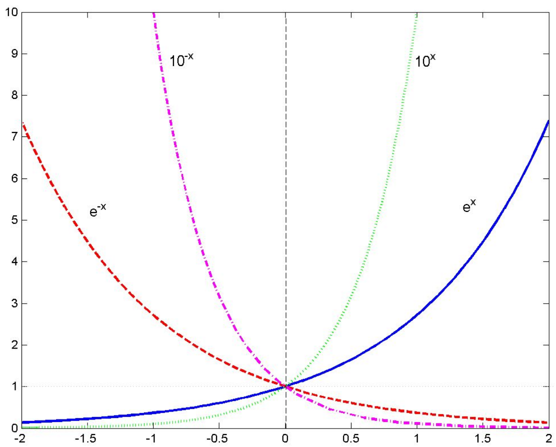
Přehled základních vzorců pro Matematiku 1

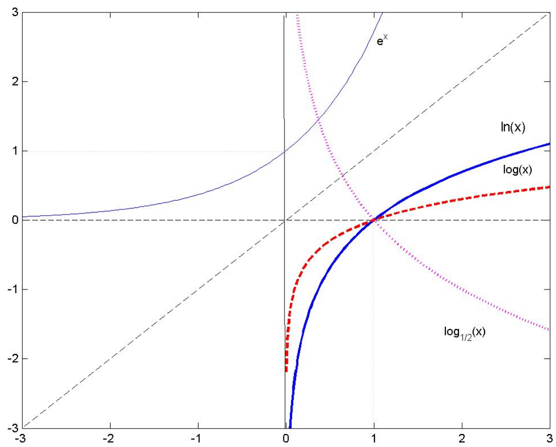
1. Úpravy algebraických výrazů
   - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
   - $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
   - $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$
   - $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$

   - $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
   - $a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$, kde i je imaginární jednotka
   - $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
   - $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})$
   - $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a-b)(a+b)$
   - $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
   - $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ pro n liché
2. Klasifikace elementárních funkcí
   - algebraické
     - racionální
       * polynomické: $f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
       * racionální lomené $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$
     - iracionální: $f_1(x) = 2 + \sqrt{x}$, $f_2(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x}}, \ldots$
   - transcendentní (exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, ...)
3. Vlastnosti funkcí
   - definiční obor $\mathcal{D}(f)$ a obor hodnot $\mathcal{H}(f)$
   - funkce omezené (shora, zdola) a neomezené
   - funkce rostoucí, klasající, nerostoucí, neklesající
   - funkce mající lokální a/nebo globální extrém (maximum, minimum)
   - funkce sudé $f(-x) = f(x)$ a liché $f(-x) = -f(x)$
   - funkce periodické
   - funkce prosté a funkce k nim inverzní

4. Exponenciální a logaritmické funkce

- exponenciální funkce $f(x) = a^x$ pro $a > 0, a \neq 1$
- $\mathcal{D}(a^x) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(a^x) = (0, \infty)$
- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- logaritmická funkce je funkce inverzní k exponenciální funkci
  $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ pro $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^+$
- $\mathcal{D}(\log)=(0, \infty)$, obor hodnot: $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$
- $\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b (\frac{x}{y}) = \log_b x - \log_b y$
- $\log_b x^r = r \log_b x$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b (b^r) = r$
- $b^{\log_b x} = x$
- $\log_b x = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$

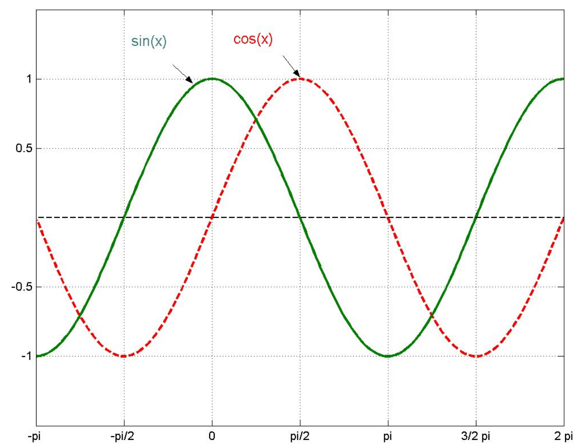


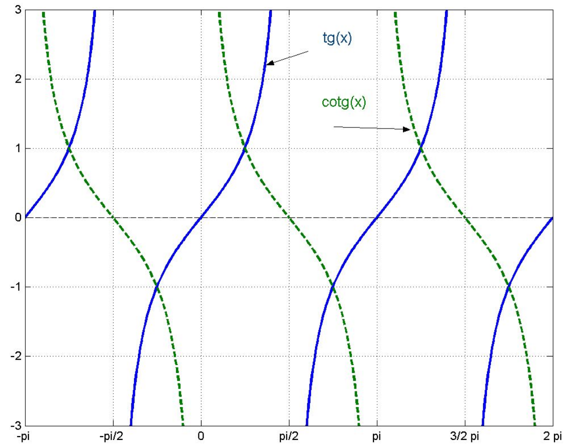


5. Goniometrické funkce

	$\mathcal{D}$	$\mathcal{H}$
$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k.2\pi)$	$\mathbb{R}$	$\langle -1, 1\rangle$
$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k.2\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$\langle -1, 1\rangle$
$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{tg}(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha + k.\pi)$		
$\mathrm{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$	$\mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{cotg}(\alpha) = \mathrm{cotg}(\alpha + k.\pi)$		

