Cvic4doc.doc

DÍL 1
MECHANIKA HMOTNÉ SOUSTAVY A TUHÉHO TĚLESA
ČÁST IV

1. Hmotný střed soustavy

Definice. Mějme dva nebo více hmotných bodů. Jestliže tyto hmotné body na sebe navzájem silově působí, pak řekneme, že tvoří *soustavu hmotných bodů* neboli stručně *hmotnou soustavu.* ♣♣♣

Silové působení může být trvalé nebo přerušované. Příkladem trvalého silového působení je vzájemné gravitační působení mezi kosmickými tělesy tvořícími naši sluneční soustavu a hlavně ovšem mezi každým tělesem soustavy a Sluncem. Sluneční soustavu můžeme považovat za hmotnou soustavu, jednotlivými hmotnými body této soustavy jsou Slunce, planety, jejich měsíce, komety a pak drobnější, až mikroskopická tělesa, tvořící mj prstence kolem některých planet, dále pak pás asteroidů a konečně tisíce osamocených drobných těles kroužících kolem Slunce. Nakonec sem musíme započítat i pomalu rostoucí počet umělých družic, sond a jejich vraků.

Převládající silou, držící celou tuto soustavu pohromadě, je gravitační síla Slunce, kterou jsme již diskutovali. Této síle podléhají všechna tělesa Sluneční soustavy *trvale*. Právě tak jsou trvale v silové interakci Měsíc se Zemí a vůbec každá planeta se svými měsíci. Vezmeme-li libovolné dvě planety, třeba Zemi a Venuši, skoro nikdy se k sobě nepřiblíží natolik, aby se dostaly do významnější silové interakce, jak plyne ihned z Newtonova gravitačního zákona; vzdálenost obou hmotných bodů - Venuše a Země - je stále příliš veliká. K mírně výraznější silové interakci mezi nimi dochází jen zřídka, a i tehdy je interakce slabá. Vzdálenější planety jsou si i při největším přiblížení tak vzdáleny, že vzájemné silové působení je téměř zanedbatelné, přestože např Jupiter a Saturn, obíhající na sousedních drahách, mají poměrně velké hmotnosti. Jen jednou za mnoho let se k sobě podle pozorování ze Země zdánlivě přiblíží - pak říkáme, že jsou v *konjunkci.*

Příkladem neustále naprosto přerušovaného silového působení je silové působení mezi molekulami nebo atomy plynu. Mějme v uzavřené nádobě plyn o celkové hmotnosti m kg. Považujeme-li každou molekulu (nebo atom, jde-li o plyn v atomárním stavu) za hmotný bod, pak plyn jako celek tvoří v nádobě hmotnou soustavu. Vezmeme-li konkrétně třeba atomární vodík, pak v jednom kg vodíku je přibližně 6.10^{26} atomů. Máme tedy nepředstavitelně rozsáhlou hmotnou soustavu, tvořenou přesně stejnými hmotnými body - atomy vodíku. Podle *kinetické teorie plynů*, kterou budeme probírat později, jsou všechny tyto atomy v neustálém vzájemném pohybu, jehož intenzita závisí jen na teplotě. Gravitační působení Země na atomy můžeme pro jejich nepatrnou hmotnost zanedbat; tím zanedbáváme i jejich potenciální energii a zbývá energie kinetická. Každý náhodně vybraný atom letí pohybem rovnoměrným přímočarým do okamžiku srážky s jiným atomem nebo se stěnou nádoby. Při srážce, trvající nepatrný okamžik, dojde k změně hybnosti každého z nich. Tuto hybnost si každý z nich zachová až do příští srážky s jiným atomem nebo stěnou nádoby, atd.

Tak jsme stručně prodiskutovali dvě extrémně různé hmotné soustavy; Sluneční soustavu, skládající se ze statisíců naprosto různě hmotných bodů makroskopické velikosti, a plyn v nádobě, skládající se naopak z naprosto stejných hmotných bodů, ovšem v nepředstavitelně větším množství. Tyto dvě vyčleněné soustavy ovšem tvoří ve skutečnosti soustavu jedinou, vždyť do sluneční soustavy patří i atomy a molekuly tvořící atmosféry všech planet a měsíců.

