou a vyhovující podmínce pro vznik interferenčního maxima. Davissonovy - Germanovy experimenty prokázaly, že se elektrony skutečně chovají jako vlny a umožnily změřit jejich vlnovou délku. Díky velikosti vlnové délky elektronu, bylo nutné použít jako „mřížku“ krystal, neboť v té době nebylo možné vyrobit mřížku s takovou mřížkovou konstantou, která by byla srovnatelná s danou vlnovou délkou.

### 2.5.6.2 Vlnová funkce

Přestože byla de Broglieova hypotéza experimentálně ověřena a potvrzena, otázka podstaty de Broglieových vln se nevyřešila. Ukázalo se, že částice projevují vlnové vlastnosti nejen při rovnoměrném přímočarém pohybu, ale při jakémkoliv pohybu v prostorově a časově vymezených oblastech. Pak již nelze pohyb částice chápat jako šíření postupné rovinné vlny s určitou frekvencí a vlnovou délkou, ale je nutné ho popsat matematicky mnohem složitější **vlnovou funkcí**  $\psi$ . Výpočtem této funkce se zabývá kvantová fyzika, pro nás ale bude důležité podívat na fyzikální význam vlnové funkce a způsob, jakým popisuje pohyb částic.

Problematikou vlnové funkce a kvantovou mechanikou vůbec se zabýval Max Born (1882 - 1970, německý fyzik, Nobelova cena v roce 1954). Ten ukázal, že sama vlnová funkce nemá fyzikální význam, ale fyzikální význam má čtverec její absolutní hodnoty. Ten umožňuje vypočítat pravděpodobnost výskytu částice uvnitř nějakého malého objemu  $V$  v okolí bodu o souřadnicích  $(x, y, z)$  v okamžiku  $t$ , určíme ji jako  $|\psi|^2 V$ .

$|\psi|^2$  Funkce  $|\psi|^2$  tedy představuje **hustotu pravděpodobnosti** výskytu částice.

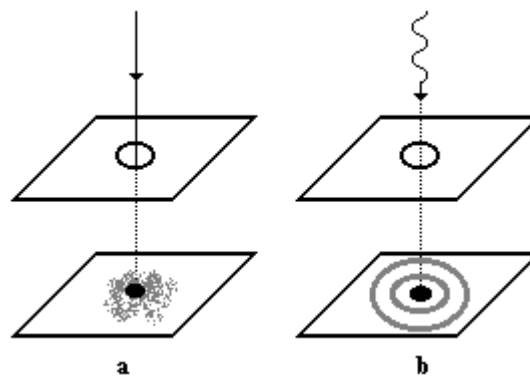
Pohyb částic v mikrosvětě má náhodný, pravděpodobnostní charakter. Částice se nepohybuje po určité trajektorii určitou rychlostí, jak tomu je v makrosvětě. Prochází-li elektron malým otvorem nebo úzkou šterbinou, není možné předem vypočítat, do kterého místa na stínítku (fotografické desky, ...) dopadne. Je možné určit pouze rozložení pravděpodobnosti jeho dopadu do různých míst. A právě toto rozložení pravděpodobnosti vytvoří difrakční obrazec. Tam, kde je pravděpodobnost větší, dopadne více elektronů a zčernání desky bude intenzivnější.

Zde je možné si pomoci analogií s makroskopickými objekty - kuličky, zrnka písku, dělostřelecké granáty, ... také nebudou dopadat přesně na předem vypočtené místo. Budeme pozorovat rozptyl jejich dopadů, ale nebude se vytvářet difrakční obraz. Na obr. 101a je zobrazen rozptyl makroskopických částic, zatímco na obr. 101b je zobrazen rozptyl mikročástic, které procházejí malým otvorem.

Spojení vlnových a částicových vlastností (tzv. „korpuskulárně vlnový dualismus“) a pravděpodobnostní charakter pohybu je společný všem objektům mikrosvětě - ať se jedná o fotony (kvanta elmg. záření) nebo o částice s nenulovou klidovou hmotností (elektrony, protony, atomy, ...), jejich pohyb popisujeme pomocí vlnové funkce. Naproti analogicky by bylo možné přiřadit vlnovou délku resp. frekvenci i makroskopickým tělesům, které se pohybují rovnoměrně přímočaře. Pomocí de Broglieových výpočtů se lze přesvědčit, že vlnová délka makroskopických těles by byla nesmírně malá.

Nemá smysl představovat si, že vlna a částice jsou nějak vzájemně propojeny. Nemá smysl snažit si představit, jak je možné, že se částice chovají jednou jako vlny a jednou jako částice. Je třeba se smířit s tím, že částice mikrosvětě se pohybují jinak, než nám dává každodenní zkušenost s makroskopickými objekty, a jediné, co lze určit je pravděpodobnost toho, že částici najdeme v daném místě prostoru.

**Používá-li se výraz částice v mikrofyzice, myslí se tím právě takové objekty, které v sobě spojují částicové a vlnové vlastnosti a jejichž pohyb musí být popisován prostředky kvantové fyziky.**



obr. 101

Podrobněji je pojem vlnová funkce rozebrán v odstavci 2.5.12.

### 2.5.6.3 Praktické využití vlnových vlastností částic

Vlnové chování částic našlo brzy i technické využití a projevuje se i v běžné praxi. Na jeho základě byly zkonstruovány elektronové a iontové mikroskopy, v nichž se místo světelných paprsků používají svazky elektronové nebo iontové. Rozlišovací schopnost těchto přístrojů je určena de Broglieovou vlnovou délkou. Vzhledem k tomu, že je menší než je vlnová délka (viditelného) světla, lze dosáhnout elektronovým nebo iontovým mikroskopem většího rozlišení a tedy i většího zvětšení.

Při určování elektrické vodivosti kovů nebo polovodičů, při popisování fyzikálních dějů, které probíhají např. při zapnutí elektrického vypínače, je nutné vzít v úvahu, že elektron není částice (tj. malá kulička v makroskopickém smyslu), ale že se chová také jako vlna.

Dalším jevem, který souvisí s vlnovými vlastnostmi částic a který se používá i v praxi je tzv. **tunelový jev** (viz odstavec 2.5.15).

### 2.5.7 Vznik a základy kvantové mechaniky

Kvantová mechanika je část kvantové fyziky, která se zabývá mechanickým pohybem částic v mikrosvětě pod vlivem působících sil. Na rozdíl od klasické, Newtonovy mechaniky, bere v úvahu vlnový a pravděpodobnostní charakter pohybu částic. Proto její rovnice a zákony vypadají úplně jinak než zákony klasické fyziky. Přesto by ale měla (a existuje) mezi klasickou a kvantovou fyzikou souvislost. Budeme-li přecházet od částic k makroskopickým tělesům, budou se nám vlnové délky de Broglieových vln a Planckova konstanta  $h$  jevit nekonečně malé a zákony kvantové fyziky by měly přecházet v zákony klasické mechaniky. Tak tomu skutečně je a tento přechod se nazývá **princip korespondence**.

*Poznámka: Analogicky pak zákony relativistické fyziky přecházejí v zákony klasické (nerelativistické) fyziky v případě, že jsou velikosti rychlosti částic mnohem menší než je rychlost světla ve vakuu, tj. lze považovat velikost rychlosti světla za nekonečně velkou vůči velikosti rychlosti částic.*

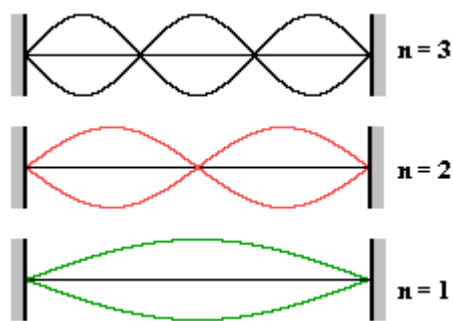
Uvažujme volnou částici, která se bude pohybovat podél osy  $x$  podle Newtonova zákona setrvačnosti rovnoměrným přímočarým pohybem. Podle de Broglieovy hypotézy na ní můžeme pohlížet jako na nekonečnou rovinnou vlnu. Částici nyní uzavřeme mezi dvěma rovnoběžnými, nekonečně vysokými stěnami kolnými k ose  $x$  a vzdálenými o délku  $L$ , od nichž se může částice pružně odrazet. Stěny musí být „nekonečně vysoké“, jinak by se částice „protunelovala“ ven. Říkáme, že částice se nachází uvnitř nekonečně hluboké potenciálové jámy a její pohyb je vázán na úsečku.

Z hlediska klasické fyziky může mít taková částice libovolnou rychlost a energii. Při pružných odrazech se její energie nebude měnit a částice se bude pohybovat rychlostí o téže velikosti střídavě oběma směry. „Pravděpodobnost výskytu“ této klasické částice bude stejná ve všech bodech úsečky.

