ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Samostatná práce

z předmětu

Seminář – maticový počet

Jméno a příjmení: *Jan Tichava*
Osobní číslo: *A04386*
Studijní skupina: *14*
Obor: *INIB – INF*
E-mail: *jtichava@students.zcu.cz*

Datum odevzdání: 21.12.2004

Cvičení 1

Příklad 1b)

Napište reálný rozklad a rozklad na kořenové činitele polynomu p(x)

$$p(x) = x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 14x^2 + 15x - 6$$

	1	-4	8	-14	15	-6
1		1	-3	5	-9	6
	1	-3	5	-9	6	0
1		1	-2	3	-6	
	1	-2	3	-6	0	
2		-2	0	6		
	1	0	3	0		

$$x^2 + 3 = 0$$
$$x^2 = -3$$
$$|x| = \sqrt{3}i$$

$$x_1 = +\sqrt{3}i$$
$$x_2 = -\sqrt{3}i$$

Reálný rozklad polynomu

$$p(x) = (x-1)(x-1)(x-2)(x^2-3) = (x-1)^2(x-2)(x^2+3)$$

Rozklad na kořenové činitele

$$p(x) = (x-1)^2(x-2)(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)$$

Příklad 2a)

Jsou dány matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Určete A+2B, -3A+4B, A+D, D-C

$$2B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & -10 \\ -4 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -6 \\ 1 & 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-3A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 9 & -12 \\ -15 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4B=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 16 & -20 \\ -8 & 4 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$-3A+4B=\begin{bmatrix} -3 & -2 & 25 & -32 \\ -23 & 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

A + D – nelze, protože nesouhlasí rozměry matic
D – C – nelze, protože nesouhlasí rozměry matic

Příklad 3d)

Určete determinant matice A

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = a\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + c\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + d\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$+a\{[(1\cdot1\cdot3)+(3\cdot1\cdot1)+(1\cdot1\cdot1)]-[(1\cdot1\cdot1)+(1\cdot1\cdot1)+(3\cdot1\cdot3)]\}$$

$$-b\{[(3\cdot1\cdot3)+(1\cdot1\cdot1)+(1\cdot1\cdot1)]-[(1\cdot1\cdot1)+(1\cdot1\cdot3)+(3\cdot1\cdot1)]\}$$

$$+c\{[(3\cdot3\cdot3)+(1\cdot1\cdot1)+(1\cdot1\cdot1)]-[(1\cdot3\cdot1)+(1\cdot1\cdot3)+(3\cdot1\cdot1)]\}$$

$$-d\{[(3\cdot3\cdot1)+(1\cdot1\cdot1)+(1\cdot1\cdot1)]-[(1\cdot3\cdot1)+(1\cdot1\cdot3)+(1\cdot1\cdot1)]\} =$$

$$= a[(3+3+1)-(1+1+9)]-b[(9+1+1)-(1+3+3)]+c[(27+1+1)-(3+3+3)]+$$

$$+d[(9+1+1)-(3+3+1)] = a(7-11)-b(11-7)+c(29-9)+d(11-7) =$$

$$-4a-4b+20c+4d$$

Cvičení 2

Příklad 4a)

$\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$

$v_1 = [1,2,-3,4,5]^T,\ v_2 = [-2,1,5,-2,-1]^T,\ v_3 = [0,-4,2,1,-1]^T,\ v_4 = [-1,-1,4,3,3]^T$

$$\begin{bmatrix}1&2&-3&4&5\\-2&1&5&-2&-1\\0&-4&2&1&-1\\-1&-1&4&3&3\end{bmatrix}\begin{matrix}\\+2I\\ \\+I\end{matrix}\simeq\begin{bmatrix}1&2&-3&4&5\\0&5&-1&6&9\\0&-4&2&1&-1\\0&1&1&7&8\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1&2&-3&4&5\\0&1&1&7&8\\0&-4&2&1&-1\\0&5&-1&6&9\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\+4II\\-5II\end{matrix}\simeq$$

$$\simeq\begin{bmatrix}1&2&-3&4&5\\0&1&1&7&8\\0&0&6&29&31\\0&0&-6&-29&-31\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\+III\end{matrix}\simeq\begin{bmatrix}1&2&-3&4&5\\0&1&1&7&8\\0&0&6&29&31\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

vektory v_1, v_2, v_3, v_4 jsou lineárně závislé, protože $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$,
prvky v_1, v_2, v_3 jsou lineárně nezávislé

Příklad 5b)

