1. Limity funkcí

- definice
  - *Vlastní limita v bodě $x = a$:* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow$
    $\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ *tak, že pro* $\forall x : x \in (a-\delta, a+\delta)$*, platí* $f(x) \in (A-\epsilon, A+\epsilon)$
  - *Vlastní limita v bodě $x = +\infty$:* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$
    $\forall \epsilon > 0, \exists\, c > 0$ *tak, že pro* $\forall x : x > c$*, platí* $f(x) \in (A-\epsilon, A+\epsilon)$
  - *Nevlastní limita v bodě $x = a$:* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
    $\forall K, \exists\, \delta > 0$ *tak, že pro* $\forall x : x \in (a-\delta, a+\delta)$*, platí* $f(x) > K$
  - *Nevlastní limita v bodě $x = +\infty$:* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
    $\forall K, \exists\, c > 0$ *tak, že pro* $\forall x : x > c$*, platí* $f(x) > K$
- vlastnosti
  - $\lim\limits_{x\to +a} f(x) = \lim\limits_{x\to -a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to +0} f(\frac{1}{y})$
  - $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$ pro $f(x) \geq 0, n \in \mathbb{N}$
  - $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ pro $f(x) \geq 0, n \in \mathbb{N}$
  - $\lim\limits_{x\to a} \alpha^{f(x)} = \alpha^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ pro $\alpha > 0$

  jestliže funkce f, g mají vlastní limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, pak platí
  - $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
  - $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$
  - $\lim\limits_{x\to a} [\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{A}{B}$ pro $B \neq 0$

  - jesliže, $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$, pak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

  věty o limitě sevřené funkce
  - jestliže, v okolí bodu a platí $d(x) \leq f(x) \leq h(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to a} d(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, pak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$
- vybrané limity
  - $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = \lim\limits_{x\to \pm 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a$
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = +\infty$ pro $0 < a < 1$
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$ pro $a > 1$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} ax}{x} = a$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ pro $a > 0$
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}, b > 0$

2. Derivace funkcí

- *Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, pokud limita na pravé straně rovnice existuje*
- pravidla pro derivování
  - $(konst)' = 0$
  - $(f_1(x) + f_2(x) + \ldots)' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots$
  - $(f_1(x)f_2(x))' = f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x)$
  - $(\frac{f_1(x)}{f_2(x)})' = \frac{f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x)}{f_2^2(x)}$ pro $f_2(x) \neq 0$
  - $(f_1(f_2(x)))' = f_1'(f_2(x))f_2'(x)$ (derivace složené fce)
  - $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ pro $f(x) > 0$
  - $\left((f(x))^{(g(x))}\right)' = \left(e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}\right)' = (f(x))^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$ pro $f(x) > 0$
  - jestliže $x = g(y)$ je inverzní funkce k funkci $y = f(x)$ a existuje-li v bodě c derivace $f'(c) \neq 0$, pak v bodě $d = f(c)$ existuje $g'(d)$ a platí
    $$g'(d) = \frac{1}{f'(c)}$$
- derivace vybraných elementárních funkcí
  - $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$
  - $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}, x \neq 0$
  - $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $a \in \mathbb{R}, x > 0$
  - $(a^x)' = a^x \ln a$ pro $a > 0$
  - speciálně $(e^x)' = e^x$
  - $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ pro $x > 0, a > 0, a \neq 1$
  - speciálně $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

  - $(\sin x)' = \cos x$
  - $(\cos x)' = -\sin x$
  - $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$
  - $(\mathrm{cotg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$

  - $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $|x| < 1$
  - $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $|x| < 1$
  - $(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$
  - $(\mathrm{arccotg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

  - $(\sinh x)' = \cosh x$
  - $(\cosh x)' = \sinh x$
  - $(\mathrm{tgh}x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
  - $(\mathrm{cotgh}x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ pro $x \neq 0$

  - $(\mathrm{argsinh}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
  - $(\mathrm{argcosh}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pro $x > 1$
  - $(\mathrm{argtgh}x)' = \frac{1}{1-x^2}$ pro $|x| < 1$
  - $(\mathrm{argcotgh}x)' = \frac{1}{1-x^2}$ pro $|x| > 1$