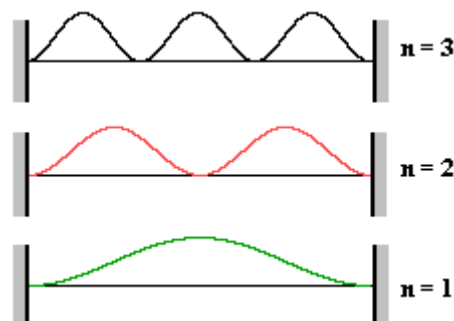
Z hlediska vlnového charakteru částic bude situace jiná. Po odrazech na stěnách dojde díky skládání odraženého a přímého vlnění ke vzniku stojatého vlnění (naprosto analogicky jako na napjaté struně). Struna ale nemůže kmitat jakkoliv, ale jen tak, aby se po celé délce struny rozložil celočíselný počet půlvln. Musí tedy platit:

. Struna se tedy nachází v kmitavých stavech, které jsou charakterizovány určitou frekvencí a rozložením kmiten a uzlů podél struny (viz obr. 102).

Budeme-li nyní uvažovat částici, která se bude chovat podle de Broglieovy hypotézy, pak se bude chovat spíše jako vlna. Tato hypotéza ale musí být potvrzena experimentem. Elektron vázaný na úsečce se bude nacházet jen v určitých stavech charakterizovaných celými čísly  $n$ . V každém takovém stavu bude mít zcela určitou energii a jeho pohyb bude popsán vlnovou funkcí s příslušným rozložením pravděpodobnosti výskytu podél úsečky. Toto rozložení hustoty pravděpodobnosti je znázorněno na obr. 103.



obr. 102



obr. 103

Určit energii a pravděpodobnosti výskytu částice je možné pouze řešením příslušné kvantové mechanické rovnice. Ukazuje se ale, že správné hodnoty energie je možné dostat i tehdy, použijeme-li výraz pro de Broglieho vlnovou délku platnou pro volně se pohybující částici. Energie částice pak bude

. Dosazením do tohoto vztahu dostaneme pro možné hodnoty energie

Vlnové chování částice, která se pohybuje v určité omezené oblasti prostoru, vede tedy ke **kvantování energie**. Částice se může nacházet pouze na určitých **energetických hladinách** určených **kvantovým číslem  $n$** .

V **základním stavu** pro je energie částice, jejíž pohyb je vázán na úsečce délky  $L$ , rovna . S rostoucím  $n$  se pak energetické hladiny od sebe vzdalují. Vyšší stavy než základní stav se nazývají **vzbuzené (excitované) stavy**.

Na rozdíl od pohybu klasické kuličky (např. pingpongového míčku, ...) budou na úsečce místa, kde bude výskyt částice nejpravděpodobnější, kde se bude „zdržovat nejvíce“. Tato místa odpovídají poloze kmiten

chvějící se struny. Naproti tomu v místech, která odpovídají uzlům bude pravděpodobnost výskytu částice nulová. Je ale zbytečné, chtít si zde představit, „jak to částice dělá“.

Důležité je, že uvedený obrázek rozložení pravděpodobnosti výskytu částice se během času nemění, tj. je **stacionární** (analogicky jako rozložení kmiten a uzlů na struně). Navíc v tomto stavu částice neztrácí energii - zůstává na své energetické hladině. V makrosvětě, jak víme, je každý pohyb vždy postupně utlumen třením a odporem prostředí, a tedy rozkmitaná struna brzy dozní.

Částice mikrosvěta může ztrácet nebo získávat energii pouze tak, že přejde skokem z jednoho kvantového stavu do druhého. Při přechodu z vyššího stavu do nižšího se energii vyzáří (např. v podobě fotonu), pře opačném přechodu částice energii pohltí. Energie se může předávat i jiným způsobem než zářením - např. srážkou částic, ... ale vždy pouze v kvantech odpovídajících rozdílu energetických hladin. Přechází-li částice z kvantového stavu s energií do kvantového stavu s nižší energií vyzáří nebo jinak předá kvantum energie o frekvenci takové, že

Kvantová mechanika zkoumá obecný pohyb částic v prostoru pod vlivem různých sil (Coulombovských sil elektrického přitahování, jaderných sil, ...) tím, že řeší vlnovou tzv. **Schrödingerovu rovnici** (viz odstavec 2.5.13). Z ní je možné určit vlnové funkce a pravděpodobnosti výskytu částice v prostoru. Tato rovnice má řešení právě jen pro určité hodnoty energie (energetické hladiny), které odpovídají **kvantovým stacionárním stavům**. Pokud je částice v tomto stavu, nijak se navenek neprojevuje. Teprve při přechodech mezi stacionárními stavy vydává nebo přijímá energii.

Budeme-li zvětšovat délku úsečky  $L$ , po níž se částice pohybuje mezi dvěma rovnoběžnými nekonečně vysokými stěnami kolnými k ose  $x$ , energie daného stavu bude klesat v souladu se vztahem a rozdíly mezi sousedními energetickými hladinami se budou zmenšovat. Pro nekonečné  $L$  bude již částice volná a její energie přestane být kvantována.

*Poznámka:* Může nastat i situace, kdy částice bude konat neomezený pohyb, ale musí přitom překonávat bariéry periodicky rozložené podél přímky. Takovýto „překážkový běh“ vykonává např. elektron při pohybu v krystalu kovu nebo polovodiče. Jeho energie je přitom kvantována tak, že může nabývat hodnot uvnitř určitých energetických pásů.

Naopak bude-li se délka  $L$  zmenšovat, tj. budeme-li se snažit částici sevřít stěnami na stále kratší vzdálenosti, energie částice poroste. To je v souladu s tím, co víme o energii atomů, atomových jader a částic. Atomům s rozměry řádově odpovídají energie řádově , jádrům s rozměry energie řádově , částicím s ještě menšími rozměry pak energie v řádech .

Toto je projevem dalšího zákona kvantové mechaniky, který nemá obdobu v makrosvětě - tzv. **Heisenbergových relací neurčitosti** (viz odstavec 2.5.14).

### **2.5.8 Kvantová čísla**

V prostorovém případě bude kvantový stacionární stav elektronu určen ne jedním, ale třemi kvantovými čísly:

1. hlavním kvantovým číslem  $n$  - nabývá hodnot a určuje energii příslušného stacionárního stavu atomu vodíku
2. vedlejší (orbitálním) kvantovým číslem  $l$  - nabývá hodnot a určuje tvar atomového orbitalu
3. magnetickým kvantovým číslem  $m$  - nabývá hodnot a určuje orientaci atomového orbitalu v prostoru. Pro dané kvantové číslo  $l$  tedy nabývá celkem hodnot.

Danému hlavnímu kvantovému číslu  $n$  tedy odpovídá celkem

kvantových stavů rozlišených čísly  $l$  a  $m$ .

Trojice čísel  $n, l, m$  udává také rozložení pravděpodobnosti výskytu elektronu v prostoru. Toto rozložení se většinou znázorňuje tak, že se vymezí oblast, v níž je výskyt elektronu dán s vysokou pravděpodobností (95 % až 99 %). Hovoří se o tzv. **atomovém orbitalu elektronu**.

Ve spektroskopii je zvykem označovat jednotlivé stavy hlavním kvantovým číslem a vedlejší kvantová čísla vyjadřovat písmeny  $s, p, d, f, g, \dots$ , která odpovídají po řadě hodnotám . Tak např. stav je určen kvantovými čísly a . Stavy  $s$  jsou kulově symetrické, tj. pravděpodobnost výskytu elektronu v nich závisí jen na vzdálenosti od jádra. V klasické, makroskopické fyzice by takový mechanický pohyb částice v poli centrálních sil nebyl možný - např. planety se pohybují kolem Slunce vždy po rovinných trajektoriích.

### 2.5.9 Spin

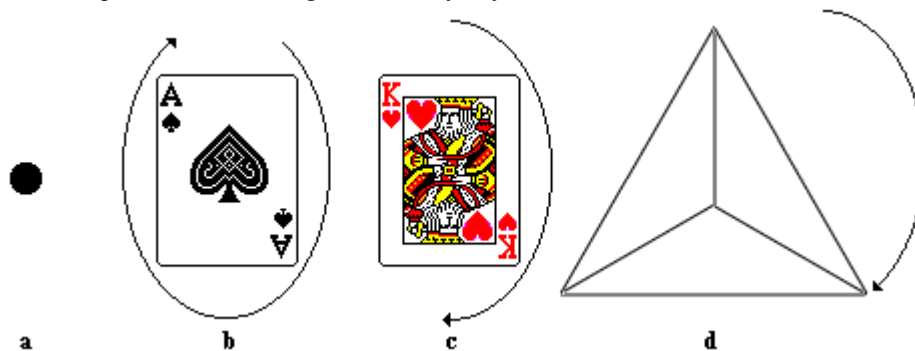
Experimenty s chováním atomů v magnetickém poli ukázaly, že kvantových stavů elektronu je ve skutečnosti dvojnásobný počet. Je to proto, že elektron představuje vlastně jakýsi malý magnet, který se ve vnějším magnetickém poli může orientovat dvojím způsobem - ve směru pole a proti jeho směru. Tato vlastnost elektronu se označuje jako **spin** (anglicky *spin* = *točit*, *vířit*, *kroužit*), protože elektron připomíná rotaci nabitého vlčku v jednom nebo druhém směru. Jedná se ovšem pouze o naši představu, neboť u mikročástic není možné hovořit o její rotaci. Jedná o určitý kvantový pohyb, pro nějž nemáme v makrosvětě analogii.