Určete bázi a dimenzi prostoru $\mathcal{V}$

$\mathcal{V}$ je generován prvky
$p_1 = x^3 - x^2 + 2x + 1,\ p_2 = -x^3 + 2x^2 - x + 4,\ p_3 = 2x^3 - 3x^2 + x - 3,\ p_4 = x^3 + 4x^2 - x + 2$

$$\begin{bmatrix}1&1&2&1\\-1&2&-1&4\\2&-3&1&-3\\1&4&-1&2\end{bmatrix}\begin{matrix}\\+I\\-2I\\-I\end{matrix}\simeq\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&3&1&5\\0&-5&-3&-5\\0&3&-3&1\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&3&-3&1\\0&-5&-3&-5\\0&3&1&5\end{bmatrix}\begin{matrix}\\/:3\\ \\ \end{matrix}\simeq\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&-1&\frac{1}{3}\\0&-5&-3&-5\\0&3&1&5\end{bmatrix}\begin{matrix}\\-\\+5II\\-3I\end{matrix}\simeq$$

$$\simeq\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&-1&\frac{1}{3}\\0&0&-8&-\frac{10}{3}\\0&0&4&4\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&-1&\frac{1}{3}\\0&0&4&4\\0&0&-8&-\frac{10}{3}\end{bmatrix}\begin{matrix}\\/\cdot 3\\/:4\\/\cdot\frac{3}{2}\end{matrix}\simeq\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&3&-3&1\\0&0&1&1\\0&0&-12&-5\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\+12III\end{matrix}\simeq\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&3&-3&1\\0&0&1&1\\0&0&0&7\end{bmatrix}$$

hodnost matice je 4 $\Rightarrow$ má 4 lineárně nezávislé řádky

polynomy p_1, p_2, p_3, p_4 tvoří bázi prostoru $\mathcal{V}$; $\dim \mathcal{V} = 4$

Příklad 6a)

Ukažte, že prvek $y \in \mathcal{V}$ a určete $\hat{y}$ souřadnice prvku y v bázi $\mathcal{V}$.

$\mathcal{V}$ je generován prvky $v_1 = [1, 2, -3, 4, 5]^T$, $v_2 = [-2, 1, 5, -2, -1]^T$, $v_3 = [0, -4, 2, 1, -1]^T$,
$v_4 = [-1, -1, 4, 3, 3]^T$; $y = [-1, 28, -9, 3, 18]^T$

Určení lineární závislosti a nezávislosti

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +2I \\ \\ +I \end{matrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +4II \\ -5II \end{matrix} \simeq$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 29 & 31 \\ 0 & 0 & -6 & -29 & -31 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +III \end{matrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 29 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

prvky v_1, v_2, v_3 jsou lineárně nezávislé, prvek v_4 je lineárně závislý
prvky v_1, v_2, v_3 tvoří bázi prostoru

Určení souřadnic prvku y

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 28 \\ -9 \\ 3 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 28 \\ -3 & 5 & 2 & -9 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & -1 & 18 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -2I \\ +3I \\ -4I \\ -5I \end{matrix} \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 30 \\ 0 & -1 & 2 & -12 \\ 0 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 9 & -1 & 23 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -12 \\ 0 & 5 & -4 & 30 \\ 0 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 9 & -1 & 23 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ +5II \\ +6II \\ +9II \end{matrix} \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 6 & -30 \\ 0 & 0 & 13 & -65 \\ 0 & 0 & 17 & -85 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ /:6 \\ /:13 \\ /:17 \end{matrix} \simeq$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \\ -III \\ -III \end{matrix} \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}\alpha-2\beta&=-1\\ \alpha-2\cdot 2&=-1\\ \alpha-4&=-1\\ \alpha&=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\beta+2\gamma&=-12\\ -\beta+2\cdot(-5)&=-12\\ -\beta-10&=-12\\ -\beta&=-2\\ \beta&=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1\gamma&=-5\\ \gamma&=-5\end{aligned}$$

$$\hat{y}=[3,5,-5]^T$$

Cvičení 3

Příklad 7a)

Určete hodnost matice A

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-3&4&5\\3&1&2&-1&3\\-2&-1&1&3&-4\\2&2&0&6&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-3&4&5\\3&1&2&-1&3\\-2&-1&1&3&-4\\2&2&0&6&4\end{bmatrix}\begin{matrix}\\-3I\\+2I\\-2I\end{matrix}\simeq\begin{bmatrix}1&2&-3&4&5\\0&-5&11&-13&-12\\0&3&-5&11&6\\0&-2&6&-2&-6\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1&2&-3&4&5\\0&-2&6&-2&-6\\0&3&-5&11&6\\0&-5&11&-13&-12\end{bmatrix}/:(-2)\simeq$$

$$\simeq\begin{bmatrix}1&2&-3&4&5\\0&1&-3&1&3\\0&-5&11&-13&-12\\0&3&-5&11&6\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\+5II\\-3II\end{matrix}\simeq\begin{bmatrix}1&2&-3&4&5\\0&1&-3&1&3\\0&0&-4&-8&3\\0&0&4&8&-3\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\\\+III\end{matrix}\simeq\begin{bmatrix}1&2&-3&4&5\\0&1&-3&1&3\\0&0&-4&-8&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