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \quad \mathrm{tg}(\alpha)\,\mathrm{cotg}(\alpha) = 1$
- $1 + \mathrm{tg}^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}, \quad 1 + \mathrm{cotg}^2(\alpha) = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha)$
- $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2(\beta) - \sin^2(\alpha)$
- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$
- $|\sin(\frac{\alpha}{2})| = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
- $|\cos(\frac{\alpha}{2})| = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
- $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$
- $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$
- $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta))$
- *(Eulerovy vzroce)* $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi), \quad e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - i\sin(\varphi)$
- $\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \quad \cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$

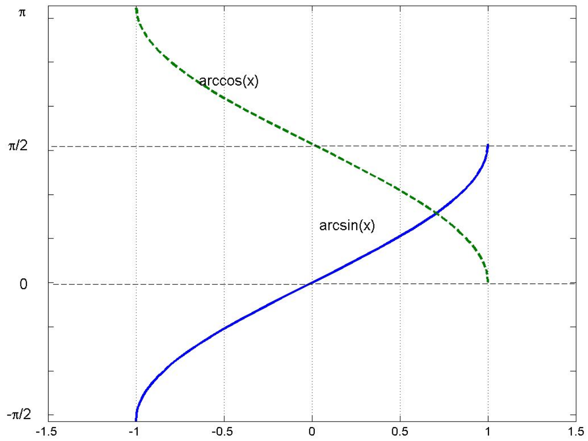


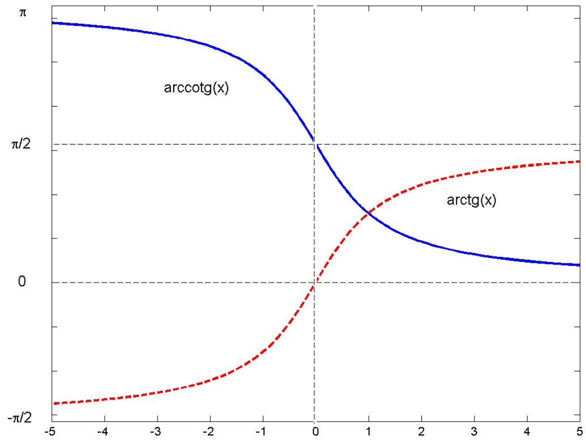


6. Cyklometrické funkce (funkce inverzní k funkcím goniometrickým)

	$\mathcal{D}$	$\mathcal{H}$
arcsin	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
arccos	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle 0, \pi \rangle$
arctg	$\mathbb{R}$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
arccotg	$\mathbb{R}$	$\langle 0, \pi \rangle$

- $\arcsin(-x) = -\arcsin(x), \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$
- $\arcsin(x) = \pi/2 - \arccos(x) = \mathrm{arctg}(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$
- $\arccos(x) = \pi/2 - \arcsin(x) = \mathrm{arccotg}(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$
- $\mathrm{arccotg}(x) = \mathrm{arctg}(\frac{1}{x})$ pro $x > 0$, $\mathrm{arccotg}(x) = \mathrm{arctg}(\frac{1}{x}) + \pi$ pro $x < 0$

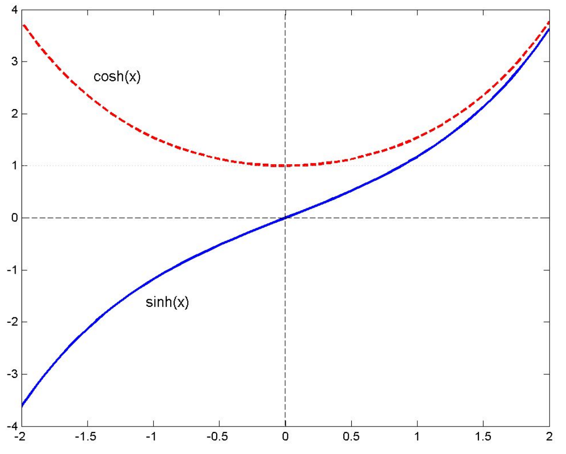


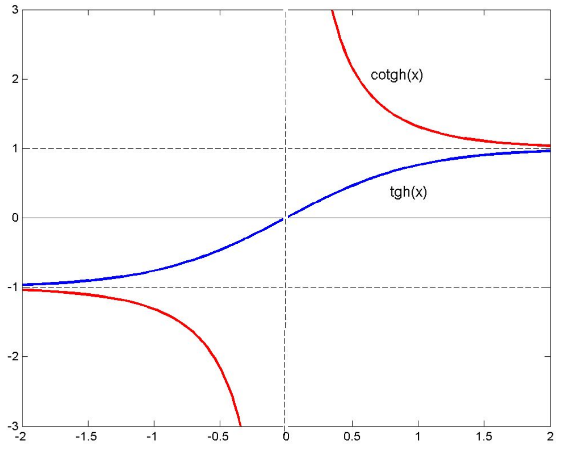


7. Hyperbolické funkce

	$\mathcal{D}$	$\mathcal{H}$
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\langle 1, \infty)$
$\mathrm{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$
$\mathrm{cotgh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

- $\sinh(-x) = -\sinh(x), \quad \cosh(-x) = \cosh(x)$
- $\sinh(x) + \cosh(x) = e^x, \quad \sinh(x) - \cosh(x) = -e^{-x}$
- $\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \cosh(2x)$
- $\sinh^2(x) - \cosh^2(x) = -1$





8. Hyperbolometrické funkce (inverzní funkce k funkcím hyperbolickým)

	$\mathcal{D}$	$\mathcal{H}$
$\mathrm{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$\langle 1, \infty)$	$\langle 0, \infty)$
$\mathrm{argtgh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{argcotgh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$\mathbb{R} - \{0\}$