F3

Relativní pohyb
Oddíl 1

Složitějším druhem pohybu hmotného bodu M je pohyb posuvný a kruhový konaný současně, který můžeme nazvat pohyb složený nebo kombinovaný. Pokud je to pohyb v rovině, je obecně jednodušší než pohyby v prostoru. O relativním pohybu mluvíme proto, že sám pohyb se jeví různě v různých soustavách souřadných, zejména tehdy, pohybuje-li se pohyblivá soustava pohybem posuvným a současně pohybem rotačním kolem daného bodu.

Mějme vodorovnou rovinnou desku otočnou kolem osy jdoucí kolmo na ni, průsečík osy a desky zvolíme za počátek pevné i rotující soustavy 1 a 2. Budeme předpokládat, že otočná soustava 2 se otáčí kolem osy konstantní úhlovou rychlostí **ω.** Na desce je zakreslen jeden její poloměr r a po tomto poloměru jede malý model automobilu konstantní rychlostí $\mathbf{v}_0$. Tuto konstantní rychlost zajišťuje bateriový elektromotorek. Rozměry desky nechť jsou velké v porovnání s modelem, takže model lze považovat za hmotný bod M.

Určíme: parametrické rovnice dráhy modelu M, velikost rychlosti M a jeho celkové, tečné a normálové zrychlení.

Řešení. Velikost úhlové rychlosti otáčení desky jsme již označili ω, rychlost pohybu bodu M (modelu) vzhledem k desce jsme označili v_0. Je-li okamžitá vzdálenost M od osy r, pak její souřadnice v pevné soustavě jsou: $x = r.\cos \omega t$, $y = r.\sin \omega t$. Kromě toho zřejmě dráha ujetá bodem M za čas t je $r = v_0 t$. Tak dostáváme parametrické rovnice dráhy bodu M v pevné soustavě 1 ve tvaru $x = v_0\, t \cos \omega t$, $y = v_0\, t \sin \omega t$, kde parametrem (jedinou nezávisle proměnnou) je čas t.

Složky rychlosti dostaneme podle definice derivováním: Derivujeme součin funkcí a funkci složenou:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\omega t - v_0 t\, \omega \sin \omega t \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\omega\, t + v_0 t\, \omega \cos\omega t\ .$$

Velikost rychlosti dostaneme z Pythagorovy věty:

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; $v_x^2 = (v_0 \cos \omega t - v_0\, t\, \omega \sin (\omega\, t))^2 =$

$= v_0^2 \cos^2(\omega\, t) - 2v_0^2 (t\, \omega) \cos(\omega\, t) \sin(\omega\, t) + v_0^2 (t\, \omega)^2 \sin^2(\omega\, t)$,

$v_y^2 = (v_0^2 \sin^2(\omega\, t) + 2v_0^2 (\omega\, t) \sin(\omega\, t) \cos(\omega\, t) + v_0^2(\omega\, t)^2 \cos^2(\omega\, t) \Rightarrow$

$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = [\, v_0^2 (\cos^2(\omega\, t) + \sin^2(\omega\, t)) + v_0^2 (t\, \omega)^2 (\sin^2(\omega\, t) + \cos^2(\omega\, t))]^{1/2} =$

$= [v_0^2 + v_0^2 (\omega\, t)^2\,]^{1/2} = [v_0^2 (1 + (\omega\, t)^2)]^{1/2} \Rightarrow \boxed{v = v_0\sqrt{1 + (\omega\, t)^2} \quad (1{,}1)}$.

Derivací rychlosti spočteme zrychlení (vzhledem k pevné soustavě 1):

$a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -2v_0\omega\sin\omega t - v_0 t\omega^2\cos\omega t$ $\quad a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 2v_0\omega\cos\omega t - v_0 t\omega^2\sin\omega t$ Velikost zrychlení je podle Pythagorovy věty: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ a výpočtem obdobným jako u rychlosti dostaneme $\boxed{a = v_0\, \omega\sqrt{4 + (\omega\, t)^2} \quad (1{,}2)}$.

Tečné zrychlení určíme podle definice, tj. jako derivaci rychlosti podle času $a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{v_0 t\,\omega^2}{\sqrt{1 + (\omega\, t)^2}}$ a podobně určíme podle Pythagora i normálové zrychlení

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{v_0\omega[2 + (\omega\, t)^2]}{\sqrt{1 + (\omega\, t)^2}}.$$ ♣♣♣

Souřadné soustavy
Oddíl 2

Newton předpokládal, že existuje tzv. absolutní čas a absolutní prostor. Oba tyto pojmy později Einstein zpochybnil a ukázal, že vlastnosti prostoru i času jsou funkcemi rozložení hmot, ale tím se zde nebudeme zabývat. Zastavíme se u pojmu prostor. Polohu objektu popisujeme pomocí souřadnic. Souřadnice jsou dány v nějaké souřadné soustavě. Nejužívanější soustavou je soustava pravoúhlých souřadnic, často se také používá soustava polární a to v rovině nebo v prostoru, v závislosti na zkoumaném jevu. Mezi všemi soustavami zaujímají zvláště důležité postavení soustavy *inerciální*, tj. takové, které se v domnělém absolutním prostoru pohybují pohybem rovnoměrným přímočarým nebo jsou v klidu. I když je pojem absolutního prostoru od dob Einsteinových opuštěn, v technické praxi s ním můžeme pracovat, teprve v astronomii při pozorování vzdálených kosmických objektů musíme absolutní prostor opustit a postupovat podle Einsteina.

Při pozorování jevů na Zemi a v jejím bližším kosmickém okolí vystačíme s inerciální souřadnou soustavou, kde se volí počátek ve středu Slunce (přesněji - v těžišti planetární soustavy) a osy se vedou ke vzdáleným stálicím. Při mnoha jevech se vystačí se soustavou umístěnou na povrchu země, často, podle povahy zkoumaného jevu, se vystačí se soustavou umístěnou v laboratoři nebo i s menší.

Soustava inerciální má jednu významnou vlastnost. Ta spočívá v tom, že z hlediska sil, jimiž na sebe navzájem působí reálná tělesa, všechny soustavy, které se vůči inerciální soustavě pohybují rovnoměrně přímočaře, jsou ekvivalentní. To znamená, že jsme-li v jedné takové soustavě, nemůžeme žádným pokusem rozeznat, pohybuje-li se naše soustava nebo jiná inerciální soustava. Jsme-li ve vlaku na nádraží, nelze rozhodnout, zda jede vlak na sousední koleji, nebo náš vlak, pokud jeden nebo oba stojí nebo pokud oba jedou rovnoměrným přímočarým pohybem.