Dvě opačné orientace elektronu v magnetickém poli se budou lišit i energií a proto je lze popsat čtvrtým kvantovým číslem - tzv. **spinovým magnetickým kvantovým číslem**, které nabývá pouze dvou hodnot:

. Kvantový stacionární stav atomu vodíku je tedy popsán čtyřmi kvantovými čísly  $n, l, m, s$ , přičemž pro každému  $n$  odpovídá celkem  $2n^2$  stavů.

Spin poskytuje informaci o tom, jak vypadá částice z různých směrů:

1. - částice vypadá jako tečka, tj. ze všech směrů se jeví stejná (viz obr. 104a)
2. - částici lze znázornit jako šipku, tj. při otáčení se jeví různě (viz obr. 104b). Abychom znovu dosáhli původního vzhledu, je třeba ji otočit a to o plných  $360^\circ$ .
3. - částice se podobá obousměrné šipce (viz obr. 104c), tj. ztotožnění nastane již po otočení o  $180^\circ$ .
4. - ztotožnění částice nastane již po otočení o  $120^\circ$  (viz obr. 104d)
5. ...
6. - částice bude vyhlížet stejně, ne po jednom celém obratu, ale po dvou obrazech. Zde již selhává představa klasické geometrie a fyziky.



obr. 104

Na základě spinu (resp. spinového magnetického kvantového čísla  $s$ ) lze částice rozdělit do dvou skupin - na fermiony a bosony (viz podrobněji odstavec 2.5.11).

### 2.5.10 Bohrov model atomu

Vztahy mezi spektrálními zákonitostmi a stavbou atomu formuloval již v roce 1913 (tedy ještě před zrodem kvantové mechaniky) Niels Henrik David Bohr (1885 - 1962):

1. Atom je stabilní soustava složená z kladně nabitého jádra, v němž je soustředěna téměř celá hmotnost atomu, a z elektronového obalu.
2. Atom se může nacházet pouze v kvantových stacionárních stavech s určitou hodnotou energie (na určitých energetických hladinách). V takovém stavu atom nevydává ani nepřijímá energii a rozložení elektronů v jeho obalu je časově neproměnné.
3. Při přechodu ze stacionárního stavu o energii  $E_1$  do stavu o nižší energii  $E_2$  může atom vyzářit kvantum elmg. záření (foton) o frekvenci dané podmínkou  $h\nu = E_1 - E_2$ . Naopak při pohlcení takového fotonu přejde atom ze stavu o energii  $E_2$  do stavu o vyšší energii  $E_1$ .

Bohrův model atomu byl používán před vznikem kvantové mechaniky. Vycházel z analogie pohybu planet kolem Slunce a byl jakousi kombinací fyziky klasické a kvantové. Záporně nabitý elektron se v tomto modelu pohybuje kolem kladně nabitého jádra po kružnicích. Pohyb po kružnici je způsoben dostředivou silou,

kteřou v tomto případě je Coulombovská přitažlivá síla. Tedy platí:  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}$ . Bohr dále doplnil



kvantovací podmínku, kterou lze interpretovat jako požadavek, aby se na kruhovou trajektorii poloměru  $r$  vešel celočíselný násobek de Broglieových vlnových délek:

Řešením obou rovnic jako soustavy pro neznámé  $r$  a  $v$  dostáváme poloměr kruhové trajektorie a velikost rychlosti oběhu elektronu kolem jádra v závislosti na  $n$ :

Nyní je možné na základě právě odvozených vztahů určit energetické stavy atomu vodíku. Je třeba znát celkovou energii  $E$  elektronu. Ta je dána kinetickou energií elektronu při jeho oběhu kolem jádra a potenciální energií, kterou má elektron vzhledem k jádru. Pro kinetickou energii elektronu tedy je možné psát:

Podobně můžeme vyjádřit potenciální energii elektronu vzhledem k atomovému jádru. Záporně nabitý elektron se pohybuje v elektrickém poli, které vytváří kladně nabitě atomové jádro. Potenciál kladně nabitěho atomového jádra ve vzdálenosti od jádra je dán vztahem, kde je náboj jádra (jádro má stejně velký náboje jako elektron). Potenciální energie záporně nabitěho elektronu je pak dána vztahem, což můžeme dále upravit na tvar:

Pro celkovou energii elektronu ve stavu  $n$  pak platí:

Při přechodu elektronu z vyšší energetické hladiny na nižší hladinu dojde k vyzáření elmg. záření o frekvenci, která splňuje podmínku. Odtud lze tuto frekvenci určit: Po dosazení za energie příslušných hladin dostáváme: , přičemž je vidět, že tato frekvence závisí pouze

hlavních kvantových číslech, popisujících příslušnou energetickou hladinu, neboť zlomek je dán pouze

základními fyzikálními konstantami. Po označení a dosazení dostaneme, což je

hodnota **Rydbergovy frekvence**.

Podle tohoto modelu elektron obíhá kolem jádra jako planety kolem Slunce po kruhových trajektoriích (později byl model rozšířen i na trajektorie eliptické), ale poloměry těchto drah a velikosti rychlostí (resp. energie) elektronu jsou kvantovány.

Bohrův model nepopisuje adekvátně atom vodíku (nevysvětlí např. jeho kulovou symetrii, ...), a tím spíše není vhodný pro popis složitějších atomů. Byl proto vystřídán modelem Schrödingerovým a dnes má jen historický význam. Přesto je zajímavé, že podle právě odvozených rovnic dostaneme jako poloměr trajektorie s nejnižší energií právě hodnotu Bohrova poloměru a také správnou hodnotu ionizační energie atomu vodíku

. Obrázek atomu jako malé planetární soustavy se pro svou názornost stal velmi populárním.

### **2.5.11 Princip nerozlišitelnosti částic a Pauliho (vylučovací) princip**

Při zkoumání systému více částic (např. elektrony v atomovém obalu, ...) v kvantové mechanice se projeví dva nové fyzikální zákony, které nemají obdobu v makrosvětě:

1. **princip nerozlišitelnosti částic** - na rozdíl od jakýchkoliv dvou makroskopických objektů (zrnka písku, mravenci, listy na stromě, lidé, ...), které dovedeme vždy rozlišit jsou částice všechny zcela stejné, tj. nelze je žádným způsobem označit (obarvit, očíslovat, ...). Tato skutečnost je experimentálně ověřená a hraje podstatnou roli v chemické vazbě.

*Poznámka: Pomocí kvantových čísel číslujeme nikoliv elektrony, ale kvantové stavy, v nichž se elektron nachází. Analogicky čísla tramvaje číslujeme ne jednotlivé vozy, ale linky, trati.*

2. **Pauliho (vylučovací) princip** (z roku 1924) - v daném systému nemohou existovat současně dvě částice v témž kvantovém stavu, tj. s týmiž hodnotami kvantových čísel  $n, l, m$ .

Podle platnosti Pauliho principu rozdělujeme částice na dva druhy:

1. **fermiony** - částice, jejichž úplný popis vypracoval italský fyzik E. Fermi a k nimž patří elektron, proton, neutron, ...; jedná o částice s poločíselným spinem, které tvoří veškerou látku vesmíru (hvězdy, planety, zvířata, lidi, ...) a pro něž platí Pauliho vylučovací princip
2. **bosony** - částice, jejichž popis vypracoval indický fyzik J. Bose spolu s A. Einsteinem a k nimž patří foton, mezon a další částice zprostředkující silové interakce mezi částicemi látky, ...; jde o částice s celočíselným spinem a Pauliho vylučovací princip pro ně neplatí

*Poznámka: Rozdíl mezi fermiony a bosony lze lépe pochopit na příkladě návštěvníků kina. Přijdou-li na představení snoby, tj. lidi, kteří nesnesou vedle sebe nikoho jiného a budou chtít ukázat svoji důležitost, bude v každé řadě kina sedět jen jeden divák (fermion). Pouze bude-li jich v kině více než je řad, sednou si do řady po dvou, ale vždy jeden v řadě si sedne demonstrativně čelem vzad, aby se nějak odlišil. Pokud přijdou na představení děti (bosony), natlačí se všechny do předních řad, aby dobře viděli a nic jim neuniklo, zatímco zadní řady zůstanou prázdné.*

Pauliho princip vede k závěru, že může existovat jen určitý počet druhů atomů s přesným rozložením elektronů ve svých obalech. Vysvětluje zákonitosti periodické soustavy prvků a tím i celého bohatství chemických sloučenin i biologických systémů. Je to princip „strukturotvorný“, neboť umožňuje existenci celého našeho světa (věcí, zvířat, lidí, ...). Fotony, pro které Pauliho princip neplatí, mohou být všechny v témž kvantovém stavu, s touž energií a frekvencí, mohou vytvářet elmg. vlnu, ale nelze z nich vytvářet žádné struktury.