3 lineárně nezávislé řádky

hod(A) = 3

Příklad 7c)

Určete hodnost matice A

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-3&4\\-1&2&4&-1\\3&-1&2&-5\\2&-3&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ -3\mathrm{I} \\ -2\mathrm{I} \end{matrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & 11 & -17 \\ 0 & -7 & 7 & -9 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -9 \\ 0 & -7 & 11 & -17 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ /:(-7) \\ \\ \\ \end{matrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & -7 & 11 & -17 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +7\mathrm{II} \\ -4\mathrm{II} \end{matrix} \simeq$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & -\frac{15}{7} \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ /:4 \\ \\ \end{matrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -\frac{15}{7} \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ -5\mathrm{III} \end{matrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{55}{7} \end{bmatrix}$$

4 lineárně nezávislé řádky

hod(A) = 4

Příklad 8d)

K matici A určete matici inverzní A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} /:2 \\ \\ \\ \end{matrix} \simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ -3\mathrm{I} \\ -4\mathrm{I} \end{matrix} \simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ -2\mathrm{II} \end{matrix} \simeq$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ /:4 \end{matrix} \simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]\begin{matrix} -\frac{3}{2}\mathrm{III} \\ \frac{5}{2}\mathrm{III} \\ \\ \end{matrix} \simeq$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]\begin{matrix} +2\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{matrix} \simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{8} & \frac{1}{4} & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{13}{8} & \frac{1}{4} & \frac{7}{8} \\ -\frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -13 & 2 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} == \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -13 & 2 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Cvičení 4

Příklad 9c)

Rozhodněte, zda dané zobrazení je lineární
$\mathcal{L}$: $\mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
$\mathcal{L}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = \left[a - b + 2c, b - d - a\right]^T$

podmínka 1: $\mathcal{L}(x+y) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y)$

$$x = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)$$
$$y = \left(a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'\right)$$

$$\mathcal{L}\left(a + a'\right)x^3 + \left(b + b'\right)x^2 + \left(c + c'\right)x + \left(d + d'\right) =$$
$$\mathcal{L}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) + \mathcal{L}\left(a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'\right)$$
$$\left[a + a' - b - b' + 2c + 2c', b + b' - d - d' - a - a'\right]^T = \left[a - b + 2c, b - d - a\right]^T$$

podmínka 2: $\mathcal{L}(\lambda x) = \lambda\mathcal{L}(x)$

$$\mathcal{L}\left(\lambda\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)\right) = \mathcal{L}\left(\lambda ax^3 + \lambda bx^2 + \lambda cx + \lambda d\right) =$$
$$\left[\lambda a - \lambda b + \lambda 2c, \lambda b - \lambda d - \lambda a\right]^T = \lambda\left[a - b + 2c, b - d - a\right]^T = \lambda\mathcal{L}\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)$$

jsou splněny obě podmínky, zobrazení je lineární

Příklad 10a)

Určete dimenzi a najděte alespoň jednu bázi jádra Ker$\mathcal{L}$ a obrazu Im$\mathcal{L}$
$\mathcal{L}$: $\mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
$\mathcal{L}\left(\left[a, b, c\right]^T\right) = \left[2a - b + c, 0, a + 3b - c, 0, 3a + 2b\right]^T$

hledání jádra

$$\begin{aligned} 2a - b + c &= 0 \\ 0 &= 0 \\ a + 3b - c &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 3a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2I \\ -3I \end{array} \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -II \end{array} \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

volím c = 7

$$\begin{aligned} a + 3b - c &= 0 \\ a + 9 - 7 &= 0 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7b + 3c &= 0 \\ -7b + 21 &= 0 \\ -7b &= -21 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

báze [-2, 3, 7]

1 lineárně nezávislé řešení – dim(Ker$\mathcal{L}$) = 1
dim($\mathbb{R}_3$) = dim(Ker$\mathcal{L}$) + dim(Im$\mathcal{L}$)
3 = 1 + dim(Im$\mathcal{L}$)
2 = dim(Im$\mathcal{L}$)

báze obrazu

$$\begin{aligned} u_1 &= [1,0,0]^T & \mathcal{L}(u_1) &= [2,0,1,0,3]^T \\ u_2 &= [0,1,0]^T & \mathcal{L}(u_2) &= [-1,0,3,0,2]^T \\ u_3 &= [0,0,1]^T & \mathcal{L}(u_3) &= [1,0,-1,0,0]^T \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ +I \\ -2II \end{array} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{3}{2}II \end{array} \simeq [\ ]$$