Definice Hmotná soustava, která ani nevydává ani nepřijímá z okolí energii, se nazývá *izolovaná.* ♣♣♣

Z této definice je zřejmé, že, přísně vzato, není Sluneční soustava soustavou izolovanou; jednak Slunce neustále vyzařuje energii, čímž se jeho hmotnost trvale zmenšuje, jednak se v gravitačním poli Slunce občas zachytí nějaký kosmický předmět, čímž se hmotnost soustavy zase zvětší. To vše je však v poměru k hmotnosti celé soustavy tak bezvýznamné, že ji prakticky můžeme považovat za izolovanou .

Plyn v uzavřené nádobě, udržovaný na konstantní teplotě, je příkladem skutečně izolované hmotné soustavy.

Pro izolované hmotné soustavy platí několik obecných vět, které postupně uvedeme. Nejprve označme hmotné body naší soustavy m_i, takže máme soustavu

$\boxed{m_i, \quad i = 1,2,\dots,n \quad (1)}$, tedy máme soustavu n obecně různých hmotných bodů m_i. Pro libovolný bod m_i této soustavy platí druhý Newtonův zákon:

$\boxed{\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i \quad (2)}$, kde $\mathbf{p}_i$ je jeho hybnost a $\mathbf{F}_i$ je výslednice vnějších sil na bod působících. Které síly jsou pro bod m_i silami vnějšími? Jsou to předně síly, kterými na m_i působí ostatní body soustavy. Tyto síly nazneme *vnitřní síly soustavy* a jejich výslednici působící na bod m_i označíme $\mathbf{F}_{iu}$. Dále pak na m_i působí nějaké *vnější síly*, mající původ jinde než v soustavě. Výslednici těchto sil působící na m_i označíme $\mathbf{F}_{ie}$. Celkem na m_i působí síla $\boxed{\vec{F}_i = \vec{F}_{iu} + \vec{F}_{ie} \quad (3)}$.

Dokážeme, že vnitřní síly soustavy nemají vliv na pohyb soustavy jako *celku.* Vezměme proto soustavu pouhých tří bodů. Působí-li bod m_1 na bod m_2 silou $\mathbf{F}_{12}$, pak podle třetího Newtonova zákona působí m_2 na m_1 silou $-\mathbf{F}_{12}$. Obdobně působí-li m_1 na m_3 silou $\mathbf{F}_{13}$, působí m_3 na m_1 silou $-\mathbf{F}_{13}$. Konečně m_2 působí na m_3 silou $\mathbf{F}_{23}$ a m_3 působí na m_2 silou $-\mathbf{F}_{23}$. Sečteme-li všechny tyto síly, dostaneme

$(\mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12}) + (\mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{13}) + (\mathbf{F}_{23} - \mathbf{F}_{23}) = 0$. Tuto úvahu můžeme rozšířit na soustavu o libovolném počtu bodů a tak vyslovit závěr, že *součet vnitřních sil v soustavě je roven nule.* ♣♣♣

Zákon (2) platí pro každý bod m_i naší soustavy. Sečtěme tyto rovnice pro všechny body soustavy: $\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iu} + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ic}$. Jak jsme právě dokázali, je suma vnitřních sil $\mathbf{F}_{iu}$ rovna nule. Zbývá suma vnějších sil. Označme sumu vnějších sil působících na všechny body soustavy neboli prostě na soustavu jako celek písmenem **F**. Tak dostáváme, uvážíme-li, že $\mathbf{p}_i = m_i\,\mathbf{v}_i$: $\boxed{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \vec{F} \quad (4)}$. Tato rovnice vyjadřuje tzv První větu impulzovou neboli větu o hybnosti soustavy:

2. První věta impulzová

Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výsledné vnější síle na soustavu působící. ♣♣♣

Znění této věty je zcela analogické druhému Newtonovu pohybovému zákonu pro jeden hmotný bod; rozdíl je jen v tom, že nyní máme místo hmotného bodu hmotnou soustavu. Když je tedy možno nahradit všechny vnější síly působící na soustavu silou jedinou, vyvstává myšlenka nahradit také celou soustavu jediným hmotným bodem o hmotnosti rovné hmotnosti soustavy, tedy bodem m_T, $\boxed{m_T = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad (1)}$. Časová změna hybnosti tohoto bodu musela by se rovnat časové změně hybnosti soustavy, tedy muselo by platit $\frac{d}{dt}(m_T\vec{v}_T) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$. Vynásobíme tuto rovnici dt, dostaneme $d(m_T\vec{v}_T) = d\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$. Mají-li se sobě rovnat diferenciály dvou funkcí, musí se sobě rovnat funkce samotné, tedy musí platit $\boxed{m_t\vec{v}_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i \quad (2)}$, kde $\mathbf{v}_T$ je rychlost bodu m_T. Dosaďme do této rovnice rychlost podle definice $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$: dostaneme $m_T\frac{d\vec{r}_T}{dt} = \frac{d}{dt}(m_T\vec{r}_T) = (\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i\right)$ neboli