Při postupném „vytváření“ složitějších prvků než je vodík, přidáváme vždy jeden elektron. Ten zaujme pokaždé takový kvantový stav, aby **energie dalšího** (taktó vzniklého složitějšího) **atomu v základním stavu byla nejnižší a nebyl přítom narušen Pauliho vylučovací princip**. Celková soustava elektronů, které vytvářejí obal atomu a jsou rozloženy podle kvantových stavů, se nazývá **elektronová konfigurace** daného prvku. Zapisuje se tak, že se počet elektronů s daným hlavním a vedlejším kvantovým číslem vyjadřuje pomocí exponentu nad příslušným symbolem. Takových stavů může být vždy nejvýše . Například elektronová konfigurace železa s 26 elektrony je

Z historických důvodů se stavy s kvantovými čísly nazývají **slupky** a označují se písmeny . V každé slupce pak rozlišujeme **podslupky** . Celkový počet elektronů v jednotlivých slupkách a podslupkách je:

	K		L		M			N				O					...
	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f	5s	5p	5d	5f	5g	...	
	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	18	...	
	2	8		18			32				50						
Počet prvků:	2	8		8			18				18						

tab. 2

*Poznámka: Označení jednotlivých slupek (K, L, M, ...) lze chápat také jako označení jednotlivých period periodické soustavy prvků, přičemž perioda je označena podle nejvyššího n.*

Ve skutečnosti se jednotlivé slupky a podslupky nezaplňují přesně v tomto pořadí. Rozhodující totiž je dosažení nejnižší energie a ta nemusí vždy odpovídat rostoucímu pořadí kvantových čísel.

Názvy slupek:

1. **vnitřní** - slupky s nižšími kvantovými čísly, elektrony jsou v nich blíže k jádru a jsou k němu pevněji vázány a méně ovlivňují chemické vlastnosti prvků.
2. **valenční** - poslední, vnější slupka. Počet elektronů v ní rozhoduje o chemické vaznosti prvku:
  - a) **je v ní 1 elektron** - je jen slabě vázán k jádru a atom je chemicky velmi reaktivní, protože tento elektron se může snadno uvolnit (alkalické kovy - Li, Na, K, Rb, Cs, Fr)
  - b) **1 elektron chybí do úplného zaplnění slupky** - atom velice snadno reaguje s ostatními atomy, které jsou schopny tento jeden chybějící elektron dodat. Jedná se o halogeny (F, Cl, Br, I, At)
  - c) **slupka je zcela zaplněna** - atomy jsou chemicky značně netečné (vzácné plyny - He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn)

## 2.5.12 Exkurze do vysokoškolské kvantové fyziky

V tomto odstavci se pokusíme ukázat pohled na kvantovou mechaniku v úplnější (hlavně matematické) podobě. Bude se jednat o aplikaci vysokoškolské matematiky na kvantovou fyziku, nicméně se pokusíme o velmi jednoduché (ale pokud možno správné) vysvětlení.

### 2.5.12.1 Kvantová fyzika versus klasická fyzika

Jak bylo naznačeno už v odstavci 2.5.6.2, kvantová mechanika nepoužívá k popisu vlastností částic klasické postupy. Důvodů je hned několik:

1. kvantová mechanika popisuje (většinou) soubory velkého počtu částic, z čehož vyplývá i nutnost používat závěry statistické matematiky
2. kvantová mechanika musí být schopna spojit korpuskulární a vlnový popis částic (tzv. korpuskulárně vlnový dualismus)
3. kvantová mechanika musí brát v úvahu fakt, že jakýmkoli měřením dochází (většinou) k destrukci měřeného objektu (nebo se alespoň dramaticky mění stav tohoto systému) - podrobněji viz odstavec 2.5.14.3

### 2.5.12.2 Základní postuláty kvantové mechaniky

Na základě důvodů uvedených v odstavci 2.5.12.1 je možné kvantovou mechaniku vybudovat na základě těchto **základních postulátů**:

1. Každý stav fyzikálního systému je možné popsat tzv. vlnovou funkcí. Tato funkce je většinou komplexní funkce reálné proměnné.
2. Každé pozorované veličině je přiřazen její operátor.
3. Jediné možné hodnoty, které lze naměřit při měření pozorovatelné veličiny  $D$  jsou její charakteristické (vlastní) hodnoty, které získáme řešením charakteristické rovnice operátoru přiřazeného měřené veličině  $D$ .
4. Jestliže je systém ve stavu popsaném vlnovou funkcí  $\psi$ , je kvantová střední hodnota

pozorovatelné veličiny  $D$  při jistém sledu měření rovna

5. Operátor časové změny má tvar

Nyní se pokusíme jednotlivé postuláty okomentovat.

V prvním postulátu se zavádí vlnová funkce, což na první pohled vypadá, že se jedná jen o jakousi matematickou konstrukci, ale ukazuje se, že vlnová funkce (resp. její kvadrát) má fyzikální smysl.

Druhý postulát hovoří o operátorech, které se obecně značí „písmenkem se stříškou“ (např.  $\hat{p}$ ,  $\hat{x}$ ,  $\hat{H}$ , ...). Operátor je „něco“ do čeho můžeme aplikovat na nějakou funkci. Příkladem mohou být následující dva operátory:  $\hat{A}$  a  $\hat{B}$  (absolutní hodnota). Pokud nyní vytvoříme operátor  $\hat{C}$  resp.  $\hat{D}$ , který nyní aplikujeme na funkci  $f$ , dostaneme:  $\hat{C}f$  resp.  $\hat{D}f$ .

Jak je vidět, operátory  $\hat{A}$  a  $\hat{B}$  o takových dvojicích operátorech říkáme, že **nejsou komutativní (nekomutují)**. Operátory, pro které  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ , jsou **komutativní (komutují)**.

Na základě druhého postulátu je možné vytvořit návod, jak veličinu z klasické fyziky převést do fyziky kvantové. Stačí uvažovanou veličinu vyjádřit pomocí souřadnice polohy  $x$  a pomocí hybnosti  $p$  a poté tyto veličiny nahradit jejich operátory. Přitom ale je třeba vzít v úvahu komutativnost (resp. nekomutativnost) uvažovaných operátorů.

Poloha a hybnost se vybírají proto, že v klasické mechanice to jsou právě poloha a rychlost (a hybnost je v podstatě rychlost), které udávají charakter pohybu (a je z nich možné dopočítat dráhu, působící sílu, ...). V kvantové fyzice tyto dvě veličiny ale nekomutují, tj. nelze je naměřit obě dvě najednou přesně (viz odstavec 2.5.14 o relacích neurčitosti).

Uvedeným způsobem je celkové energii dané soustavy přiřazen operátor  $\hat{H}$ , který se nazývá **Hamiltonův operátor** nebo zkráceně **hamiltonián**.

Třetí postulát hovoří o nalezení vlastních hodnot  $\mathcal{D}$ , které můžeme při měření dané veličiny reprezentované operátorem  $\hat{D}$  naměřit. Je možné je nalézt řešením charakteristické rovnice  $\hat{D}f = \mathcal{D}f$ . V tomto zápisu by se mohlo zdát, že je možné rovnici vydělit funkcí  $f$  a výrazně si ji zjednodušit. To ale není možné, neboť výraz  $\hat{D}f/f$  představuje aplikaci určitého operátoru na funkci (např.  $\hat{p}f/f$ ,  $\hat{x}f/f$ , ...). Vlastních hodnot dané veličiny může být více a v závislosti na příslušné veličině dostáváme buď spojité nebo diskrétní spektrum (množinu) vlastních hodnot.

Většinou se ale postupuje obráceně, tj. na základě vlastních hodnot se hledá příslušná funkce  $f$ .

Vlastní hodnota může být:

1. degenerovaná - k dané vlastní hodnotě existuje více vlastních funkcí  $f$

2. nedegenerovaná - k dané vlastní hodnotě existuje jedna jediná funkce  $f$ .

Pro vlastní hodnoty energie se řeší Schrödingerova rovnice ve tvaru (podrobněji viz odstavec 2.5.13).