$\mathcal{L}(u_2)$ a $\mathcal{L}(u_3)$ jsou báze obrazu

Příklad 11b)

Určete matici A lineárního zobrazení L ve standardních bázích $e_1, e_2, \ldots$ a $p_1, p_2, \ldots$

$L: P_3 \to \mathbb{R}_2$ dané předpise

$L\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = [a - b + 2c, b - d - a]^T$

$P_3: e_1 = x^3,\ e_2 = x^2,\ e_3 = x,\ e_4 = 1$

$\mathbb{R}_2: p_1 = [1,0]^T,\ p_2 = [0,1]^T$

$$A = \left[\widehat{L(e_1)} \mid \widehat{L(e_2)} \mid \widehat{L(e_3)}\right]$$

$L(e_1)$ $\quad [1,-1]^T = k_1[1,0]^T + k_2[0,1]^T$

$k_1 = 1 \qquad k_2 = -1$

$L(e_2)$ $\quad [-1,1]^T = k_1[1,0]^T + k_2[0,1]^T$

$k_1 = -1 \qquad k_2 = 1$

$L(e_3)$ $\quad [2,0]^T = k_1[1,0]^T + k_2[0,1]^T$

$k_1 = 2 \qquad k_2 = 0$

$L(e_4)$ $\quad [0,-1]^T = k_1[1,0]^T + k_2[0,1]^T$

$k_1 = 0 \qquad k_2 = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Cvičení 5

Příklad 15a)

Určete matici přechodu T od báze $f_1, f_2, \ldots$ k bázi $g_1, g_2, \ldots$ prostoru L a T^{-1} matici přechodu od báze $g_1, g_2, \ldots$ k bázi $f_1, f_2, \ldots$

$L = \mathbb{R}_2$

$f_1 = [1,2]^T, f_2 = [2,1]^T$

$g_1 = [3,5]^T, g_2 = [5,3]^T$

a)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right] -2\mathrm{I} \simeq \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

$b = \frac{1}{3}$ $\quad a = \frac{7}{3}$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right] -2\mathrm{I} \simeq \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -7 \end{array}\right]$$

$b = \frac{7}{3}$ $\quad a = \frac{1}{3}$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{cc|c} 15 & 25 & 5 \\ -15 & -9 & -6 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{cc|c} 15 & 25 & 5 \\ 0 & 16 & -1 \end{array}\right]$$

$b = -\frac{1}{16}$ $\quad a = \frac{7}{16}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{cc|c} 15 & 25 & 10 \\ -15 & -9 & -3 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{cc|c} 15 & 25 & 10 \\ 0 & 16 & 7 \end{array}\right]$$

$b = \frac{7}{16}$ $\quad a = -\frac{1}{16}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{7}{16} \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Příklad 15b)

Určete matici přechodu T od báze $f_1, f_2, \ldots$ k bázi $g_1, g_2, \ldots$ prostoru L a T^{-1} matici přechodu od báze $g_1, g_2, \ldots$ k bázi $f_1, f_2, \ldots$

$$L = P_2$$
$$f_1 = x^2 + 2x + 1, f_2 = x^2 + 2x - 1, f_3 = x^2 - 2x - 1$$
$$g_1 = x^2, g_2 = x, g_3 = 1$$

a)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2I \\ -I \end{array} \simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$c_1 = \frac{1}{2}$ $\quad c_2 = -\frac{1}{4}$ $\quad c_3 = 0$

$b_1 = 0$ $\quad b_2 = \frac{1}{4}$ $\quad b_3 = -\frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad a_2 = 0$ $\quad a_3 = \frac{1}{2}$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$c_1 = 1$ $c_2 = -1$ $c_3 = -1$

$b_1 = 2$ $b_2 = 2$ $b_3 = 2$

$a_1 = 1$ $a_2 = 1$ $a_3 = 1$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Příklad 16b)

Určete matici A lineárního operátoru L: $L \to L$ v bázi $f_1, f_2, \ldots$ prostoru L, matici B téhož lineárního operátoru L v bázi $g_1, g_2, \ldots$ prostoru L a T matici přechodu od báze $f_1, f_2, \ldots$ k bázi $g_1, g_2, \ldots$. Určete $T^{-1}AT$.