$\boxed{d(m_T\vec{r}_T) = d\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i\right) \quad (3)}$. Z rovnosti diferenciálů funkcí vyplývá opět rovnost funkcí (až na integrační konstantu, kterou položíme rovnu nule), takže dostáváme

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m_T}.\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \qquad (4).$$

Hmotný bod M_T o hmotnosti m_T, která je podle (1) součtem hmotností jednotlivých bodů soustavy, se nazývá **hmotný střed soustavy**. Nachází-li se soustava v gravitačním poli nějakého nebeského tělesa, např v gravitačním poli Země, působí toto pole na hmotný střed gravitační silou právě tak jako na jakýkoliv jiný hmotný bod a proto se hmotnému středu soustavy umístěné v gravitačním poli říká stručně **těžiště**. Poloha těžiště v prostoru je dána jeho průvodičem $\mathbf{r}_T$. Pro souřadnice těžiště dostáváme ze (4):

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m_T}, \quad y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m_T}, \quad z_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m_T} \qquad (5).$$

Příklad 1. Je dána hmotná soustava tří hmotných bodů $\{M_1, M_2, M_3\}$ umístěných v rovině, kde: $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 6$ kg, $m_3 = 5$ kg. Koncové body průvodičů $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ jsou (v metrech): $(x_1;y_1) = (11;3)$, $(x_2;y_2) = (14;7)$, $(x_3;y_3) = (19;5)$.

Má se vypočíst hmotnost m_T a koncový bod $(x_T\,;y_T)$ průvodiče $\mathbf{r}_T$ těžiště soustavy.

Řešení . Podle vztahu (1) dostáváme pro m_T: $m_T = \sum_{i=1}^{3} m_i = 4 + 6 + 5 = 15$ kg.

Ze vztahů (5) dostáváme:

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_T} = \frac{4.11 + 6.14 + 5.19}{15} = \frac{44 + 84 + 95}{15} = \frac{223}{15} = 14{,}87 \text{ metru},$$

$$y_T = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_T} = \frac{4.3 + 6.7 + 5.5}{15} = \frac{12 + 42 + 25}{15} = \frac{79}{15} = 5{,}27 \text{ metru},$$

Souřadnice x_T a y_T koncového bodu průvodiče těžiště tedy známe a průvodič $\mathbf{r}_T$ proto napíšeme ve tvaru $\mathbf{r}_T = \mathbf{i}x_t + \mathbf{j}y_t = \mathbf{i}14{,}87 + \mathbf{j}5{,}27$. ♣♣♣

O těžišti hmotné soustavy platí další velmi důležitý zákon, známý pod názvem *zákon o zachování těžiště* neboli *zákon o zachování hybnosti.*

Zákon o zachování těžiště neboli **zákon o zachování hybnosti:**

Nechť je dána ***izolovaná*** soustava hmotných bodů. Pak platí:

1. *Celková hybnost izolované soustavy hmotných bodů, rovná vektorovému součtu okamžitých hybností jednotlivých bodů soustavy, má během času konstantní směr i velikost.*

Tento zákon můžeme vyjádřit jako zákon o zachování pohybu těžiště:

2. *Těžiště izolované soustavy se pohybuje podle prvního Newtonova zákona.* ♣♣♣

V dalším oddílu ukážeme důležitou aplikaci tohoto zákona. Půjde o pohyb rakety.