Význačnou roli hrají při posuzování souřadných soustav *síly*, které Newton považoval za vůbec základní fyzikální veličiny. Síly, jimiž na sebe působí reálná tělesa, označuje klasická (tj. nikoli Einsteinova) mechanika jako **skutečné**, (fyzikálně existující) neboli **pravé** a intuitivně jim přisuzuje vlastnost absolutnosti, tzn. ať je posuzujeme z kterékoli vztažné soustavy, (na Zemi, na Slunci), vždy lze jejich existenci prokázat: z toho usuzujeme, že by se pozorovaly i v (neexistujícím) absolutním prostoru. Naproti tomu **setrvačné síly**, jež se objevují přechodem od inerciální vztažné soustavy k soustavě, pohybující se se zrychlením, nemají původ v reálných tělesech, liší se od skutečných sil také tím, že je pozorujeme jen někde, a to na tělesech, která se pohybují zrychleně. Proto je v klasické mechanice nazýváme *zdánlivými* nebo *fiktivními silami*, které je potřeba jen formálně připojit ke skutečným silám, aby i pro relativní zrychlení pozorované v zrychleně se pohybující soustavě platil 2. Newtonův pohybový zákon, že součin hmotnosti a zrychlení v této soustavě je roven působící síle.

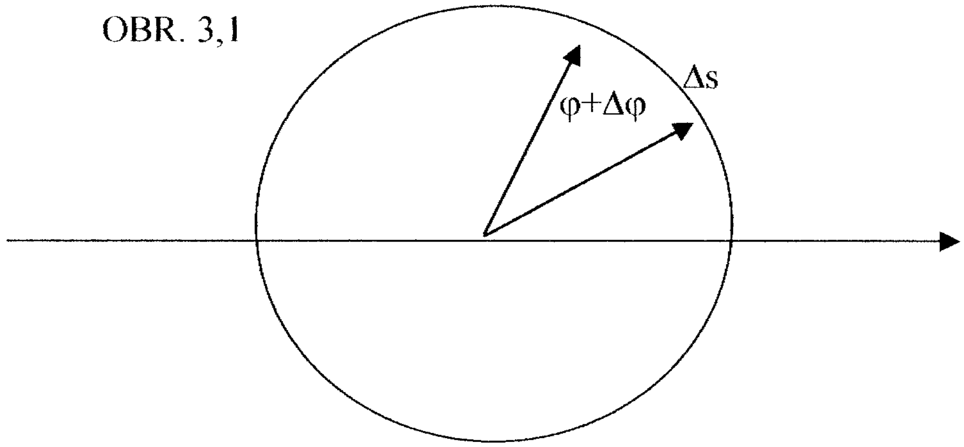
Pro objasnění vyšetřme jeden jednoduchý případ. Mějme těleso hmotnosti m, které se může na podlaze vozu pohybovat bez tření. Dá-li se vůz, hnaný nějakým zařízením, do pohybu se zrychlením **a**, zůstává těleso vzhledem k Zemi v klidu, neboť na ně nepůsobí žádná skutečná výsledná nenulová síla. Vzhledem k vozu se však těleso pohybuje se zrychlením $-\mathbf{a}_u$, jako by na ně ve voze působila zdánlivá síla $\mathbf{F}^* = -m\mathbf{a}$. Spojíme-li těleso s vozem nějakou vazbou, např. pružinou, pružina se natáhne na určitou délku a těleso bude unášeno vozem, takže se vzhledem k Zemi pohybuje se stejným zrychlením jako vůz. Z hlediska pozorovatele na Zemi pohybuje se těleso proto, že na ně vazba působí skutečnou silou **F** a těleso napíná vazbu rovněž skutečnou silou **-F** stejně velkou, avšak opačného směru.

Vzhledem k vozu je těleso po napnutí pružiny v klidu. Pozorovatel ve voze však zjišťuje, že pružina je napnuta,a že tedy na těleso pružina působí silou **F**, úměrnou její deformaci. Protože však je těleso vzhledem k vozu v klidu, usoudí, že na těleso působí ještě jedna síla, a to síla **F***, stejně velká jako **F**, avšak opačného směru, která se silou pružiny **F** právě ruší. Protože žádná skutečná síla **F*** na těleso nepůsobí, je zřejmé, že je to síla zdánlivá, kterou je nutno v soustavě vozu připojit ke skutečným silám působícím na těleso, aby pohybová rovnice $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ platila v soustavě spojené s vozem, který se pohybuje zrychleně.

Pohyb v otáčivé soustavě – reálné a fiktivní síly
Oddíl 3

Zkoumejme, jak se změní pohybové rovnice, vztahujeme-li pohyb hmotného bodu M k soustavě, která se vzhledem k inerciální soustavě otáčí. Zkoumejme nejprve podrobněji výraz pro obvodovou rychlost $\mathbf{v} = [\varpi \times \mathbf{r}]$ u kruhového pohybu bodu M. Na obr. 3,1 je zakreslena poloha M v čase t a v čase o Δt později. V čase t svírá poloměr **r** s osou X