$L = P_2$

$L\left(ax^2 + bx + c\right) = \left(a - b - 2c\right)x^2 + \left(3a + b - c\right)x + \left(4a + c\right)$

$f_1 = x^2 + 2x - 1,\ f_2 = x + 2,\ f_3 = 1$

$g_1 = x^2 + x,\ g_2 = x + 1,\ g_3 = x^2 + 1$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 12 & -7 & -5 \\ -24 & 19 & 13 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$T^{-1}AT = B$

Cvičení 6

Příklad 17b)

Určete všechna řešení homogenní soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&3\\2&-1&2&-1\\-3&1&2&-1\\-1&1&2&-1\\3&1&-1&4\end{bmatrix}\begin{matrix}\\-2I\\+3I\\+I\\-3I\end{matrix}\simeq\begin{bmatrix}1&2&-1&3\\0&-5&4&-7\\0&7&-1&8\\0&3&1&2\\0&-5&2&-5\end{bmatrix}/:5\simeq\begin{bmatrix}1&2&-1&3\\0&-1&\frac{4}{5}&-\frac{7}{5}\\0&7&-1&8\\0&3&1&2\\0&-5&2&-5\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\+7II\\+3II\\-5II\end{matrix}\simeq$$

$$\simeq\begin{bmatrix}1&2&-1&3\\0&-1&\frac{4}{5}&-\frac{7}{5}\\0&0&\frac{23}{5}&-\frac{9}{5}\\0&0&\frac{17}{5}&-\frac{11}{5}\\0&0&-2&2\end{bmatrix}/:2\simeq\begin{bmatrix}1&2&-1&3\\0&-1&\frac{4}{5}&-\frac{7}{5}\\0&0&-1&1\\0&0&\frac{17}{5}&-\frac{11}{5}\\0&0&\frac{23}{5}&-\frac{9}{5}\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\\\+\frac{17}{5}III\\+\frac{23}{5}III\end{matrix}\simeq\begin{bmatrix}1&2&-1&3\\0&-1&\frac{4}{5}&-\frac{7}{5}\\0&0&-1&1\\0&0&0&\frac{6}{5}\\0&0&0&\frac{14}{5}\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1&2&-1&3\\0&-5&4&-7\\0&0&-1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$\text{hod}(A)=4$

$x=[0,0,0,0]^T$

Příklad 18a)

Určete všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x_1+2x_2-x_3+3x_4&=5\\-2x_1-3x_2+3x_3-4x_4&=-14\\3x_1+4x_2+2x_3-2x_4&=8\\x_1+3x_2-2x_3+7x_4&=4\end{aligned}$$

$$A=\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\-2&-3&3&-4&-17\\3&4&2&-2&8\\1&3&-2&7&4\end{array}\right]\begin{matrix}\\+2I\\-3I\\-I\end{matrix}\simeq\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\0&1&1&2&-7\\0&-2&5&-11&-7\\0&1&-1&4&-1\end{array}\right]\begin{matrix}\\\\+2II\\-II\end{matrix}\simeq\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\0&1&1&2&-7\\0&0&7&-7&-21\\0&0&-2&2&6\end{array}\right]\simeq$$

$$\simeq\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\0&1&1&2&-7\\0&0&-1&1&3\\0&0&7&-7&-21\end{array}\right]\begin{matrix}\\\\\\+7III\end{matrix}\simeq\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\0&1&1&2&-7\\0&0&-1&1&3\end{array}\right]$$

$\text{hod}(A)=3 \quad \text{hod}(A^R)=3 \qquad \Rightarrow \exists$ řešení

volím za jednu neznámou

a) řešení bez pravé strany

$x_h = k[4, -3, 1, 1]^T$

b) řešení s pravou stranou

$x_p = [10, -4, -3, 0]^T$

řešení

$x = [10, -4, -3, 0]^T + k[4, -3, 1, 1]^T$

Příklad 19a)

Cramerovým pravidlem určete řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= -7 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{je regulární, můžeme použít Cramerovo pravidlo}$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \\ -7 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -113 \qquad \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -28 \qquad \det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 59$$

$$x_1 = \frac{-113}{-6} = \frac{113}{6} \qquad x_2 = \frac{-28}{-6} = \frac{28}{6} \qquad x_3 = \frac{59}{-6} = \frac{-59}{6}$$

$$x = \frac{1}{6}[113, 28, -59]^T$$

Cvičení 7

Příklad 21c)