3. Pohyb rakety

tj pohyb tělesa s proměnnou hmotností

Nechť na raketu s palivem nepůsobí žádná nenulová výslednice vnějších sil, tj

$\boxed{\sum \vec{F}_i = \vec{F} = 0 \quad (1)}$. To se na povrchu Země dá docílit tak, že raketa je ve vodorovné poloze umístěna na podvozku, který se může bez tření (nebo aspoň přibližně bez tření) pohybovat po vodorovných kolejích; soustavu raketa plus palivo plus podvozek bychom měli nazvat systém, ale pro stručnost budeme tomuto systému či komplexu říkat nadále prostě raketa. Zanedbáme i odpor vzduchu a případné další odpory, takže výslednice vnějších sil působících na raketu je nulová (váha rakety, rozumí se tedy rakety s palivem a podvozkem, je vykompenzována reakcí od kolejí).

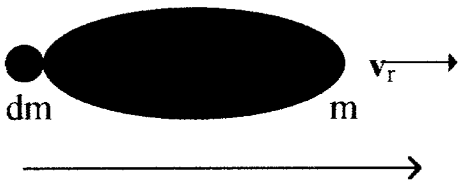
Zpočátku, tj v čase t = 0 raketa stojí v klidu na kolejích, tedy její rychlost $\mathbf{v}_r$ a tím i její hybnost $\mathbf{p}_r$ jsou nulové, $\mathbf{v}_r = 0$ a $\mathbf{p}_r = 0$. Zavedeme soustavu souřadnou, jejíž počátek položíme do těžiště m_T rakety, které zpočátku je samozřejmě také v klidu. Celkovou počáteční hmotnost rakety označíme m_0.

V čase t=0 se palivo zapálí a spaliny začnou tryskat z rakety. Předpokládáme, že výkon motoru je konstantní, tj diferenciály hmotnosti dm paliva spáleného za stejné časové intervaly dt jsou stejné. Jak raketu o okamžité hmotnosti m(t) = m, tak diferenciál spalin o hmotnosti dm vytryský za čas dt považujeme za hmotné body. Podle druhého Newtonova pohybového zákona platí pro *jeden* hmotný bod:

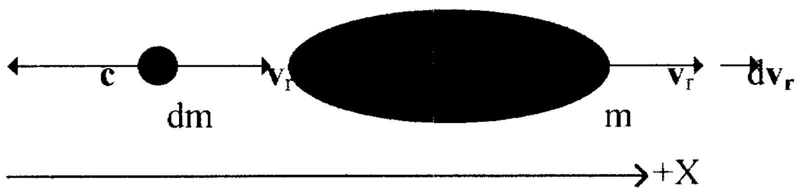
$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2)}$$

My však máme na konci intervalu dt *soustavu dvou bodů* a proto nelze použít bezprostředně rovnici platnou pro jeden bod, ale je nutno uvažovat následovně. Protože na soustavu těchto dvou hmotných bodů nepůsobí podle předpokladu žádná nenulová výsledná síla, jde o soustavu *izolovanou* a tedy podle první věty impulzové bude její hybnost stále stejná, nulová. Poznamenejme, že tlak vzniklý spalováním paliva je v této soustavě silou **vnitřní**, takže neovlivní *celkovou* hybnost soustavy. Naším cílem je stanovit závislost rychlosti rakety na hmotnosti spalin, vytrysklých z rakety shořením paliva; budeme předpokládat, že hmotnost spalin je rovna hmotnosti spotřebovaného paliva, což je prakticky téměř přesně splněný předpoklad.

Předpokládejme, že raketa má v čase t hmotnost m+dm a letí rychlostí $\mathbf{v}_r$ vzhledem k zemi, obr.1, kde jsme do směru pohybu položili osu +X.



OBR. 1



OBR. 2

Během intervalu dt vytryskne z rakety hmotný bod dm a to rychlostí **c** vzhledem k raketě, která, jak předpokládáme, letí vzhledem k zemi rychlostí $\mathbf{v}_r$. Hybnost soustavy m+dm před vytrysknutím dm je podle obr. 1 $\boxed{\vec{p}_{m+dm} = (m + dm)\vec{v}_r \quad (3)}$. Po vytrysknutí vzroste rychlost bodu m o hodnotu $\mathbf{dv}_r$ ve směru osy +X,(obr. 2) takže hybnost bodu m bude $\boxed{\vec{p}_m = m(\vec{v}_r + d\vec{v}_r) \quad (4)}$. Rychlost bodu dm vzhledem k zemi bude $(\mathbf{v}_r\mathbf{-c})$, takže hybnost bodu dm bude $\boxed{\vec{p}_{dm} = dm(\vec{v}_r - \vec{c}) \quad (5)}$. Protože na soustavu nepůsobí žádná nenulová vnější síla, její hybnost se podle zákona o zachování hybnosti nezmění, tedy hybnost před rozdělením se rovná hybnosti po rozdělení: $p_{m+dm} = p_m + p_{dm}$ neboli