3. použití derivací

- vyšetřování průběhu funkcí
  - nutná podmínka pro existenci lokálního extrému v bodě $x_0 : f'(x_0) = 0$
  - jesliže $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$, pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální maximum
  - jesliže $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální minimum
  - nutná podmínka pro inflexi v bodě $x_0 : f''(x_0) = 0$
- neurčité výrazy
  - limita typu $0/0$ nebo ∞/∞ (l'Hospitalova pravidla)
    Jestliže $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a existuje $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$, pak existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$ a platí
    $$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$
    Jestliže $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a existuje $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x)$, pak existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$ a platí
    $$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$
  - limita typu $0 \cdot \infty$ převedeme na limitu typu $0/0$ nebo ∞/∞:
    $$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$
  - limity typu 0^∞, ∞^0 a 1^∞ převedeme na limitu typu $0/0$ nebo ∞/∞:
    $$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$$
  - limity typu $\infty - \infty$ převedeme na limitu typu $0/0$ nebo ∞/∞:
    $$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$
  - nebo u limit typu $\infty - \infty$ využijeme vztah $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ a dostáváme
    $$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f^2(x)-g^2(x)}{f(x)+g(x)}$$
- Taylorův rozvoj
  - *(Nechť reálná funkce reálné proměnné $f(x)$ má na intervalu $\langle a, x\rangle$ $(x > a)$ spojité derivace až do n-tého řádu a na intervalu (a, x) má spojitou derivaci $n + 1$-ního řádu, pak lze funkci rozvést v mocninou řadu Taylorova typu)*
  - $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}$
    kde zbytek R_{n+1} lze vyjádřit například ve tvaru
    $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \vartheta \in (0,1)$
  - specialně pro $x = a + h$ platí
    $f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n+1}$
  - specialně pro $a = 0$ dostaneme Maclaurinův vzorec
    $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + R_{n+1}$

  - $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots,$ pro $|x| < +\infty$
  - $a^x = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \ldots,$ pro $|x| < \infty, a > 0$
  - $\ln x = \frac{x-1}{1!} - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \ldots,$ pro $0 < x \le 2$
  - $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots,$ pro $-1 < x \le 1$
  - $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$ pro $|x| < +\infty$
  - $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$ pro $|x| < +\infty$
  - $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \ldots,$ pro $|x| < 1$
  - $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} - \ldots,$ pro $|x| < 1$
  - $\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$ pro $|x| \le 1$
  - $\mathrm{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots,$ pro $|x| \le 1$

4. Integrály elementárních funkcí

- pravidla pro integrování (předpokládáme, že funkce f, g jsou integrovatelné a c je konstanta)
  - $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$
  - $\int [c \cdot f(x)]\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx$
  - substituční metoda: nechť $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k $f(x)$
  $$\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dx = F(\varphi(t)) + C$$
  - metoda per partes
  $$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$$
- integrály vybraných funkcí
  - $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ pro $x > 0; n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
  - $\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$ pro $a, b \neq 0; n \in \mathbb{N}$
  - $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$ pro $x \neq 0$
  - $\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$ pro $a, b \neq 0$

  - $\int e^x\, dx = e^x + C$
  - $\int e^{cx}\, dx = \frac{1}{c} e^{cx} + C$ pro $c \neq 0$
  - $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ pro $a > 0; a \neq 1$

  - $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$ pro $x > 0$
  - $\int (\ln x)^2\, dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$ pro $x > 0$
  - $\int \frac{1}{\ln x}\, dx = \ln|\ln x| + \frac{(\ln x)^2}{2.2!} + \frac{(\ln x)^3}{3.3!} + \cdots + C$ pro $x > 0$
  - $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \ln|\ln x| + C$ pro $x > 0$

  - $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
  - $\int \sin(cx)\, dx = -\frac{1}{c} \cos(cx) + C$ pro $c \neq 0$
  - $\int \frac{\sin(cx)}{x}\, dx = cx - \frac{(cx)^3}{3.3!} + \frac{(cx)^5}{5.5!} + \cdots$ pro $c \neq 0$
  - $\int \frac{1}{\sin(cx)}\, dx = \frac{1}{c} \ln|\mathrm{tg} \frac{cx}{2}| + C$ pro $c \neq 0$
  - $\int \frac{1}{1 \pm \sin(cx)}\, dx = \frac{1}{c} \mathrm{tg}\left(\frac{cx}{2} \mp \frac{\pi}{4}\right) + C$ pro $c \neq 0$
  - $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\mathrm{cotg} x + C$ pro $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