Čtvrtý postulát umožňuje vypočítat střední hodnotu měřené veličiny  $D$ . Vzhledem k tomu, že během měření získáme velké množství vlastních hodnot (měříme na systému mnoha částic), je třeba ze získaných vlastních hodnot udělat „průměrnou hodnotu“, tj. vypočítat střední hodnotu. V rámci klasické fyziky je možné střední hodnotu měřené veličiny  $D$  určit takto: , kde jsou vlastní hodnoty veličiny  $D$  naměřené během experimentu.

V rámci kvantové fyziky se postupuje trochu jinak: . (Integrál nahrazuje součet

nekonečně velkého počtu sčítanců.) Výraz udává pravděpodobnost naměření dané veličiny v intervalu

. Při výpočtech se snažíme o normování vlnové funkce , tak aby , tzn. že uvedený integrál skutečně odpovídá pravděpodobnosti.

Vypočtená střední hodnota nemusí vůbec nic vypovídat o naměřených hodnotách (např. při házení mincí jsou dvě možné vlastní hodnoty: panna a orel a přesto střední hodnota neexistuje).

Stav odpovídající vlnové funkci se většinou označuje symbolem (tento symbol pochází z Diracovy „ket-bra notace“ a nazývá se *vektor ket*). Někdy (ale to je za rámeček tohoto článku) se též vyznačuje v jaké reprezentaci se počítá - tj. jestli jsou veličiny vyjádřené pomocí:

1. souřadnice  $x$  -
2. hybnosti  $p$  -

Pátý postulát kvantové mechaniky zavádí operátor časové změny ve tvaru , kde  $i$  je imaginární jednotka a redukovaná Planckova konstanta. Jedná se o speciální operátor, který se aplikuje na funkci, která se mění v čase (je závislá na čase), a tím tuto změnu matematicky popíše v rámci kvantové fyziky. Důležitý tento operátor bude při řešení Schrödingerovy rovnice (viz odstavec 2.5.13).

### 2.5.12.3 Superpozice

Pojem superpozice, tj. takový stav hmoty, který v klasické fyzice neznáme, se pokusíme vysvětlit na energii elektronu v atomu. Jak bylo uvedeno v odstavci 2.5.10, elektron se v atomu může nacházet pouze na určitých „vybraných“ energetických hladinách. Řečeno matematicky: energie elektronu v atomu může nabývat pouze diskrétních hodnot a nikoliv spojitych, jak jsme zvyklí z klasické fyziky. Tato energie (viz odstavce 2.5.8 a 2.5.10) souvisí s hlavním kvantovým číslem, které určuje stav elektronu.

Superpozice je váženým součtem (složením) několika různých stavů (název superpozice je odvozen od slova *superponován* - naložen jeden na druhý). Pro elektron v superpozici stavů s různou energií nemá pojem jeho vlastní energie dost dobrý smysl (jeho stav neodpovídá žádné z energetických hladin v atomu). To se projeví i při pokusech jeho energii změřit. Při měření totiž dostaneme tu jednu tu jinou hodnotu energie, která vystupuje v superpozici. **Výsledky mají přitom zcela náhodný charakter** a je možné je použít dokonce jako ideální náhodný generátor. Výsledky tedy nejsou předvídatelné - jediné, co můžeme předpovědět je statistika rozložení výsledků (jejich pravděpodobnost).

Měření je tedy podle kvantové teorie náhlým a nevratným zásahem do vývoje systému. Zatímco se izolovaný systém vyvíjí hladce a deterministicky (tj. předvídatelně), v okamžiku měření se jeho stav nevyhnutelně drasticky změní (viz podrobněji odstavec 2.5.13). Superponovaný stav přechází na stav odpovídající konkrétní hodnotě, která byla v experimentu naměřena. Stav celého systému se tedy měřením mění (viz též odstavec 2.5.14).

Při matematickém popisu superpozice vyjdeme z analogie vektorů. Schopnost kvantových stavů sdružovat se do libovolných superpozic připomíná geometrické vlastnosti vektorů. V matematické formulaci kvantové teorie je proto stav systému reprezentován vektorem abstraktního vektorového prostoru (tzv.

**Hilbertův prostor**). Každý vektor pak lze vyjádřit jako lineární kombinaci (superpozici) vektorů báze pro

$\psi$  :  $\psi = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \phi_{\alpha}$ , kde pro komplexní koeficienty  $c_{\alpha}$  platí:  $\sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 = 1$ .

Dimenze  $n$  (která je dána počtem bázevých vektorů) stavového prostoru může být různá - konečná (např. 2) i nekonečná. Např. energetické stavy elektronu je možné popsat pomocí čtyř kvantových čísel (viz odstavec 2.5.8) ve stavovém prostoru elektronu; dimenze je v tomto případě nekonečná.

Jsou-li bázevými stavy  $\phi_{\alpha}$  stavy odpovídající jednotlivým (kvantovaným) hodnotám veličiny  $X$ , je pravděpodobnost naměření výsledku  $x_{\alpha}$  ve stavu  $\phi_{\alpha}$  dána výrazem  $|c_{\alpha}|^2$ . (Např. pro elektron ve stavu  $\phi_{\alpha}$  bude s pravděpodobností  $|c_{\alpha}|^2$  naměřena hodnota energie odpovídající hlavnímu kvantovému číslu  $n_{\alpha}$  a s pravděpodobností  $|c_{\alpha}|^2$  hodnota odpovídající  $l_{\alpha}$ .)

Časový vývoj kvantového systému si lze představit jako spojitý pohyb stavového vektoru v prostoru stavů, při němž se jednotková délka vektoru zachovává. Důležitou vlastností kvantové evoluce je její **linearita**: Jestliže se stav  $\psi$  za čas  $t$  vyvine ve stav  $\psi(t)$  a stav  $\phi$  ve stav  $\phi(t)$ , pak superpozice  $c\psi + d\phi$  se vyvine v  $c\psi(t) + d\phi(t)$ .

Tyto skutečnosti se v matematickém vyjádření charakterizují tvrzením, že transformace  $U(t)$  na  $t=0$  je **unitárním lineárním operátorem**.

## 2.5.13 Schrödingerova rovnice a kolaps vlnové funkce

### 2.5.13.1 Popis bez matematiky

Schrödingerova rovnice je deterministickou rovnicí, tak jako Newtonovy nebo Einsteinovy pohybové rovnice. Jestliže tedy zadáme hodnotu vlnové funkce v daném časovém okamžiku, dá se přesně předpovědět, jaké hodnoty nabude vlnová funkce v budoucnosti, nebo jakou hodnotu měla v minulosti (viz např. analogii s Newtonovými pohybovými rovnicemi, které popisují pohyb planet ve Sluneční soustavě, ...). Rovnice tedy popisuje chování, které je vůči času zcela vratné.

Představme si určitou vlnovou funkci, která matematicky reprezentuje chování elektronu, na který se zrovna nedíváme. Tato funkce v sobě zahrnuje všechny možnosti, které mohou nastat, když budeme elektron sledovat pomocí nějakého měřicího zařízení (fluorescenční stínítko, ...). To vlastně neznamená nic jiného, než že Schrödingerova rovnice umožňuje předpovědět všechny možné případy vývoje chování elektronu, pokud ho v budoucnosti budeme sledovat. A co je důležitější: dovoluje zpětně určit všechny možné historie chování elektronu, které by při jeho pozorování v minulosti nastaly.

Je přirozené přejít od vlnové funkce, která obsahuje všechny potenciální možnosti vývoje systému, k určení toho, co se skutečně stane při experimentu. Jinými slovy je třeba přejít k samotnému procesu měření. Jestliže provedeme jedno konkrétní měření, elektron bude zaznamenán tak, jako když dopadne právě do jednoho bodu stínítka. Takže časově symetrická vlnová funkce, a tím i samotný systém, projde během procesu měření jistou transformací. Dojde k okamžitému a nespojitému zúžení z jedné formy vlnové funkce, které v sobě osahovala všechny možnosti dalšího vývoje, na jednu jedinou konkrétní, která odpovídá jedné hodnotě zaznamenané během měření.

Tato transformace, která z hromady pravděpodobných možností vybere jednu, se nazývá **zúžení (kolaps) vlnové funkce**. Ze všech možností vyskočí z „krabičky“ právě jedna, když „zatáhneme“ za vlnovou funkci.

*Poznámka: Pojem kolapsu vlnové funkce lze vysvětlit pomocí názorného příkladu. Představme si, že sedíme v hledišti kvantového divadla. Na jevišti za zavřenou oponou se najednou míchá nekonečná řada možných představení do Shakespeara přes Ibsena a Wildem konče. Jakmile se ale zvedne opona, vlnová funkce divadla zkolabuje na jednu z her a je možné poznat, že se právě hraje V zajetí filmu (CD 94).*

Zdá se, že když se nedíváme, chová se vlnová funkce při svém vývoji deterministicky a proces je vratný. Ale při měření polohy dopadu elektronu na stínítko (při zvednutí opony a shlédnutí části hry, ...) jde o proces nevratný. Při kolapsu vlnové funkce (proces měření) se všechny možnosti zužují pouze na jednu reálnou událost. To narušuje symetrii mezi stavy v minulosti (potenciální možnosti) a v současnosti (aktuální událost). Skutečně je tomu tak, že když se pokusíme z naměřených výsledků rekonstruovat minulou historii systému, obdržíme nekorektní výsledky.