$$(m + dm)\vec{v}_r = m(\vec{v}_r + d\vec{v}_r) + dm(\vec{v}_r - \vec{c}) \Rightarrow$$

$$m\vec{v}_r + dm\,\vec{v}_r = m\vec{v}_r + m\,d\vec{v}_r + dm\,\vec{v}_r - dm\,\vec{c} \Rightarrow$$

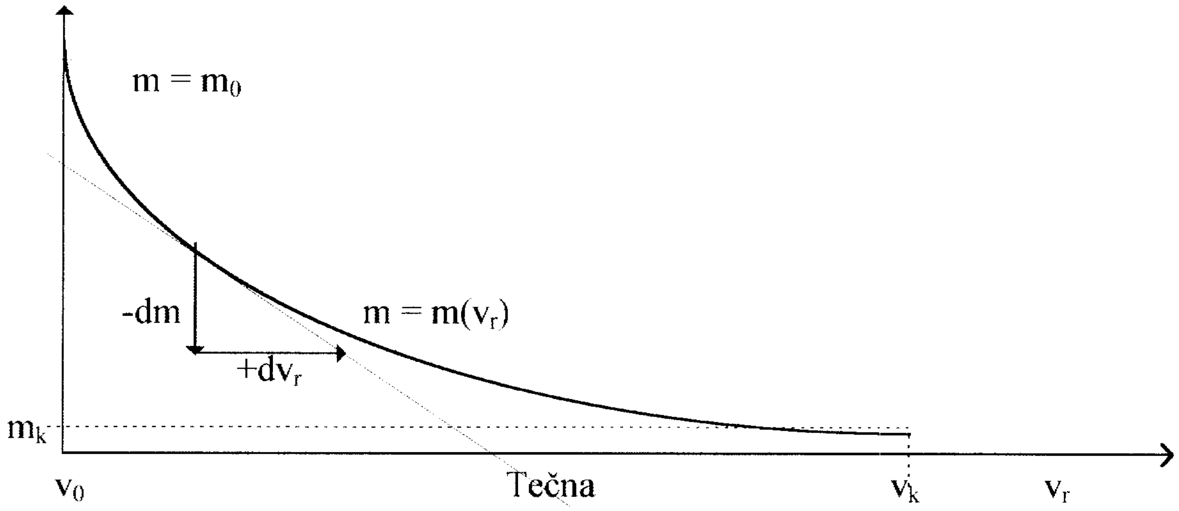
$\boxed{0 = m\,d\vec{v}_r - dm\,\vec{c} \Rightarrow m\,d\vec{v}_r = dm\,\vec{c} \quad (6)}$. Odtud máme vektorovou diferenciální rovnici $\boxed{d\vec{v}_r = \vec{c}\frac{1}{m}dm \Rightarrow d\vec{v}_r = \vec{c}\frac{dm}{m} \quad (7)}$. Je potřeba přejít na rovnici skalární, což učiníme použitím pravidla o znaménku diferenciálu. Podle obr. 3 je hmotnost m *klesající funkcí* rychlosti **v**, jak rychlost roste, tak hmotnosti m ubývá. diferenciál dm musí mít znaménko mínus, takže místo (7) musí platit $\boxed{dv_r = -c\frac{dm}{m} \quad (8)}$ neboli $\boxed{m\,dv_r = -c\,dm \quad (9)}$, což je *Ciolkovského rovnice rakety v diferenciálním tvaru* odvozená r.1898.