Určete vlastní čísla, vlastní vektory a Jordanův kanonický tvar matice A

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 17 & 10 & -9 \\ 39 & 21 & -16 \end{bmatrix}$$

$$A: \qquad A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$
$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-10 & -5 & 3 \\ -17 & \lambda-10 & 9 \\ -39 & -21 & \lambda+16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-10 & -5 & 3 \\ -17 & \lambda-10 & 9 \\ -39 & -21 & \lambda+16 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{matrix} \lambda-10 & -5 & 3 \\ -17 & \lambda-10 & 9 \end{matrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda-10)(\lambda-10)(\lambda+16) + (-17)(-21)\cdot 3 + (-39)(-5)\cdot 9 - (-39)(\lambda-10)\cdot 3 -$$
$$(\lambda-10)(-21)\cdot 9 - (-17)(-5)(\lambda+16) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 220\lambda + 1600 + 2826 + 117\lambda - 1170 +$$
$$189\lambda - 1890 - 85\lambda - 1360 = \lambda^3 - 4\lambda^2 + x + 6 = 0$$

	1	-4	1	6
1		-1	-5	-6
	1	-5	6	0
1		2	-6	
	1	-3	0	
2		3		
	1	0		

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

vlastní čísla: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

$\lambda_1 = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -11 & -5 & 3 & 0 \\ -17 & -11 & 9 & 0 \\ -39 & -21 & 15 & 0 \end{array}\right] /:(-11) \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} & 0 \\ -17 & -11 & 9 & 0 \\ -39 & -21 & 15 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ +17\mathrm{I} \\ +39\mathrm{I} \end{array} \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} & 0 \\ 0 & -\frac{36}{11} & \frac{48}{11} & 0 \\ 0 & -\frac{36}{11} & \frac{48}{11} & 0 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 11 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$u_1 = [-1, 4, 3]^T$

$\lambda_2 = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & -5 & 3 & 0 \\ -17 & -8 & 9 & 0 \\ -39 & -21 & 18 & 0 \end{array}\right] /:(-8) \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ -17 & -8 & 9 & 0 \\ -39 & -21 & 18 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ +17\mathrm{I} \\ +39\mathrm{I} \end{array} \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{21}{8} & \frac{21}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{27}{8} & \frac{27}{8} & 0 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$u_2 = [1, -1, 1]^T$

$\lambda_3 = 3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7 & -5 & 3 & 0 \\ -17 & -7 & 9 & 0 \\ -39 & -21 & 19 & 0 \end{array}\right] /:(-7) \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ -17 & -7 & 9 & 0 \\ -39 & -21 & 19 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ +17\mathrm{I} \\ +39\mathrm{I} \end{array} \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{36}{7} & \frac{12}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{48}{7} & \frac{16}{7} & 0 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$u_3 = [2, -1, 3]^T$

Vlastní vektory: $u_1 = [-1, 4, 3]^T$
$u_2 = [1, -1, 1]^T$
$u_3 = [2, -1, 3]^T$

Jordanův tvar matice

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Příklad 21a)

Určete vlastní čísla, vlastní vektory a Jordanův kanonický tvar matice A

$$A=\begin{bmatrix}14 & 4\\ 30 & -8\end{bmatrix}$$

$$A:\qquad A\vec{u}=\lambda\vec{u}$$
$$\det(\lambda I-A)=0$$

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-14 & -4\\ 30 & \lambda+8\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-14 & -4\\ 30 & \lambda+8\end{vmatrix}=(\lambda-14)(\lambda+8)-(-4)\cdot 30=\lambda^2-6\lambda+8=0$$

Vlastní čísla: $\lambda_1=2,\ \lambda_2=4$

$\lambda_1=2$

$$\left[\begin{array}{cc|c}-12 & -4 & 0\\ 30 & 10 & 0\end{array}\right]\begin{array}{l}/:(-12)\\ /:10\end{array}\simeq\left[\begin{array}{cc|c}1 & \frac{1}{3} & 0\\ 3 & 1 & 0\end{array}\right]-3I\simeq\left[\begin{array}{cc|c}1 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$u_1=[-1,3]^T$

$\lambda_2=4$

$$\left[\begin{array}{cc|c}-10 & -4 & 0\\ 30 & 12 & 0\end{array}\right]\begin{array}{l}/:(-10)\\ /:6\end{array}\simeq\left[\begin{array}{cc|c}1 & \frac{2}{5} & 0\\ 5 & 2 & 0\end{array}\right]-5I\simeq\left[\begin{array}{cc|c}1 & \frac{2}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$u_2=[-2,5]^T$

Vlastní vektory: $u_1=[-1,3]^T$
$u_2=[-2,5]^T$

$$J=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

Příklad 22c)