Vlnová funkce tedy kolabuje při procesu měření (jak tvrdí John von Neumann), ale pro samotný proces kolapsu vlnové funkce není navržen žádný mechanismus. Je jasné, že tento proces nelze popsat Schrödingerovou rovnicí, protože ta popisuje vratné a deterministické děje, zatímco proces kolapsu je sám o sobě nevratný a náhodný. A to je jádro problému měření, který má velkou důležitost pro směr času a je zdrojem mnoha paradoxů (viz dále odstavec 2.5.17).

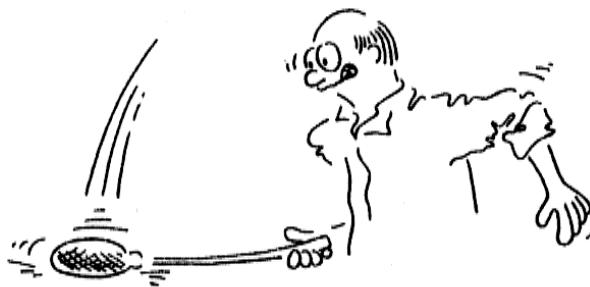
Názornou formou je kolaps vlnové funkce znázorněn na obr. 105 a obr. 106.

V kvantové fyzice existuje ještě jeden proces a to **dekoherence**. Jedná se o něco jiného, než je kolaps vlnové funkce, takže není možné tyto dva pojmy zaměňovat. **Dekoherence** je proces, v němž se samovolně (zatímco u kolapsu vlnové funkce je to pod vlivem měření daného fyzikálního systému) ztrácí informace o vzájemných fázích v superpozicích stavů jednotlivých kvantových objektů. Je důsledkem interakce systému s okolím.



*Živá moucha zaplňuje celý prostor*

obr. 105



*Rozplácne-li mouchu, je lokalizována.  
Bohužel se tím ale ničí.*

obr. 106

### 2.5.13.2 ... a trochu (vysokoškolské) matematiky

Hledání vlastních hodnot energie znamená řešit Schrödingerovu rovnici ve tvaru  $\hat{H}\psi = E\psi$ , kde  $\hat{H}$  je hamiltonián daného systému představující celkovou energii systému. Pokusíme se ho nyní odvodit na základě odstavce 2.5.12.2, v němž byl dán návod, jak převést veličinu z fyziky klasické do fyziky kvantové. Základem je vyjádřit všechny veličiny pomocí polohy nebo hybnosti.

Operátor polohy je jednoduchý:  $\hat{x} = x$ , pro operátor hybnosti platí:  $\hat{p} = -i\hbar \nabla$ , tzn. že vektor

hybnosti je možné psát ve tvaru:  $\hat{p} = -i\hbar \nabla$ . V uvedených vztazích představuje  $i$  imaginární

jednotku a  $\hbar$  redukovanou Planckovu konstantu.

Pro výpočet hamiltoniánu systému si stačí uvědomit, že představuje celkovou energii systému, tj.  $E = T + V$ , kde  $T$  značí operátor kinetické energie a  $V$  operátor potenciální energie. Z klasické fyziky víme, že kinetickou energii lze psát ve tvaru  $T = \frac{1}{2}mv^2$ . Dosazením do hamiltoniánu  $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$  a nahrazením operátorů hybnosti dostaneme:  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)$ . (Poslední úprava

vyplývá z definice komplexních čísel v odstavci 1.9.1:  $i^2 = -1$ .)

Nyní je už možné řešit Schrödingerovu rovnici ve tvaru  $\hat{H}\psi = E\psi$ . Řešení zde nebudeme uvádět z několika důvodů:

1. Schrödingerova rovnice je parciální diferenciální rovnice, jejíž řešení je bez základů diferenciálního a integrálního počtu nemožné předvést
2. postup řešení velmi silně závisí na tvaru hamiltoniánu daného systému (jednorozměrný případ, třírozměrný případ, nulová potenciální energie, nenulová potenciální energie, ...)
3. plné řešení není pro další výklad nutné

Zastavíme se pouze u následujícího aspektu Schrödingerovy rovnice. Podle konkrétního fyzikálního problému (systému částic) se může řešení výrazně zjednodušit. Obecná Schrödingerova rovnice je závislá jak na prostorových souřadnicích, tak na čase. Tyto 4 souřadnice (3 prostorové a jedna časová) vystupují jednak v hamiltoniánu daného systému a jednak ve vlnové funkci:  $\psi(x, y, z, t)$ . Tato vlnová funkce se bude tedy

vyvíjet jak v čase, tak v prostoru. Popsat časovou změnu této funkce je možné pomocí derivace: zápis

$\frac{\partial \psi}{\partial t}$  znamená parciální derivaci funkce  $\psi$  podle času.

*Poznámka:* O parciální (částečnou) derivaci podle času se jedná proto, že daná funkce je závislá i na jiných parametrech než jen na čase. Podrobněji je o parciálních derivacích pojednáno v odstavci 1.10.4.6.2.

Jiným způsobem je možné v rámci kvantové mechaniky popsat časovou změnu nějaké funkce pomocí operátoru časové změny (viz odstavec 2.5.12.2). Dostaneme tak:  $\hat{H} \psi = E \psi$ . Právě jsme popsali dvěma různými způsoby časovou změnu funkce  $\psi$ . Oba dva způsoby musí být ale identické, takže je možné psát:

Při řešení této rovnice se většinou (pokud to fyzikální situace připouští) vyřeší problém v jednorozměrném (nejjednodušším) případě a teprve poté se zobecní (už analogickým postupem pouze náročnějším na zápis) do všech tří prostorových rozměrů.

Pokud se tedy omezíme na jednorozměrný případ s tím, že budeme řešit jen tzv. Schrödingerovu časovou rovnici (tj. bude nás zajímat pouze vývoj daného fyzikálního systému v závislosti na čase), pak jednoduchou matematickou úpravou dostaneme  $\hat{H} \psi = E \psi$ . Tato rovnice patří mezi ta nejjednodušší vyjádření Schrödingerovy rovnice. V tomto tvaru se s ní také setkáme v odstavci 1.1.1.2.

### **2.5.14 Heisenbergovy relace neurčitosti**

V mikrosvětě existují dvojice veličin, u nichž není možné současně naměřit naprosto přesnou (ostrou) hodnotu. Např.:

1. vybereme-li ze svazku světelných paprsků jeden foton, je možné změřit snadno přesně jeho frekvenci  $f$  a tím i jeho energii  $E$  a hybnost  $p$ , ale ne jeho polohu
2. analogicky je tomu s elektronem v katodových trubcích - můžeme přesně určit jeho energii a hybnost, ale nikoliv polohu
3. při dopadu elektronu na fluorescenční stínítko lze určit přesně jeho polohu, ale ne energii a hybnost

Tyto skutečnosti matematicky vyjadřují Heisenbergovy relace neurčitosti.

#### **2.5.14.1 První Heisenbergova relace neurčitosti**

Chceme-li změřit polohu nějaké částice, „posvítíme“ si na ni nějakým světlem (zářením) o vlnové délce  $\lambda$ . Při daném záření není možné rozeznat předměty menší, než  $\lambda$ . Přesnost měření polohy (neurčitost polohy) je tedy  $\Delta x \approx \lambda$ . Dopadem záření (tj. fotonů) na částici dojde k zároveň k předání hybnosti ve stejném směru, v jakém dopadá záření. Nejmenší předání hybnosti nastává v případě dopadu jednoho fotonu, jehož velikost hybnosti je  $p = \frac{h}{\lambda}$ . Díky tomu se po „srážce“ fotonu a částice změní hybnost částice o velikost  $\Delta p \approx \frac{h}{\lambda}$ .

(částice byla před dopadem fotonu v klidu). Tím pádem dostáváme:  $\Delta x \Delta p \approx h$ . Tento vztah platí obecně. Užitím základních předpokladů kvantové teorie se při přesném odvození ukazuje, že spodní mezí uvedeného součinu je  $\frac{h}{4\pi}$ . Vzhledem k tomu, že v kvantové mechanice se velmi často vyskytuje zlomek  $\frac{h}{4\pi}$ , bylo zavedeno označení  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , přičemž  $h = 2\pi\hbar$ . Proto můžeme **1. Heisenbergovu relaci neurčitosti** psát ve tvaru:  $\Delta x \Delta p \geq \hbar$  - součin nepřesností, jichž se dopouštíme při současném měření polohy a hybnosti částice, je roven nejméně  $\hbar$ .