OBR. 3,1

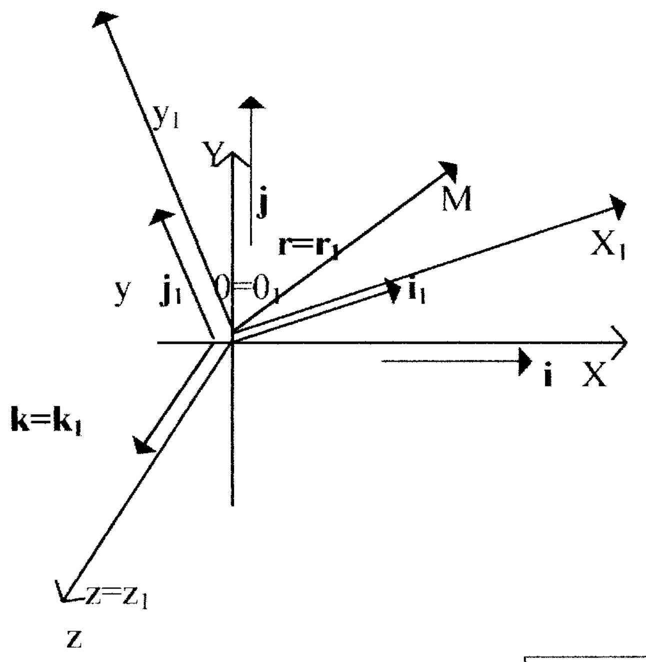


úhel φ, v čase t+Δt svírá úhel φ + Δφ. Pro délku oblouku Δs celé kružnice platí $\Delta s = \Delta\varphi\, r$, vydělíme tento výraz malým intervalem času Δt a máme $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi . r}{\Delta t}$. Je potřeba si uvědomit, že vzdálenost r je během této operace pevná, jinými slovy, Δr je nula. Člen na levé straně rovnice je délka lomeno časem, tedy rychlost. Na pravé straně dostáváme vzhledem k tomu, že r je konstantní, výraz $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.r$. Avšak úhel opsaný za interval času je podle definice úhlová rychlost, kterou jsme již dříve označili ω. Tu definujeme obecně tak, že přejdeme od diferencí k diferenciálům: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Tak dostáváme výraz pro velikost obvodové rychlosti v = ωr. Nyní je potřeba dát této rychlosti směr. Proto připomeneme, že vektory ϖ a φ mají směr kolmice vztyčené ve středu kružnice a **r** má směr orientovaného poloměru, jak jsme uvedli v oddílu o kruhovém pohybu. Vektoru **v** dáme směr kolmice k rovině určené vektory ϖ v čase t + dt a **r** také v čase t + dt a určené dále pravidlem pravotočivého šroubu. Tak dostáváme konečně **v** = [ϖ x **r**], protože $\lim_{dt\to 0} d\omega = \lim_{dt\to 0} dr = 0$.

Na obr. 3,2 je soustava 0_1, x_1, y_1, z_1, která má s inerciální soustavou 0, x, y, z společný počátek 0 a osu z, kolem níž se vzhledem k 0, x, y, osa z otáčí úhlovou rychlostí **ω.** Zde je užitečné si uvědomit, že průvodiče **r** a $\mathbf{r}_1$ mají společný počátek 0 = 0_1 i koncový bod M, takže splývají. Přesto však je nutno např. při derivování rozlišovat zvlášť derivování podle **r** od derivování podle $\mathbf{r}_1$. My se však takovému derivování vyhneme.

Při našem vzájemném uspořádání obou soustav souřadných je okamžitá poloha bodu M v obou z nich tedy určena průvodičem stejné velikosti **r**, jehož složky vzhledem k oběma soustavám jsou ovšem různé a osy a jednotkové vektory jsme označili také různě $\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r}_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \quad (3,1)}$ (v otáčivé soustavě má vše index $_1$). Přitom jednotkové vektory **i , j, k** jsou stálé, pevné, protože se vztahují k inerciální soustavě, kdežto jednotkové vektory $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$ a $\mathbf{k}_1$ mění s časem svůj směr. Rychlost **v** bodu

M v pevné soustavě 0, x, y, z je vektorovým součtem rychlosti $\mathbf{v}_1$ bodu M v otáčivé soustavě a rychlosti $\mathbf{u}$ otáčivé soustavy vzhledem k pevné soustavě $\boxed{\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{u} \quad (3{,}2)}$. Odtud můžeme vyjádřit $\mathbf{v}_1$ v otáčející se soustavě jako $\boxed{\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{u} = \vec{v} - [\vec{\omega} x \vec{r}] \quad (3{,}3)}$. Tuto



obr. 3,2

rovnici můžeme samozřejmě přepsat na tvar $\boxed{\dfrac{d\vec{r}_1}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} - [\vec{\omega} x \vec{r}] \quad (3{,}4)}$. Jde o derivaci jednoho a téhož průvodiče (počáteční a koncový bod je tentýž, jak již bylo řečeno). Poněvadž ale relativní rychlost $\mathbf{v}_1$ není stejná jako absolutní rychlost $\mathbf{v}$, musí se i derivace podle polohy navzájem lišit a to o člen $[\vec{\omega} x \vec{r}]$, který vyjadřuje změnu směru průvodiče $\mathbf{r}$ v rotující soustavě následkem její rotace. Protože si můžeme každý vektor představit jako průvodič jeho koncového bodu, platí výsledek (3,4) zcela obecně pro jakýkoli vektor $\mathbf{A}$ a rozlišujeme pak jeho *relativní derivaci* vzhledem k rotující soustavě, označené indexem, tedy $\dfrac{d\vec{A}_1}{dt}$, od jeho *absolutní derivace* $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ vzhledem k inerciální (klidné) soustavě souřadnic, přičemž $\dfrac{d\vec{A}_1}{dt} = \dfrac{d\vec{A}}{dt} - [\vec{\omega} x \vec{A}]$. Musíme si stále uvědomovat, že rychlost změny vektoru $\mathbf{A}_1$ (tj. derivace $\dfrac{dA_1'}{dt}$ je složena z rychlosti změny vektoru $\mathbf{A}$ a z pootočení otočné soustavy. Protože koncový bod libovolného vektoru můžeme označit a pokládat za bod M, platí poslední rovnice pro každý vektor, nejen pro vektor, který jsme označili $\mathbf{r}$.

Zrychlení $\mathbf{a}_1$ bodu M v rotující soustavě, které je zřejmě určeno relativní derivací podle času relativní rychlosti $\mathbf{v}_1$ bodu M vzhledem k této soustavě, dostaneme ihned, nahradíme-li v tomto předpisu pro tuto derivaci vektor **A** vektorem $\mathbf{v}_1$, tedy pro zrychlení $\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} - [\vec{\omega}\ x\ \vec{v}_1] = \frac{d}{dt}(\vec{v} - [\vec{\omega}\ x\ \vec{r}]) - [\vec{\omega}\ x\ \vec{v}_1] =$

$$= \frac{d\vec{v}}{dt} - \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} x\ \vec{r}\right] - \left[\vec{\omega}\ x \frac{d\vec{r}}{dt}\right] - [\vec{\omega}\ x\ \vec{v}_1] = \frac{d\vec{v}}{dt} - \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\ x\ \vec{r}\right] - [\ \vec{\omega}\ x\ \vec{v}] - [\vec{\omega}\ x\ \vec{v}_1] =$$

(zde jsme využili vztahu $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ a $\vec{v} = \vec{v}_1 - [\vec{\omega}\ x\ \vec{r}]$)

$$= \frac{d\vec{v}}{dt} - \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} x\vec{r}\right] - [\vec{\omega} x(\vec{v}_1 + [\vec{\omega} x\vec{r}]] - [\vec{\omega} x\vec{v}_1] \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}}{dt} - \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\ x\ \vec{r}\right] - [\omega\ x\ \vec{v}_1] - [\vec{\omega}\ x\ [\vec{\omega}\ x\ \vec{r}]] - [\vec{\omega}\ x\ \vec{v}_1] \quad (3{,}5)}.$$

K řešení posledního výrazu aplikujeme vztah z vektorové analýzy:

[**A** x [**B** x **C**]]= **B**(**A.C**)-**C**(**A.B**), kde v hranatých závorkách jsou součiny vektorové a v kulatých součiny skalární. U nás **A** = ω, **B** = ω, **C** = **r**. tak dostáváme

[ω x [ω x **r**]] - ω(ω.**r**) –**r**(ω.ω) = ωωr cos(ω,**r**) – rωω cos(ω,ω). Úhel mezi ω a **r** je 90° a proto první člen je nula, úhel mezi ω a ω je 0° a tak celý výraz je –**r**ω^2.