  - $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
  - $\int \cos(cx)\, dx = \frac{1}{c} \sin(cx) + C$ pro $c \neq 0$
  - $\int \frac{\cos(cx)}{x}\, dx = \ln|cx| - \frac{(cx)^2}{2.2!} + \frac{(cx)^4}{4.4!} + \cdots$ pro $c \neq 0$
  - $\int \frac{1}{1+\cos(cx)}\, dx = \frac{1}{c} \mathrm{tg}\left(\frac{cx}{2}\right) + C$ pro $c \neq 0$
  - $\int \frac{1}{1-\cos(cx)}\, dx = -\frac{1}{c} \mathrm{cotg}\left(\frac{cx}{2}\right) + C$ pro $c \neq 0$
  - $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \mathrm{tg} x + C$ pro $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

  - $\int \mathrm{tg}(cx)\, dx = -\frac{1}{c} \ln|\cos(cx)| + C$
  - $\int \mathrm{cotg}(cx)\, dx = \frac{1}{c} \ln|\sin(cx)| + C$

  - $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$
  - $\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$
  - $\int \frac{1}{\cosh^2 x}\, dx = \mathrm{tgh} x + C$
  - $\int \frac{1}{\sinh^2 x}\, dx = -\mathrm{cotgh} x + C$ pro $x \neq 0$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$ pro $|x| < 1$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$ pro $|x| \le a$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \mathrm{argsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \mathrm{argsinh}\frac{x}{a} + C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \mathrm{argcosh} x + C$ pro $x > 1$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \mathrm{argcosh}\frac{x}{a} + C$ pro $x > a$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$ pro $|x| > 1$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + C$ pro $|x| > a$

- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg} x + C = -\mathrm{arccotg} x + C$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C = -\mathrm{arccotg} x + C$
- $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \mathrm{argtgh} x + C$ pro $|x| < 1$
- $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{argtgh}\frac{x}{a} + C$ pro $|x| < a$
- $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \mathrm{argcotgh} x + C$ pro $|x| > 1$
- $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{argcotgh}\frac{x}{a} + C$ pro $|x| > a$
- $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$ pro $|x| \ne 1$
- $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ pro $|x| \ne a$

- často se vyskytující substituce
  - $t = ax + b$ $dx = \frac{1}{a}\,dt$ pro $a \ne 0$
  - $t = \frac{x}{a}$ $dx = a\,dt$ pro $a \ne 0$
  - $t = \frac{a}{x}$ $dx = -\frac{a}{t^2}\,dt$ pro $a \ne 0; x \ne 0$
  - $t = a^x$ $dx = \frac{1}{t\ln a}\,dt$ pro $a \ne 1; a > 0$
  - $t = e^x$ $dx = \frac{1}{t}\,dt$
  - $t = \ln x$ $dx = e^t\,dt$ pro $x > 0$
  - $t = a^2 + x^2$ $dx = \frac{1}{2\sqrt{t-a^2}}\,dt$ pro $x > 0$ nebo $x < 0$
  - $t = \sqrt{x}$ $dx = 2t\,dt$ pro $x \ge 0$
  - $t = \sqrt{a^2+x^2}$ $dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-a^2}}\,dt$
  - $t = \sqrt{a^2-x^2}$ $dx = -\frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt$ pro $|x| < |a|$