Právě odvozená relace neurčitosti říká, že čím přesněji známe polohu částice, tím neurčitější je informace o její hybnosti (a tedy je i větší rozptyl v určení kinetické energie) a naopak. Zvětšuje-li se  $\Delta x$ , klesá  $\Delta p$  a naopak. „Svíráme-li částici v hrsti“ víc a více, je stále neklidnější, pohyblivější a chová se bouřlivěji.

Podle zákonů kvantové mechaniky částice nemůže mít současně přesnou polohu a přesně určenou hybnost. Proto nemá smysl mluvit o tom, že se částice pohybuje po nějaké trajektorii nějakou rychlostí a mluvíme pouze o pravděpodobnostech výskytu částice v prostoru.

*Poznámka:* Vzhledem k tomu, že částice, která byla při odvozování brána v úvahu, byla na začátku „pozorování“ v klidu, začala se pod vlivem srážky s fotonem pohybovat po přímce (ne po zakřivené trajektorii). Proto ve zcela správném zápisu 1. Heisenbergovy relace nevystupuje velikost hybnosti  $p$ , ale pouze velikost její  $x$ -ové složky  $p_x$ .

### 2.5.14.2 Druhá Heisenbergova relace neurčitosti

Měříme-li frekvenci  $f$  po dobu  $\Delta t$ , zjišťujeme vlastně, kolikrát za tuto dobu nastal určitý jev, tj.  $n$ . Minimální chyby v určení frekvence se dopustíme, změříme-li co nejpřesněji počet  $n$ . Ten lze měřit s (maximální) přesností  $\frac{1}{n}$ . Je tedy vždy  $\Delta f \geq \frac{1}{\Delta t}$ . Tím pádem energii  $E = hf$  můžeme měřit s přesností

$\Delta E \geq h \Delta f$ , odkud dostáváme:  $\Delta E \Delta t \geq h$ . Také tato relace má obecnou platnost a při přesnějším odvození

vyjde dolní mez chyby  $\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2}$  a **2. Heisenbergovu relaci neurčitosti** tedy můžeme psát ve tvaru:  $\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2}$

součin chyby v určení energie a časového intervalu, po který provádíme měření, je roven nejméně  $\frac{h}{2}$ .

Zásadní rozdíl od první relace neurčitosti je ten, že zde není chyba v určení času, ale časový interval, po který se měření provádí.

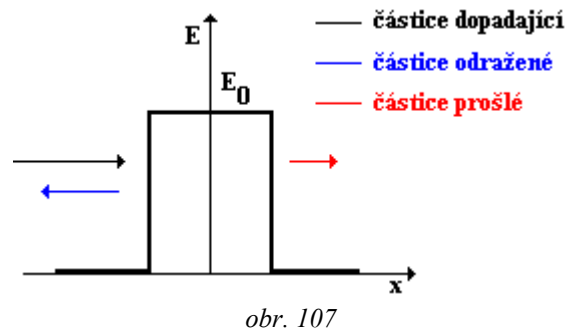
#### 2.5.14.3 Měření v oblasti mikroobjektů

Jak je vidět z právě nastíněných odvození Heisenbergových relací neurčitosti, měřící metoda ovlivňuje výsledky měření. Tuto skutečnost (interakci měřícího přístroje s měřeným objektem), je třeba při všech měření v mikrosvětě brát v úvahu. Kdybychom tato omezení nerespektovali, dostali bychom užitím různých metod různé výsledky pro tutéž veličinu (odtud plynou názory, že „mikroobjekty nelze objektivně pozorovat“, ...). Mikroobjekty jsou objektivně plně pozorovatelné (v mezích daných relacemi neurčitosti), ale pro každé měření je třeba vypracovat přesnou teorii měření.

### 2.5.15 Tunelový jev

Typickým příkladem vlnových vlastností částic je tzv. **tunelový jev**. Uvažujme částici, která má překonat nějakou bariéru - dostat se přes svah, dostat z nějaké (potenciálové) jámy, ... Z klasické fyziky víme, že je to možné pouze tehdy, pokud bude mít částice dostatečně velkou energii. (Např. kmitající kuličky v hladké misce tuto misku nemohou opustit, pokud nezískají dostatečnou energii k překonání okraje misky.) Vlny se ale na rozdíl od částic mohou dostat díky ohybu i za překážku a pokračovat v dalším šíření prostorem. Mikročástice podle zákonů kvantové fyziky mohou skutečně proniknout bariérou, aniž by k tomu měli dostatečnou energii - mohou se „protunelovat“ a najednou se ocitnou za překážkou.

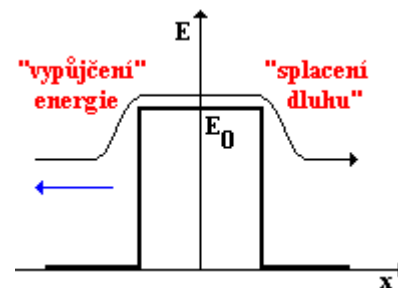
Uvažujme částici s energií  $E$ , která se blíží k potenciálovému valu, jehož „výška“ je  $E_0$  (obr. 107), tj. klasicky je k jeho překonání třeba energie  $E > E_0$  (schematicky znázorněno na obr. 107). Tímto potenciálovým valem ve skutečnosti je např. kovová destička, silové pole, povrch vodiče, „hranice“ atomového jádra, ... Většina částic se od valu odrazí zpět (na obr. 107 je relativní množství odražených a prošlých částic znázorněno různě dlouhými šipkami). V klasické fyzice, by se do prostoru za valem nedostala žádná částice.



obr. 107

V kvantové interpretaci existuje nenulová pravděpodobnost nalezení částice za potenciálovým valem. To znamená, že částice se na druhou stranu valu dostala, přestože její energie je nižší, než je energie nutná na překonání potenciálového valu. Částice se tedy na druhou stranu valu „protunelovala“.

**Poznámka:** Tunelový jev lze přirovnat k situaci, kdy vezmeme malý kámen a lehce jej hodíme proti skleněnému oknu. V klasické představě se kámen od skla odrazí a spadne na zem. V kvantovém případě kámen projde sklem a na druhé straně spadne na podlahu pokoje, aniž by porušil skleněné okno.



obr. 108

Pro hrubé vysvětlení tunelového jevu je možné si představit, že částice dokáže svoji energii nějakým způsobem měnit, třebaže vždy jen na krátko. K tomuto tvrzení nám dává oprávnění 2. Heisenbergova relace neurčitosti: velikost energie částice může uvnitř hranic stanovených touto relací spontánně přeskokovat z jedné hodnoty na druhou. Jinými slovy, částice si může dodatečnou energii (nutnou na překonání potenciálového valu) na příslušnou pevně stanovenou dobu „vypůjčit“ (viz obr. 108). V souladu s relací neurčitosti platí, že čím kratší je lhůta návratnosti takové půjčky, tím větší je její povolený rozsah.

**Poznámka:** V rámci relace neurčitosti tedy nemusí platit zákon zachování energie.

Tímto způsobem byla energie částici „půjčena“ za přísných podmínek. Pokud se částice nedokáže dostat na druhou stranu bariéry dříve, než vyprší výpůjční lhůta, bude se muset vrátit zpátky. Takové částice se od



bariéry, do které stihly proniknout jen zčásti, jednoduše odrazí. Proces „půjčování“ energie je navíc velmi nahodilý (jako ostatně většina kvantových jevů), takže při interpretaci tunelového jevu je nutné používat statistiku a pravděpodobnost. Obecně platí, že čím je potenciálový val širší, tím méně jsou částice při jeho „protunelování“ úspěšné, tj. tím větší část jejich počtu se od něj odrazí.

Situaci si lze opět představit na jevu z běžného života: dosavadním pochodem vyčerpaný turista se vyveze lanovkou na místo blízko vrcholu kopce, odkud již samotný vrchol snadno překoná.

Tímto způsobem může docházet v elektrickém poli k emisi elektronů z kovů, přestože energie elektronů je nižší než příslušná výstupní práce. Díky tunelovému jevu vylétají např. částice z atomových jader. Na tunelovém jevu je založena řada polovodičových prvků a řada citlivých měřicích metod. Výklad tunelového jevu je možné provést na základě pravděpodobnosti: částice musí vykonat nejprve řadu neúspěšných pokusů, než se „jí podaří“ uvolnit se např. z kovu. Pro částici, která má dostatečné množství „pokusů“ na opuštění kovu tedy neplatí známé přísloví: „Hlavou zeď neprorazíš.“

### **2.5.16 \*\*\*Einstein versus kvantová mechanika**

Einstein nechtěl přijmout princip neurčitosti jako jednu ze základních vlastností přírody. On se vlastně ani do své smrti nesmířil s kvantovou mechanikou jako takovou, neboť mu „vadil“ pravděpodobnostní charakter - popisování skutečnosti pomocí pravděpodobnosti výskytu částice v prostoru, pravděpodobnosti rozpadu nějaké částice, ... Přikláněl se spíše k názoru, že kvantová mechanika je ve skutečnosti pouze matematická metoda, která slouží k získání předpovědi chování fyzikálních systémů ve statistickém smyslu (tj. při experimentech, které se mnohokrát opakují). Právě tento jeho postoj vedl ke slavnému sporu s Nielsem Bohrem o základy kvantové mechaniky, který oba vědce poznamenal na celý zbytek života.