Pro sílu $\mathbf{F}_1$, která na bod M působí v otáčivé soustavě, dostáváme tak z rovnice (3,5)

$$\boxed{\vec{F}_1 = m\vec{a}_1 = m\frac{d\vec{v}}{dt} - m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} x\vec{r}\right] - m[\vec{\omega} x[\vec{\omega} x\vec{r}]] - 2m[\vec{\omega}\ x\vec{v}_1] \quad (3{,}6)}.$$

Vidíme, že ke skutečné síle $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$, kterou na M působí jiná reálná tělesa, přistupují v otáčivé soustavě další tři formální síly, jež jsou silami zdánlivými, neboť pouhou relativní derivací, tedy početní operací, nemohou (podle klasického hlediska) vzniknout skutečné síly, podmíněné existencí reálných těles.

První z těchto sil, $\boxed{\vec{F}^* = -m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} x\vec{r}\right] \quad (3{,}7)}$ je **zdánlivá setrvačná síla,** zvaná někdy **síla Eulerova** (Ojlerova), která existuje jen tehdy, když je úhlová rychlost v čase proměnná, tj když ω je proměnné, tedy když mění svoji velikost nebo směr, při ω konst tato síla vymizí.

Další zdánlivá síla **F***= -m[ω x [ω x **r**]] = -m ω^2r působí na M při jakékoli rotaci a zvláštní jméno nemá.

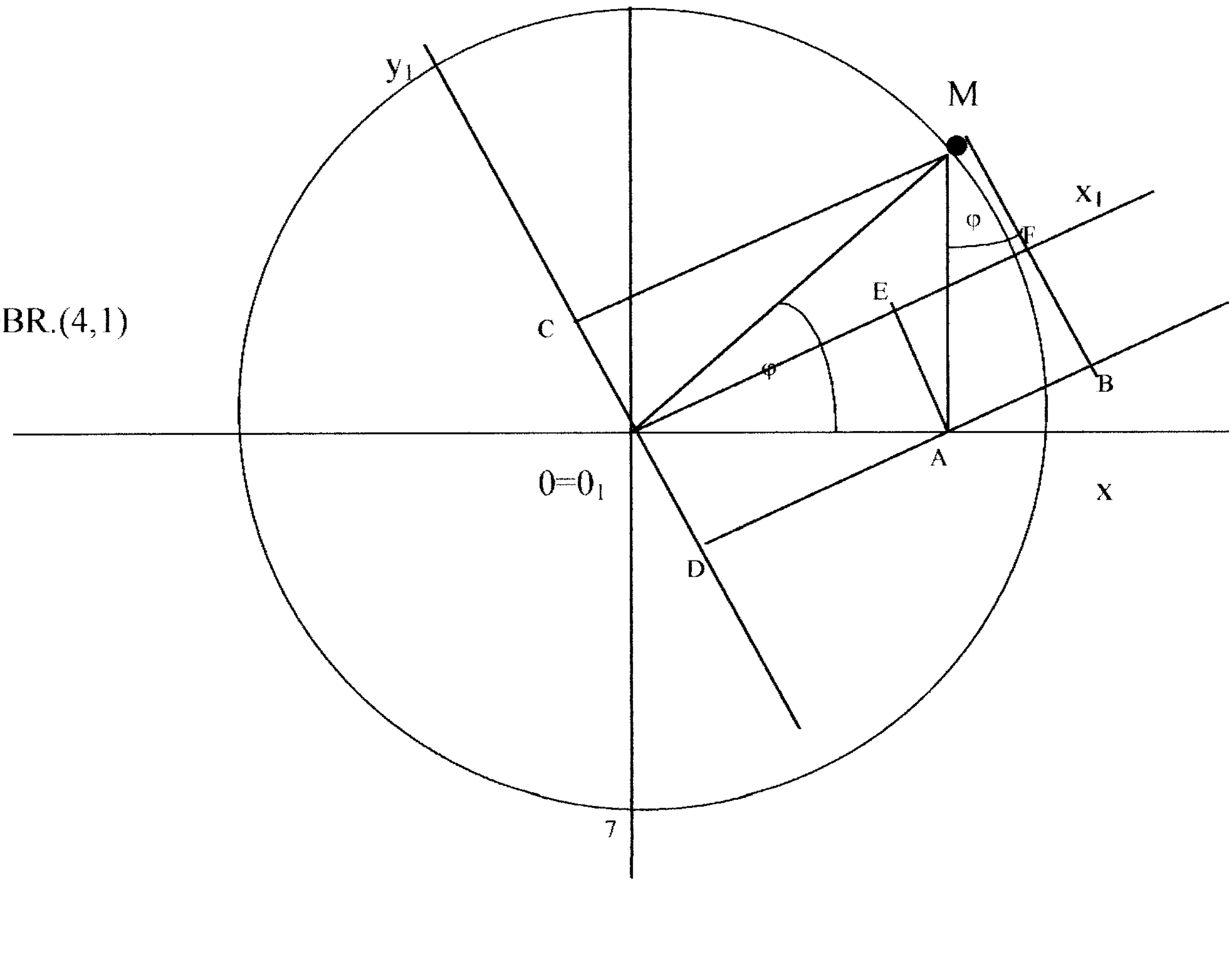
Poslední zdánlivá síla **F***$_C$ = 2m[$\mathbf{v}_1$ x ω] (3,8) se nazývá **síla Coriolisova** (Koriolisova) (na počest francouzského matematika 1795 – 1843), který ji objevil a prozkoumal. Protože Země představuje otáčející se soustavu, projevuje se vliv Coriolisovy síly na některé pohyby těles na povrchu Země. Tak např. dochází ke stáčení roviny kyvu matematického kyvadla. U tohoto jevu se poněkud zastavme. Předpokládejme, že matematické kyvadlo koná kmity na severním pólu. V takovém případě je rychlost $\mathbf{v}_1$ bodu M kyvadla v každém okamžiku kolmá na osu otáčení Země a tedy $\mathbf{v}_1 \perp \omega$, kde ω je vektor úhlové rychlosti otáčivého pohybu Země a $\mathbf{v}_1$ je okamžitá rychlost kyvadla. Na bod M kyvadla působí Coriolisova síla o velikosti $F_C = 2mv_1\omega$ ležící ve vodorovné rovině a mířící doprava vzhledem k vektoru $\mathbf{v}_1$ (m je hmotnost kyvadla). Účinkem této síly se M při každém kyvu odkloní doprava. Výsledek bude ten, že rovina kmitů kyvadla se bude otáčet vzhledem k Zemi ve směru chodu hodinových ručiček a otočí se za 24 hodin o úhel 2π. Kdyby kyvadlo kývalo v místě o zeměpisné šířce φ, stočila by se rovina kmitů za 24 hodin o úhel $2\pi \sin \varphi$. Pozorování stáčení roviny kmitů kyvadla provedl po prvé r.1851 Foucault (Fukolt) a dokázal tak přímo, že Země se otáčí s periodou 24 hodin.