Rovnici (8) upravíme a zintegrujeme, čímž ji převedeme na tvar integrální. Počáteční hmotnost rakety označíme m_0, počáteční rychlost označíme v_0, (může být jak nenulová, tak nulová), výslednou (konečnou) hmotnost označíme m_k a výslednou (konečnou) rychlost označíme v_k. Tak dostáváme:

$$-c\,dm = m\,dv_r \Rightarrow -c\frac{dm}{m} = dv_r \Rightarrow -c\int_{m_0}^{m_k}\frac{1}{m}dm = \int_{v_0}^{v_k}dv_r \Rightarrow -c\ln(m)\Big|_{m_0}^{m_k} = v_r\Big|_{v_0}^{v_k} \Rightarrow$$

$$-c\left(\ln(m_k) - \ln(m_0)\right) = v_k - v_0 \Rightarrow c\left(\ln(m_0) - \ln(m_k)\right) = v_k - v_0 \Rightarrow$$

$v_k - v_0 = c.\ln\frac{m_0}{m_k}$ neboli $\boxed{v_k = v_0 + c.\ln\frac{m_0}{m_k} \quad (10)}$. To je Ciolkovského rovnice rakety v integrálním tvaru. Integrální je takový tvar rovnice (libovolné), který již neobsahuje žádné diferenciály.



OBR . 3 Hmotnost m je klesající funkcí rychlosti, diferenciál hmotnosti je záporný, -dm, kdežto diferenciál dv_r je kladný.

Z rovnice (10) vyplývá, že výsledná rychlost v_k rakety závisí (kromě na počáteční rychlosti v_0) jen na poměru její počáteční a konečné hmotnosti, přesně řečeno, na logaritmu tohoto poměru. Za povšimnutí stojí, že vůbec nezáleží na délce doby, po kterou palivo hořelo. Tak tomu je ovšem jen daleko od gravitačních polí. Při startu na cestu např ze Země na Měsíc je nutné, aby raketa získala únikovou rychlost, která se na povrchu Země rovná druhé kosmické rychlosti, dříve než palivo vyhoří. Úniková rychlost ovšem klesá se vzdáleností od Země, takže raketa musí získat únikovou rychlost v té vzdálenosti od Země, v níž palivo dohořelo (gravitační sílu Měsíce a Slunce na raketu neuvažujeme).

Příklad 1. Raketa o počáteční hmotnosti m_0 = 125 tun leží ve vodorovné poloze na podvozku na rovných kolejích. Výtoková rychlost spalin je c = 4 km/s, počáteční rychlost rakety je $v_0 = 0$. Jaká bude konečná rychlost v_k, jestliže konečná hmotnost rakety po vyhoření paliva je 25 tun? Dosáhne raketa první kosmickou rychlost Země v_1 = 7,9 km/s? Jestliže ne, jaká by musela být počáteční hmotnost rakety m_0, aby první kosmickou rychlost dosáhla? Odpor vzduchu a všechny další odpory zanedbejte.

Řešení

Ve vzorci (8) bude $v_0 = 0$, c = 4 000 m/s, $m_0 = 1{,}25.10^5$ kg, $m_k = 2{,}5.10^4$ kg. Pak dostaneme:

$$v_k = c.\ln\frac{m_0}{m_k} = 4000.\ln\frac{1{,}25.10^5}{2{,}5.10^4} = 4000.\ln\frac{12{,}5}{2{,}5} = 6437{,}7\ m.s^{-1} \cong 6{,}4\ km.s^{-1}.$$

Raketa tedy první kosmickou rychlost nedosáhne.

Spočteme počáteční hmotnost m_0, potřebnou k dosažení první kosmické rychlosti Země $v_1 = 7900$ m/s:

$$v_k = v_1 = c.\ln\frac{m_0}{m_k} = c(\ln(m_0) - \ln(m_k)) \Rightarrow v_1 = c.\ln(m_0) - c\ln(m_k) \Rightarrow$$

$$c.\ln(m_0) = v_1 + c.\ln(m_k) \Rightarrow \ln(m_0) = \frac{1}{c}\left(v_1 + c.\ln(m_k)\right) \Rightarrow$$

$$m_0 = e^{(v_1 + c.\ln(m_k))/c} = e^{(7900+4000.\ln(25000))/4000} = e^{12{,}1} = 180165{,}5\ kg \cong 180{,}2\ tuny.$$

Raketa tedy dosáhne první kosmickou rychlost, bude-li její počáteční hmotnost přibližně 180 tun (a konečná 25t). ♣♣♣

Nyní budeme zkoumat kolmý start rakety z povrchu Země; tak startuje většina raket i raketoplán (ten startuje jako raketa a přistává jako letadlo). Zejména nás zajímá okamžik odpoutání rakety od Země a pak nás bude zajímat závislost rychlosti na čase; odpor vzduchu však zanedbáme. Pro řešení těchto úkolů potřebujeme nejprve vzorec pro závislosti hmotnosti rakety na čase. Označme proto hmotnost rakety bez paliva m_r a počáteční hmotnost paliva m_p, takže počáteční hmotnost celého komplexu je