Při jedné příležitosti (6. Solwayská konference v roce 1930 v Bruselu) Einstein navrhl *Gedankenexperiment* („myšlenkový experiment“). Takový experiment je pouze vymyšlenou situací, kterou je třeba ověřit pouze dedukcí, a nikoliv měřením v laboratoři. Inspirován svým nepřítelstvím ke kvantové teorii ho navrhl tak, aby popřel platnost relace neurčitosti mezi časem a energií (viz odstavec 1.1.2.2). Během bezesné noci našel Bohr řešení pro danou situaci a porazil Einsteina jeho vlastní zbraní - teorií relativity. To však nebyl konec sporu, ale naopak jeho začátek. Diskuse na téma platnosti či neplatnosti kvantové mechaniky se táhla celým zbývajícím životem obou mužů.

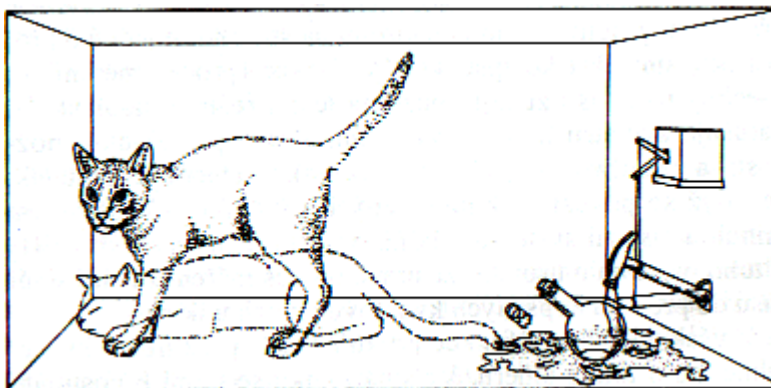
*Poznámka:* Když Bohr v roce 1962 zemřel, na tabuli v jeho pracovně byl nalezen rozbor Einsteinova *Gedankenexperimentu*. Zdá se tedy, že Bohr bojoval s Einsteinovými ideami skutečně až do konce života.

Na počátku diskuse se Einstein domníval, že kvantová mechanika je jednoduše nekorektní (vnitřně rozporná). Později, po opakovaných neúspěšných sporech s Bohrem přehodnotil svůj postoj a přestal považovat kvantovou mechaniku za nekonzistentní teorii. Snažil se ale ukázat, že je neúplná. Jeho námitky byly podloženy absencí kauzality v kvantové teorii a současnou neslučitelností s teorií relativity. Ačkoliv se oba vědci vzájemně respektovali, Einsteinovi se nikdy nepodařilo přesvědčit Bohra o správnosti svých argumentů. Tento intelektuální souboj trápil oba.

Einstein byl na přelomu století osamocen ve svém pojetí fyziky, protože byl zcela přesvědčen o správnosti svých myšlenek, i když byly úplně odlišné od klasického, dobře vyzkoušeného, pojetí fyziky podle Newtona. Svým vysvětlením fotoelektrického jevu vlastně ukázal, jakým směrem by se měl vývoj nové (kvantové) teorie ubírat. Když však okolo roku 1920 razantně vstoupila kvantová mechanika na scénu, nebyl už mezi vůdčími duchy této teorie. Celá její struktura mu připadla bytostně cizí a své názory nezměnil až do konce svého života.

### **2.5.17 \*\*\*Schrödingerova kočka**

Nejnámější z paradoxů, které se týkají kolapsu vlnové funkce (odstavec 2.5.12) a myšlenkových experimentů, jimiž lze upozornit na problémy s popisem skutečnosti pomocí vlnových funkcí. Ač autorem tohoto *Gedankenexperimentu* je Schrödinger, Einstein považoval tento návrh za vůbec nejlepší způsob, jakým lze ukázat, že vlnová představa hmoty je vlastně neúplným zobrazením skutečnosti. Pochopitelně, že o „kočičím paradoxu“ vedl diskusi s Bohrem (o sporu s Bohrem viz odstavec 1.1.4).



obr. 109

Schrödinger se zabýval myšlenkovým experimentem, který se týkal přístroje na obr. 109. Kočka je zavřena v krabici se zařízením sestávajícím ze vzorku radioaktivního materiálu a ampulkou s jedním (kyanovodík). Proces rozpadu radioaktivního materiálu je sám o sobě procesem, který se řídí kvantovou mechanikou. Podle této teorie je možné předpovědět pouze pravděpodobnost jeho rozpadu. Celá soustava

pracuje takto: když se radioaktivním vzorku rozpadne atom, je to zaregistrováno a zařízení uvnitř krabice rozbije ampulku s jedem a kočka zemře.

Podle běžných měřítek je kočka buď živá nebo mrtvá, ale podle kvantové mechaniky je systém složený z krabice a jejího obsahu popsán vlnovou funkcí. Pokud přijmeme zjednodušující předpoklad, že systém může být pouze v jednom ze dvou kvantově mechanických stavů - kočka je živá nebo mrtvá - pak vlnová funkce systému obsahuje kombinaci těchto dvou možných a vzájemně se vylučujících pozorovaných událostí. Kočka je tedy živá i mrtvá zároveň, a to v každém časovém okamžiku. Dokud někdo neotevře víko krabice, aby se na kočku podíval, Schrödingerova rovnice říká, že časový vývoj existence kočky je matematicky popsán jako fyzicky (a fyziologicky) nepopsatelná kombinace obou zmíněných stavů. Tak jako elektron není ani vlna, ani částice do té doby, než provedeme příslušný experiment, nešťastná kočka není ani živá ani mrtvá do té doby, dokud se někdo nepodívá dovnitř.

Když Schrödinger navrhl tento experiment, napadl tím vlastně neurčitost kvantové mechaniky tak, že přešel od jejího použití pro popis jevů na mikroskopické úrovni (radioaktivní rozpad) k popisu jevů makrosvěta (živá či mrtvá kočka). Samotný akt pozorování nejen, že zavádí do děje subjektivní prvek (někdo musí krabici otevřít a podívat se na kočku), ale nutí též kočku neodvratně přijmout jednu ze dvou možností:

1. ampulka s jedem je neporušená a kočka se těší dobrému zdraví
2. ampulka s jedem je rozbitá a kočka je mrtvá

Schrödingerova kočka nám ukazuje názorným způsobem problém spojený s měřením. Předpokládá se, že zjevně věříme skutečnosti, že stav systému je měněn právě samotným aktem pozorování. To je myšlenka, která se zdá být příliš výstřední.

Einstein se vyjádřil v tom smyslu, že nevěří tomu, že „jedna malá myš změni chování vesmíru jen tím, že by se na něj dívala“. Existují dva způsoby, jak těmto námitkám čelit:

1. Měření kvantových systémů neprovádějí kočky ani myši, ale lidské bytosti obdařené vědomím. V tomto případě je třeba vědomého pozorovatele („aby se podíval“), který následně vyvolá kolaps vlnové funkce. Kočku prý nelze považovat za pozorovatele schopného vyvolat kolaps vlnové funkce na skutečný stav života či smrti. Není prý dostatečně chytrá na to, aby tyto dva stavy rozeznala. Takže ubohá Schrödingerova kočka ani neví, je-li živá či mrtvá.
2. Nositel Nobelovy ceny Eugen Wigner (1902 - 1995, americký fyzik maďarského původu, Nobelova cena v roce 1963 za objev a aplikace základních principů symetrie) vymyslel „Wignerova přítele“ - osobu, která by mohla objasnit experiment s kočkou. Je vybaven plynovou maskou a sedí v krabici spolu se Schrödingerovou kočkou. Vždy, když otevře oči, aby se na kočku podíval, dojde ke kolapsu vlnové funkce. Wignerův přítel je schopen popsat situaci v krabici, jak ji vidí on, běžným jazykem (pokud neuvažujeme o tom, že on sám by byl superpozicí všech možných výsledků experimentu, dokud nedojde k otevření krabice). Jak tvrdí Wigner, při účasti lidské mysli v experimentu by nebylo možné použít obvyklý způsob kvantového popisu.

Další diskusi pak vyvolává nahrazení Wignerova přítele počítačem. Dokáže počítač zkolabovat vlnovou funkci? Mnozí fyzikové tvrdí, že ano.