Výpočet zdánlivých sil derivacemi
Oddíl 4

Ukážeme ještě jednu metodu výpočtu z předešlého oddílu a to metodu, která nevychází bezprostředně ze vztahu (3,3), ale vychází z transformace souřadnic. Mějme tedy rovinu, v ní osy x a y, z a další dvojici os x_1 a y_1, z_1 která se kolem společné osy $z = z_1$ jdoucí společným počátkem $0 = 0_1$ otáčí. O úhlové rychlosti otáčení nepředpokládáme nic určitého, zajímáme se jen o transformaci souřadnic bodu X mezi vyjádřením v soustavě neindexované (klidné, nepohyblivé) a indexované (rotující). Nejprve dokážeme, že mezi oběma soustavami při otočení o úhel φ platí vztahy

$\boxed{x_1 = x.\cos\varphi + y.\sin\varphi, \quad y_1 = -x.\sin\varphi + y.\cos\varphi \quad (4,1)}$, viz obr.(4,1).

OBR.(4,1)



Souřadnice bodu M jsou x, y, tedy 0A a AM. Indexované souřadnice jsou x_1 = 0E + EF tj. DA + AB tj. $x_1 = x.\cos\varphi + y.\sin\varphi$ a y_1 = MF tj. CD –0D = CD - EA = tj. $y_1 = y.\cos\varphi - x.\sin\varphi$. Tím jsou vzorce (4,1) dokázány.
Derivováním dostaneme vzorce pro složky rychlosti v otáčivé soustavě:

$$v_{x_1} = \frac{dx}{dt}\cos\varphi + x.\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dy}{dt}.\sin\varphi + y\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} = v_x\cos\varphi - x.\sin\varphi.\frac{d\varphi}{dt} + v_y\sin\varphi + y\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} =$$
$$= v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi + \frac{d\varphi}{dt}(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) = v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi + y_1\frac{d\varphi}{dt} \qquad (4,2)$$

$$v_{y_1} = -\frac{dx}{dt}\sin\varphi - x.\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dy}{dt}.\cos\varphi + y\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} = -v_x\sin\varphi - x.\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} +$$
$$+ v_y\cos\varphi - y\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} = -v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi - \frac{d\varphi}{dt}(x\cos\varphi + y\sin\varphi) = -v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi - x_1.\frac{d\varphi}{dt} \qquad (4,3)$$

Dalším derivováním dostaneme vzorce pro zrychlení:

$$a_{x_1} = \frac{dv_x}{dt}\cos\varphi + v_x\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dv_y}{dt}\sin\varphi + v_y\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + y_1\frac{d^2\varphi}{dt^2} =$$
$$= a_x\cos\varphi - v_x\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + a_y\sin\varphi - v_y\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + v_y\frac{d\varphi}{dt} + y_1\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \quad ,$$
$$= a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi + \frac{d\varphi}{dt}(-v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi) + v_y\frac{d\varphi}{dt} + y_1\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Podle (4,3) je $-v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi = v_{y_1} + x_1\frac{d\varphi}{dt}$, což dosadíme do kulaté závorky a máme

$$a_{x_1} = a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi + \frac{d\varphi}{dt}(v_{y_1} + x_1\frac{d\varphi}{dt}) + v_y\frac{d\varphi}{dt} + y_1\frac{d^2\varphi}{dt^2} =$$
$$= a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi + v_{y_1}\frac{d\varphi}{dt} + x_1(\frac{d\varphi}{dt})^2 + v_{y_1}\frac{d\varphi}{dt} + y_1\frac{d^2\varphi}{dt^2} \Rightarrow$$

po přerovnání $\boxed{a_{x_1} = a_x\cos\varphi + a_y\sin\varphi + y_1\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2v_{y_1}\frac{d\varphi}{dt} + x_1\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad (4,4)}$.

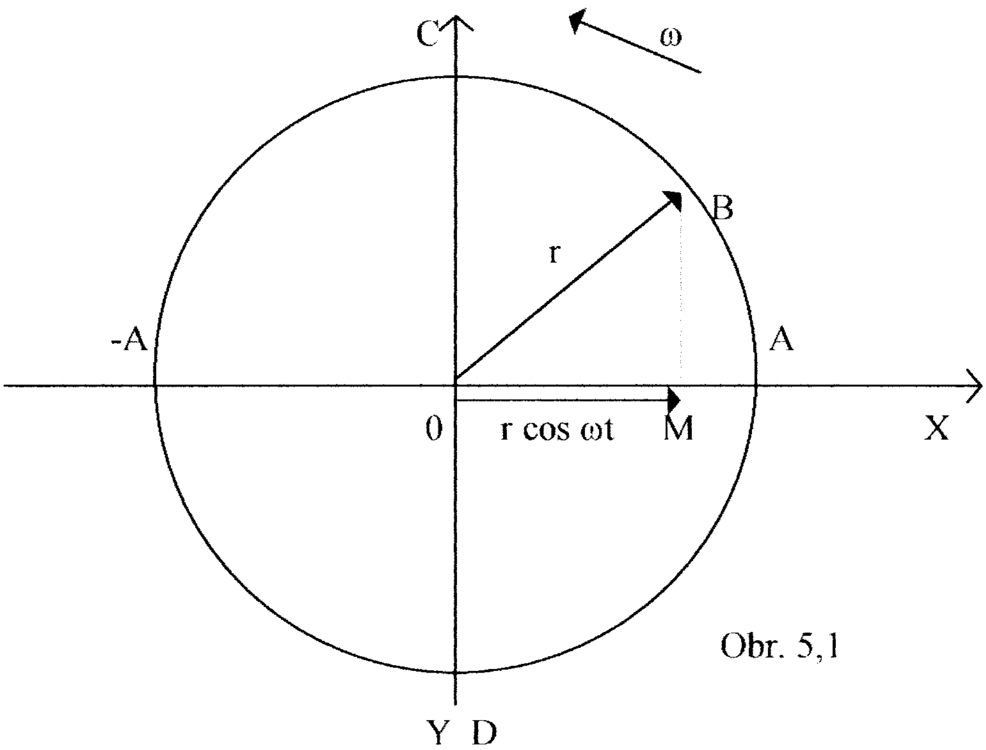
Obdobně dostaneme $\boxed{a_{y_1} = -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi - x_1\frac{d^2\varphi}{dt^2} - 2v_{x_1}\frac{d\varphi}{dt} + y_1\left(\frac{d\varphi}{dt^2}\right)^2 \quad (4,5)}$