K matici A určete Jordanův kanonický tvar J a matici T. Ověřte, že platí A = TJT^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 17 & 10 & -9 \\ 39 & 21 & -16 \end{bmatrix}$$

$$A: \quad A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$
$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-10 & -5 & 3 \\ -17 & \lambda-10 & 9 \\ -39 & -21 & \lambda+16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-10 & -5 & 3 \\ -17 & \lambda-10 & 9 \\ -39 & -21 & \lambda+16 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{matrix} \lambda-10 & -5 & 3 \\ -17 & \lambda-10 & 9 \end{matrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda-10)(\lambda-10)(\lambda+16) + (-17)(-21)\cdot 3 + (-39)(-5)\cdot 9 - (-39)(\lambda-10)\cdot 3 -$$
$$(\lambda-10)(-21)\cdot 9 - (-17)(-5)(\lambda+16) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 220\lambda + 1600 + 2826 + 117\lambda - 1170 +$$
$$189\lambda - 1890 - 85\lambda - 1360 = \lambda^3 - 4\lambda^2 + x + 6 = 0$$

	1	-4	1	6
1		-1	-5	-6
	1	-5	6	0
1		2	-6	
	1	-3	0	
2		3		
	1	0		

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

vlastní čísla: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

$\lambda_1 = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -11 & -5 & 3 & 0 \\ -17 & -11 & 9 & 0 \\ -39 & -21 & 15 & 0 \end{array}\right] /:(-11) \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} & 0 \\ -17 & -11 & 9 & 0 \\ -39 & -21 & 15 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +17I \\ +39I \end{array} \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} & 0 \\ 0 & -\frac{36}{11} & \frac{48}{11} & 0 \\ 0 & -\frac{36}{11} & \frac{48}{11} & 0 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 11 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$u_1 = [-1, 4, 3]^T$

$\lambda_2 = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & -5 & 3 & 0 \\ -17 & -8 & 9 & 0 \\ -39 & -21 & 18 & 0 \end{array}\right] /:(-8) \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ -17 & -8 & 9 & 0 \\ -39 & -21 & 18 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +17I \\ +39I \end{array} \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{21}{8} & \frac{21}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{27}{8} & \frac{27}{8} & 0 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$u_2 = [1, -1, 1]^T$

$\lambda_3 = 3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7 & -5 & 3 & 0 \\ -17 & -7 & 9 & 0 \\ -39 & -21 & 19 & 0 \end{array}\right] /:(-7) \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ -17 & -7 & 9 & 0 \\ -39 & -21 & 19 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +17I \\ +39I \end{array} \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{36}{7} & \frac{12}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{48}{7} & \frac{16}{7} & 0 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$u_3 = [2, -1, 3]^T$

Vlastní vektory: $u_1 = [-1, 4, 3]^T$
$u_2 = [1, -1, 1]^T$
$u_3 = [2, -1, 3]^T$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ověření platnosti $A = TJT^{-1}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -15 & -9 & 7 \\ 7 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \ TJ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -4 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$TJT^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 17 & 10 & -9 \\ 39 & 21 & -16 \end{bmatrix} = A$$

Cvičení 8

Příklad 23a)

Určete ortogonální bázi $v_1, v_2, \ldots$ prostoru V při skalárním násobení (u, v).

$$V = \mathbb{R}_3, (u, v) = u^T v$$

$$v_1 = [1,0,0]^T$$
$$v_2 = [0,1,0]^T$$
$$v_3 = [0,0,1]^T$$

$$u_1 = v_1 = [1,0,0]^T$$

$$u_2 = v_2 + \alpha u_1$$

$$\alpha = -\frac{(v_2, u_1)}{(u_1, u_1)} = -\frac{0}{1} = 0$$
$$(v_1, u_1) = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$(u_1, u_1) = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$u_2 = v_2 = [0,1,0]^T$$

$$u_3 = v_3 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$$

$$\beta_1 = -\frac{(u_1, v_3)}{(u_1, u_1)} \qquad \beta_2 = -\frac{(u_2, v_3)}{(u_2, u_2)}$$
$$(u_1, v_3) = 0 + 0 + 0 = 0 \qquad \Rightarrow \beta_1 = 0$$
$$(u_2, v_3) = 0 + 0 + 0 = 0 \qquad \Rightarrow \beta_2 = 0$$

$u_3 = v_3 = [0,0,1]^T$

$v_1 = [1,0,0]^T$

$v_2 = [0,1,0]^T$

$v_3 = [0,0,1]^T$

Příklad 25a)

Určete ortogonální průmět v_0 prvku v do podprostoru L_1 prostoru L při skalárním násobení (u, v)
$L = \mathbb{R}_3$
L_1 je generován prvky $u_1 = [1,2,-3]^T, u_2 = [0,1,3]^T, v = [4,5,7]^T, (u,v) = u^T v$