- integrace rozkladem na parciální zlomky - pro funkce typu $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde P_n a Q_m jsou polynomy
  (a) pokud $n \geq m$, pak existují polynomy R_{n-m} a $\tilde{P}_{\tilde{n}}$ $(\tilde{n} < m)$ takové, že $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m} - \frac{\tilde{P}_{\tilde{n}}(x)}{Q_m(x)}$ a řešíme rozklad pro podíl polynomů, kde polynom ve jmenovateli $Q_m(x)$ má vyšší stupeň než polynom v čitateli $P_n(x)$
  (b) polynom $Q_m(x)$ má jednoduché reálné kořeny $x_1.x_2, \dots, x_m$ pak existují reálná čísla $A, B, C, \dots$
  $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} + \dots$$
  koeficienty $A, B, C, \dots$ určíme porovnáním koeficientů u týchž mocnin proměnných nebo podle vztahů $A = \frac{P_n(x_1)}{Q'_m(x_1)}$, $B = \frac{P_n(x_2)}{Q'_m(x_2)}$, $C = \frac{P_n(x_3)}{Q'_m(x_3)}$, ...
  (c) polynom $Q_m(x)$ má reálné kořeny, z nichž některé jsou vícenásobné: x_1 je α-násobný, x_2 je $\beta-$ násobný kořen ..., pak existují reálná čísla $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, B_1, B_2, \dots, B_\beta, C_1, C_2, \dots$
  $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x - x_1)^\alpha} + \frac{B_1}{(x - x_2)} + \dots + \frac{B_\beta}{(x - x_2)^\beta} + \frac{C}{(x - x_3)} + \dots$$
  (d) polynom $Q_m(x)$ má jednoduché komplexní kořeny $x_1, x_2, \dots, x_{m/2}$ a k nim vždy kořeny komplexně sdružené $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{m/2}$, pak existují reálná čísla $P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2 \dots$
  $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_1 x + Q_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{P_2 x + Q_2}{x^2 + p_2 x + q_2} + \dots$$
  kde platí $p_i^2 - 4q_i < 0$ a řešením rovnic $x^2 + p_i x + q_i = 0$ jsou komplexně sdružené kořeny x_i a $\bar{x}_i$.
  (e) polynom $Q_m(x)$ má vícenásobné komplexní kořeny $x_1, \bar{x}_1$ jsou α-násobné kořeny, $x_2, \bar{x}_2$ jsou $\beta-$ násobné kořeny ..., pak platí
  $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_1 x + Q_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \dots + \frac{P_\alpha x + Q_\alpha}{(x^2 + p_1 x + q_1)^\alpha} + \frac{P_{\alpha+1} x + Q_{\alpha+2}}{x^2 + p_2 x + q_2} + \dots$$
- příklady na rozklad parciálních zlomků
  (a) $\frac{3x^3+12x^2+7x+2}{x^2+4x+3} = 3x + \frac{-2x+2}{(x+1)(x+3)} = 3x + \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+3)} = 3x + \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$
  a porovnáním koeficientů dostaneme
  $$\left.\begin{array}{rrcr} A & +B & = & -2 \\ 3A & +B & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcr} A & = & 2 \\ B & = & -4 \end{array}$$
  (b) $\frac{3x+1}{(x-3)^2} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2} = \frac{A_1(x-3)+A_2}{(x-3)^2}$ a porovnáním koeficientů dostaneme
  $$\left.\begin{array}{rrcr} A_1 & & = & 3 \\ -3A_1 & +A_2 & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcr} A_1 & = & 3 \\ A_2 & = & 10 \end{array}$$
  (c) $\frac{3x^3+10x^2-x}{(x^2-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} = \frac{A_1(x-1)(x+1)^2+A_2(x+1)^2+B_1(x-1)^2(x+1)+B_2(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$
  a porovnáním koeficientů dostaneme
  $$\left.\begin{array}{rrrrcr} A_1 & & +B_1 & & = & 3 \\ A_1 & +A_2 & -B_1 & +B_2 & = & 10 \\ -A_1 & +2A_2 & -B_1 & -2B_2 & = & -1 \\ -A_1 & +A_2 & +B_1 & +B_2 & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcr} A_1 & = & 4 \\ A_2 & = & 3 \\ B_1 & = & -1 \\ B_2 & = & 2 \end{array}$$
  (d) $\frac{7x^2-10x+37}{x^3-3x^2+9x+13} = \frac{A}{x+1} + \frac{Px+Q}{x^2-4x+13} = \frac{A(x^2-4x+13)+(Px+Q)(x+1)}{(x+1)(x^2-4x+13)}$
  a porovnáním koeficientů dostaneme
  $$\left.\begin{array}{rrrcr} A & +P & & = & 7 \\ -4A & +P & +Q & = & -10 \\ 13A & & +Q & = & 37 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcr} A & = & 3 \\ P & = & 4 \\ Q & = & -2 \end{array}$$

ddsdsasdfghgfh fb