Vynásobením hmotností m dostáváme z těchto vzorců výrazy pro síly. První dva členy ve (4,4) a (4,5) pak představují přetransformovanou tzv. pravou sílu, kterou působí na naše těleso nějaká reálná síla, např. síla gravitační. Další členy představují síly fiktivní, zdánlivé, vzniklé pouze pohybem souřadné soustavy. Jsou to po řadě síla Eulerova, Coriolisova a odstředivá setrvačná síla, s nimiž jsme se setkali v oddílu 3. Proveďme stručnou diskusi. Příkladem budiž Země obíhající kolem Slunce. Při odvozování pohybové rovnice vyskytuje se často tato mylná úvaha: Podle ní na Zemi působí dvě síly, a sice síla gravitační (od Slunce) a síla odstředivá. Tyto dvě síly jsou prý obě vnější a jsou trvale v rovnováze, stejně velké opačného směru a jejich společným působením vzniká rovnoměrný kruhový pohyb. Předně, kdyby výslednice vnějších sil působících na těleso byla nulová, pohybovalo by se těleso pohybem rovnoměrným přímočarým nikoli kruhovým. Za druhé, napišme pro takový případ pohybovou rovnici, považujíce (mylně) odstředivou sílu za sílu vnější (a to tzv.pravou): $\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_{odstř} = m.dv/dt$. Podle úvahy je ovšem součet na levé straně nulový, takže zrychlení dv/dt je také nulové a ke kruhovému pohybu opět nedochází. Tak znovu podtrhujeme, že výraz na pravé straně pohybové rovnice nesmí již obsahovat síly pravé, pocházející od nějakých těles, ale pouze časovou změnu hybnosti. Může však obsahovat síly fiktivní, zdánlivé, jako je tomu v našem příkladě. Takovou silou je zde zdánlivá síla odstředivá, kterou musíme do pohybové rovnice za časovou změnu hybnosti dosadit, aby pohybovou rovnici vůbec šlo sestavit.

Podotkněme ještě, že výraz $y_1.(d\varphi/dt)^2$ můžeme napsat ve tvaru $r.\omega^2$, což je známý vzorec pro normálovou složku zrychlení při kruhovém pohybu.

Kmity
Oddíl 5

Studium kmitů hmotného bodu M začneme připomenutím kruhového pohybu. Na obr.(5,1) je zakreslena kružnice opisovaná bodem B a je také zakreslen průmět průměru (tj průmět průvodiče) bodu B na osu X. Úhlová rychlost je označena ω.



Obr. 5,1

Je zřejmé, že průmět průvodiče **r** na osu X je dán výrazem $\boxed{x = r\cos(\omega t + \varphi) \quad (5{,}1)}$. V počátku času, tj pro t = 0, je zřejmě x nenulové. My jsme pro jednoduchost zvolili φ = 0. Předpokládáme ω konstantní. Pak se souřadnice x bodu M daná vztahem (5,1) pravidelně prodlužuje a zkracuje. Říkáme, že M koná **harmonický kmitavý pohyb.** Kruhový pohyb nazveme *sdružený kruhový pohyb* a jeho průmět nazveme *sdružený kmitavý pohyb.*

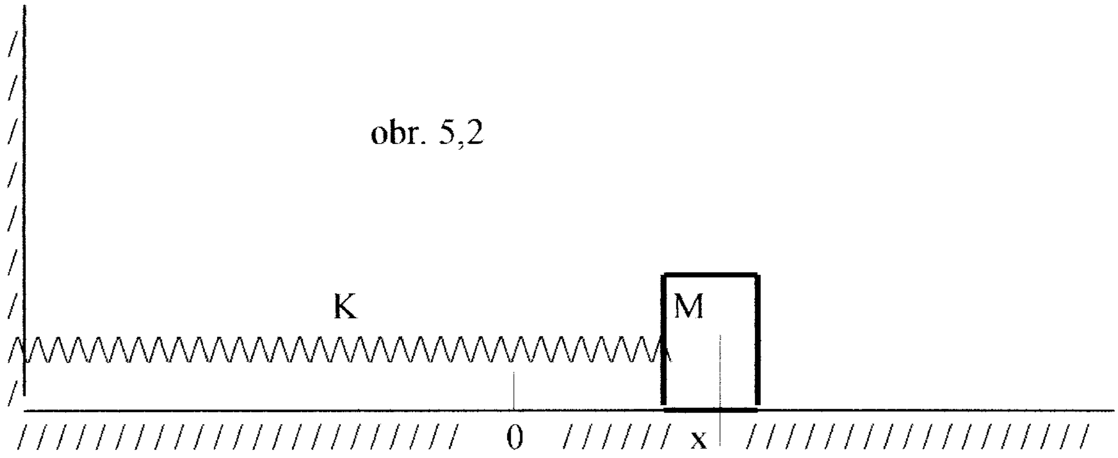
Abychom o tomto pohybu získali další informace, zderivujeme dvakrát vztah (5,1). Domluvíme se hned na tomto místě, že, jak je v literatuře zvykem, derivace podle času budeme značit tečkami nad příslušnou funkcí. Tak z (5,1) dostáváme:

$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} \equiv v = r(-\sin(\omega t)).\omega = -\omega\, r\sin(\omega t)$, což podle definice je prostě rychlost zkracování a prodlužování průmětu. Další derivací dostáváme zrychlení pohybu průmětu $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} \equiv \frac{d}{dt}\dot{x} = \ddot{x} = -\omega\, r\omega\cos(\omega t) = -\omega^2 r\cos(\omega t) = -\omega^2 x \quad (5{,}2)}$. Tak dostáváme konečně

$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (5{,}3)}$. Tuto rovnici nazveme **diferenciální rovnice harmonických kmitů.** Vždy, když během nějakého výpočtu dospějeme k rovnici tvaru (5,3), můžeme si uvědomit, že jde o nějaké harmonické kmity.