$v_0 = a \cdot u_1 + b \cdot u_2$

$$a(u_1,u_1) + b(u_1,u_2) = (v,u_1)$$
$$a(u_2,u_1) + b(u_2,u_2) = (v,u_2)$$

$$(u_1,u_1) = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-3)\cdot(-3) = 1+4+9 = 14$$
$$(u_1,u_2) = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + (-3)\cdot 3 = 2-9 = -7$$
$$(u_2,u_2) = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 3\cdot 3 = 1+9 = 10$$
$$(v,u_1) = 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot(-3) = 4+10-21 = -7$$
$$(v,u_2) = 4\cdot 0 + 5\cdot 1 + 7\cdot 3 = 5+21 = 26$$

$$14a - 7b = -7$$
$$-7a + 10b = 26$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & -7 & -7 \\ -7 & 10 & 26 \end{array}\right] /\cdot 2 \simeq \left[\begin{array}{cc|c} 14 & -7 & -7 \\ -14 & 20 & 52 \end{array}\right] +I \simeq \left[\begin{array}{cc|c} 14 & -7 & -7 \\ 0 & 13 & 45 \end{array}\right] /:7 \simeq \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 13 & 45 \end{array}\right]$$

$a = \frac{16}{13}$ $b = \frac{45}{13}$

$$v_0 = \frac{16}{13}\cdot[1,2,-3]^T + \frac{45}{13}\cdot[0,1,3] = \left[\frac{16}{13},\frac{77}{13},\frac{87}{13}\right]^T$$

$$v_0 = \frac{1}{13}[16,77,87]^T$$

Příklad 26a)

Metodou nejmenších čtverců určete funkci f(x), která nejlépe aproximuje naměřené hodnoty. Funkce f(x) bude polynom stupně 2

x	−2	−1	0	1	2	3
y(x)	−10,7	−6,7	−2,6	−2	−2,9	−6,1

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$\begin{bmatrix}4\\1\\0\\1\\4\\9\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\2\\3\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$a(x_1,x_1)+b(x_1,x_2)+c(x_1,x_3)=(x_1,y)$$
$$a(x_2,x_1)+b(x_2,x_2)+c(x_2,x_3)=(x_2,y)$$
$$a(x_3,x_1)+b(x_3,x_2)+c(x_3,x_3)=(x_3,y)$$

$$(x_1,x_1)=115\qquad(x_1,x_2)=27\qquad(x_1,x_3)=19$$
$$(x_2,x_3)=3\qquad(x_2,x_2)=19\qquad(x_3,x_3)=6$$
$$(x_1,y)=118\qquad(x_2,y)=2\qquad(x_3,y)=-31$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}115&27&19&-118\\27&19&3&2\\19&3&6&-31\end{array}\right]\quad\Rightarrow\begin{array}{l}a=-1\\b=2\\c=-3\end{array}\qquad f(x)=-x^2+2x-3$$

Cvičení 9

Příklad 28b)

Napište kvadratickou formu $\kappa(x)$, je=li ve standardní bázi určena matici A

$$A=\begin{bmatrix}7&0&-2\\0&5&-2\\-2&-2&6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}7x_1&0x_2&-2x_3\\0x_1&5x_2&-2x_3\\-2x_1&-2x_2&6x_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=7x_1-2x_1x_3+5x_2^2-2x_2x_3-2x_1x_3-2x_2x_3+6x_3^2=$$
$$=7x_1^2+5x_2^2+6x_3^2-4x_1x_3-4x_2x_3$$

$\kappa(x) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$

Příklad 29b)

Je dána kvadratická forma $\kappa(x)$. Určete matici A kvadratické formy $\kappa(x)$ ve standardní bázi

$\kappa(x) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Příklad 30b)

Je dána kvadratická forma $\kappa(x)$. Určete inercii $in(\kappa)$ a definitnost kvadratické formy $\kappa(x)$

$\kappa(x) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-7 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-5 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = 0$$

$(\lambda-7)(\lambda-5)(\lambda-6)+(0\cdot2\cdot2)+(2\cdot0\cdot2)-2\cdot(\lambda-5)\cdot2-(\lambda-7)\cdot2\cdot2-0\cdot(\lambda-6)=0$

$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 99\lambda - 162 = (\lambda-9)(\lambda-6)(\lambda-3) = 0$

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 6 \qquad \lambda_3 = 9$

všechna vlastní čísla > 0

$in(\kappa) = (3,0,0)$

$\kappa(x)$ je pozitivně definitní