Úhlová rychlost ω a *doba kmitu* T spolu těsně souvisejí. Vyjděme z bodu A (amplituda kmitů). V bodě A splývá okamžitá poloha bodu B se svým průmětem M. V bodě C je M v počátku souřadnic 0, v bodě -A spolu polohy bodů B a M opět splývají, a ztotožní se opět v bodě A. To znamená, že jednomu oběhu po kružnici odpovídá jeden kmit. Doba oběhu T se tedy rovná době kmitu. Za dobu T je tedy opsán úhel 2π. Protože za vteřinu opíše bod B úhel ω (podle definice), opíše úhel 2π za dobu ωT, a tak docházíme k důležitému vztahu $\boxed{\omega T = 2\pi \quad (5{,}4)}$. Převrácená hodnota doby T se nazývá *frekvence* f, takže platí $\boxed{f = \frac{1}{T} \quad (5{,}5)}$. Je-li např. doba kmitu T = 0,2, je f = 5.

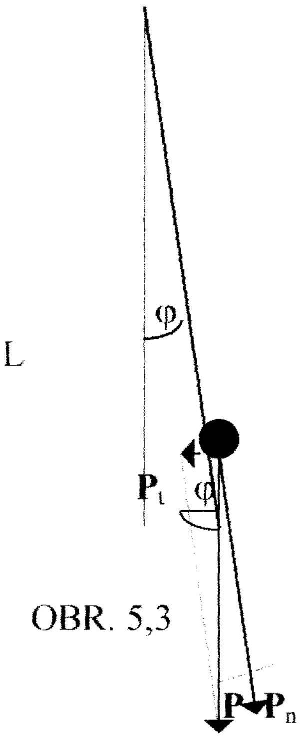
Nyní aplikujeme získané poznatky na zkoumání reálného oscilátoru. Mějme hmotný bod M připevněn na konci pružiny, která je druhým koncem pevně vetknuta, obr.5,2. Bod M leží na dokonale hladké vodorovné podložce, v jejíž rovině se může pohybovat, např. po přímé dráze. Na obrázku značí x okamžitou výchylku z rovnovážné polohy 0,



K značí tzv. *tuhost pružiny.* Tuhost můžeme definovat jako sílu, která protáhne danou pružinu o 1 cm.
Nyní potřebujeme sestavit pohybovou rovnici. Nesčetné pokusy prokázaly, že síla, tj. vnější síla, kterou pružina působí na bod M, je úměrná výchylce x a míří vždy *proti* výchylce, tedy **F** = -K**x**. Proto můžeme pohybovou rovnici oscilátoru napsat ve tvaru $m\ddot{x} = -Kx$. Vydělíme celou rovnici m a dostáváme $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$. Tuhost K a hmotnost m jsou kladná čísla a proto jejich podíl je také kladné číslo. Porovnáme-li poslední rovnici s rovnicí (5,3) harmonických kmitů $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (5,6)}$ vidíme, že jsou stejné, položíme-li $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (5,7)}$. Tak zjišťujeme, že bod M bude konat harmonické kmity a proto jsme jej právem nazvali **oscilátor.** Pro sdruženou úhlovou rychlost a pro dobu kmitu máme $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad (5,8)}$. Vidíme, že doba kmitu se prodlužuje s rostoucí hmotností m a zkracuje s rostoucí tuhostí pružiny.

Příklad 5,1. Určete dobu kmitu matematického kyvadla délky L. Matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod zavěšený na nehmotné niti.
<u>*Řešení.*</u> Předpokládejme, že kyvadlo (bod M) je vychýleno ze svislé polohy o **malý** úhel φ (do max 5°). Silou, vracející kyvadlo do rovnovážné polohy, je složka váhy P_t kolmá k vláknu (obr.5,3). (vlastně tečná složka síly při pohybu kyvadla po oblouku kružnice). Přesný výraz pro sílu P_t je p sin φ. Rozvineme-li však sinus do Taylorovy řady, pak při malé hodnotě úhlu φ lze vzít z řady jen první člen, tedy $\sin\varphi \cong \frac{\varphi}{1!} = \varphi$ a přesnost výpočtu se velmi dobře zachová. Pak tedy bude P.φ = -mgφ, kde g je gravitační zrychlení. Znaménko mínus vyjadřuje, že síla P_t míří proti směru okamžité výchylky. Abychom mohli dosadit do Newtonova pohybového zákona, potřebujeme dostat výraz pro tečné zrychlení, což je derivace rychlosti podle času neboli druhá derivace dráhy podle času. Dráha při kruhovém pohybu je však s = Lφ, tedy rychlost je

$L\dot{\varphi}$ a zrychlení je pak $L\ddot{\varphi}$. Tak jsme dostali pohybovou rovnici (druhý Newtonův zákon) ve tvaru $mL\ddot{\varphi} = -mg\varphi$ hmotnost m se vykrátí a po malé úpravě máme $\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0 \quad (5{,}9)}$. To je však opět rovnice typu (5,3), takže docházíme k závěru, že kyvadlo bude harmonicky kmitat. Podíl g/L je totiž podíl dvou kladný čísel, takže je to jistě také kladné číslo a proto jej můžeme vyjádřit jako čtverec reálného čísla, a tak máme $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (5{,}10)}$. To je doba kmitu matematického kyvadla o délce L a o hmotnosti m v gravitačním poli o zrychlení g. Připomeňme, že u hladiny moře je přibližně g = 9,8, ve výšce např 10 000 km by tedy totéž kyvadlo kmitalo podstatně rychleji. ♣♣♣



OBR. 5,3

Energie kmitů
Oddíl 6

Do klidové polohy neboli do počátku 0 naší souřadnice X položíme nulu potenciální energie. Vypočteme práci P, kterou musí vykonat pružina, aby z amplitudy A přemístila bod M do počátku 0. Diferenciál dP této práce je podle definice dán jako skalární součin dP = (**F** . d**s**), u nás (-Kx**i** . -d**x**) = Kx.dx cos0 = Kx.dx. Diferenciál dráhy musí však mít znaménko mínus, protože podle pravidla o znaménku diferenciálu se musíme ptát: je v diferenciálu dP souřadnice x rostoucí nebo klesající funkcí? Odpovídáme, že je funkcí klesající, protože pohyb se děje proti kladnému směru osy X. Pro celou práci P, kterou musí síla pružiny vykonat, máme pak $\boxed{P = \int_A^0 -dP = \int_A^0 -K.x.dx = -K\int_A^0 x.dx = -K\frac{x^2}{2}\Big|_A^0 = \frac{1}{2}KA^2 \quad (6,1)}$. Tato práce je současně potenciální energií E_{pot} bodu M v místě A, neboť je-li M v A, je potenciálně schopen vykonat práci (6,1). Uvolníme-li bod M, začne se pohybovat směrem k počátku, v okamžiku průchodu bodem 0 má M nulovou potenciální energii, zato se všechna jeho počáteční energie přeměnila v energii kinetickou. Rychlost průchodu bodem 0 vypočteme ze zákona o zachování energie:

$\frac{1}{2}KA^2 = E_{kin}(0) - E_{kin}(A)$. V amplitudě A měl M nulovou kinetickou energii (byl v klidu), tedy $E_{kin}(0) = \frac{1}{2}mv^2$, takže $\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$ $\boxed{v = A\sqrt{\frac{K}{m}} \quad (6,2)}$. Vypočteme ještě celkovou energii kmitů $E = E_{kin} + E_{pot}$. Podle zákona o zachování energie je potenciální energie v bodě A rovna celkové energii, tedy podle (6,1) je

$\boxed{E = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2}KA^2 + 0 = \frac{1}{2}KA^2 \quad (6,3)}$. Použitím rovnosti $K = m\omega^2$ je možné vzorec (6,3) přepsat na tvar $\boxed{E = \frac{2\pi^2 m}{T^2}A^2 \quad (6,4)}$. ♣♣♣

Tlumené kmity
Oddíl 7

Kmity každého reálného oscilátoru se časem utlumí, pokud nejsou uměle udržovány soustavným dodáváním energie zvenčí. Tlumení je obvykle způsobeno řadou příčin, říkáme, řadou brzdicích sil. V tomto oddíle vezmeme v úvahu jen slabou sílu odporu prostředí, prakticky jen odpor vzduchu, a budeme uvažovat jen poměrně pomalé kmity. Jak ukázaly nesčetné experimenty, v takovém případě je odpor prostředí úměrný rychlosti kmitů a míří vždy proti směru okamžité rychlosti, tedy má tvar $-r\dot{x}$. Druhý Newtonův zákon neboli pohybovou rovnici oscilátoru můžeme tedy napsat ve tvaru $\boxed{m\ddot{x} = -Kx - r\dot{x} \quad (1)}$, kde r je konstanta zvaná *koeficient odporu.* Vydělíme m a dostaneme $\ddot{x} = -\frac{K}{m} - \frac{r}{m}$. Dále položíme $\boxed{\frac{K}{m} = \omega_0^2, \frac{r}{m} = 2\beta \quad (2)}$, kde zřejmě **koeficient útlumu** β a veličina ω_0^2 jsou kladná čísla a tak rovnice (1) dostane tvar $\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 - 2\beta\dot{x} \quad (3)}$. Tuto rovnici převedeme vhodnou substitucí na výhodnější tvar. Vezmeme substituci tvaru $\boxed{x = ze^{-\beta t} \quad (4)}$. Odtud derivacemi dostáváme

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt}e^{-\beta t} - z\beta e^{-\beta t} \equiv \dot{z}e^{-\beta t} - \beta z e^{-\beta t}$, $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = e^{-\beta t}\ddot{z} - 2\beta e^{-\beta t}\dot{z} + \beta^2 e^{-\beta t} z$.

Dosadíme-li tyto výrazy pro $\dot{z}$ a $\ddot{z}$ do rovnice (3) a dělíme-li všechny členy exponenciálou $e^{-\beta t}$, dostaneme $\ddot{z} - 2\beta\dot{z} + \beta^2 z = -\omega_0^2 z + 2\beta^2 z - 2\beta\dot{z}$ neboli $\boxed{\ddot{z} = -(\omega_0^2 - \beta^2)z \quad (5)}$. Podle předpokladu je odpor prostředí malý, předpokládejme, že $\omega_0^2 > \beta^2$. Pak je $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$ (jistě kladné číslo) takže rovnici (5) lze napsat takto: $\boxed{\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad (6)}$. Ale to je rovnice typu (3) z oddílu 4. Řešení této rovnice již známe, je to kosínusovka. Můžeme tedy napsat řešení rovnice (6) ve tvaru $\boxed{z = A_0 \cos\omega t \quad (7)}$. Opakujeme-li všechny úvahy učiněné pro kmity netlumené, dojdeme k výsledku, že veličina z se periodicky mění s periodou $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, nebo, dosadíme-li za ω,

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}} \quad (8)}$$

. Dosadíme-li do (7) za z jeho hodnotu, dostaneme podle vzorce (4) $x = A_0 e^{-\beta t}\cos\omega t$, což můžeme přepsat na $\boxed{x = A\cos\omega t \quad (9)}$. Toto řešení vyjadřuje kmity s klesající amplitudou $\boxed{A = A_0 e^{-\beta t} \quad (10)}$.

Logaritmus poměru dvou hodnot amplitudy následujících za sebou v čase rovném periodě T se nazývá **logaritmický dekrement útlumu**. Označíme-li logaritmický dekrement písmenem λ (malé lambda), máme podle této definice

$$\lambda = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta t} \quad \boxed{\Rightarrow \lambda = \beta T \quad (11)}.$$

Příklad 3. Logaritmický dekrement $\lambda = 0{,}02$.. Vypočtěte, kolikrát se zmenší amplituda po 100 kmitech.

Řešení. V počátečním okamžiku , tj v čase t = 0, je amplituda kmitů $A = A_0 e^{-\lambda 0} = A_0$. Po 100 kmitech, tj v čase t = 100T, je amplituda

$$A_{100} = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\lambda\frac{t}{T}} = A_0 e^{-\lambda.100}, \quad \text{takže} \quad \frac{A_0}{A_{100}} = \frac{1}{e^{-\lambda.100}} = e^{\lambda.100} = e^2 \cong 7{,}4.$$

Tedy amplituda se po 100 kmitech zmenší 7,4 krát. ♣♣♣

OBSAH

strana

1. Relativní pohyb	1
2. Souřadné soustavy	2
3. Pohyb v otáčivé soustavě – reálné a fiktivní síly	3
4. Výpočet zdánlivých sil derivacemi	7
5. Kmity	9
6. Energie kmitů	12
6. Tlumené kmity	13

Konec souboru F3