$\boxed{m_0 = m_r + m_p \quad (11)}$. Označme dále μ množství paliva, vytrysklého za vteřinu. Fyzikální rozměr $[\mu]$ je tedy kg/s. Za t vteřin vytryskne hmotnost μt a o tuto hodnotu se ovšem zmenší hmotnost rakety. Tak dostáváme hmotnost rakety závislou na čase ve tvaru $\boxed{m(t) \equiv m = m_0 - \mu t = m_r + m_p - \mu t \quad (12)}$. Regulací přítoku paliva do spalovací komory se ovšem u složitější rakety dá hodnota μ měnit, zatímco rychlost c se prozatím u raket měnit nedá (každý raketový motor je dosud konstruován jen na jeden určitý druh paliva).

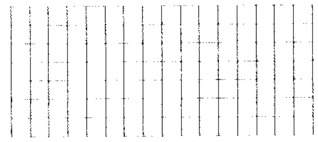
Stanovíme nejprve závislost rychlosti rakety za předpokladu, že není gravitační pole. Výslednou rychlost rakety jsme již získali podle Ciolkovského ve tvaru (10) $v_k = v_0 + c.\ln\frac{m_0}{m_k}$. Máme-li dostat rychlost nikoliv výslednou, ale rychlost v čase t, vyjdeme z této rovnice v diferenciálním tvaru (9): $m\,dv_r = -c\,dm$. Odtud $dv_r = -c\frac{dm}{m} = -c\frac{\mu\,dt}{m_r + m_p - \mu t}$, neboť za diferenciál času dt vytryskne diferenciál hmotnosti $dm = \mu\,dt$ a do jmenovatele jsme dosadili hmotnost jako funkci času podle (12). Vydělíme dt a dostaneme $\frac{dv_r}{dt} = -\frac{c\mu}{m_0 + m_p - \mu t}$. Avšak dv_r/dt je derivace rychlosti rakety podle času neboli je to prostě zrychlení rakety. Vidíme, že absolutní hodnota zrychlení rakety s rostoucím časem roste, neboť jmenovatel se zmenšuje. Znaménko zrychlení stanovíme zase z Pravidla o znaménku: protože rychlost je rostoucí funkcí času (podle Ciolkovského rovnice), musí být diferenciál dv_r rychlosti dán kladným výrazem. Proto je potřeba znaménko v posledním výrazu změnit a tak dostáváme pro zrychlení rakety v prostoru bez gravitace výraz $\boxed{\frac{dv_r}{dt} = \frac{c\mu}{m_0 + m_p - \mu t} \quad (13)}$. Při kolmém startu z povrchu Země míří zrychlení rakety ve směru vnější normály Země a proti tomuto zrychlení, tedy ve směru vnitřní normály, působí na raketu zemské zrychlení. Předpokládáme-li dosti reálně, že raketa získá potřebnou rychlost ve výšce do sta kilometrů, můžeme, jak víme, považovat gravitační pole za homogenní, tedy gravitační zrychlení za pevné s hodnotou $g = 9{,}81$ m/s^2. Má-li se raketa odpoutat od povrchu Země, musí být její zrychlení větší než g, tj musí být

$$\boxed{\frac{c\mu}{m_0 + m_p - \mu t} \geq g \quad (14)}.$$

♣♣♣

4. Hmotný střed tuhého tělesa

V oddílu 2 jsme již definovali hmotný střed (tj v gravitačním poli *těžiště*) hmotné soustavy. Nyní tento pojem rozšíříme na *těžiště tuhého tělesa*. Tuhým tělesem se rozumí těleso, které se působením vnějších sil nedeformuje, takže jde o idealizaci. Každé skutečné těleso je pouze *pevné* (nejde-li ovšem o těleso kapalné nebo plynné). Dále budeme tělesem rozumět těleso tuhé. Pro účely výpočtu si těleso představíme jako by rozřezáno na diferenciály hmotnosti, které, mají-li tvar malých úseček, čtverečků či krychliček, lze považovat za hmotné body, a těleso lze pak považovat za hmotnou soustavu. Na obr.4 je zakresleno rozdělení hmotného obdélníka (např



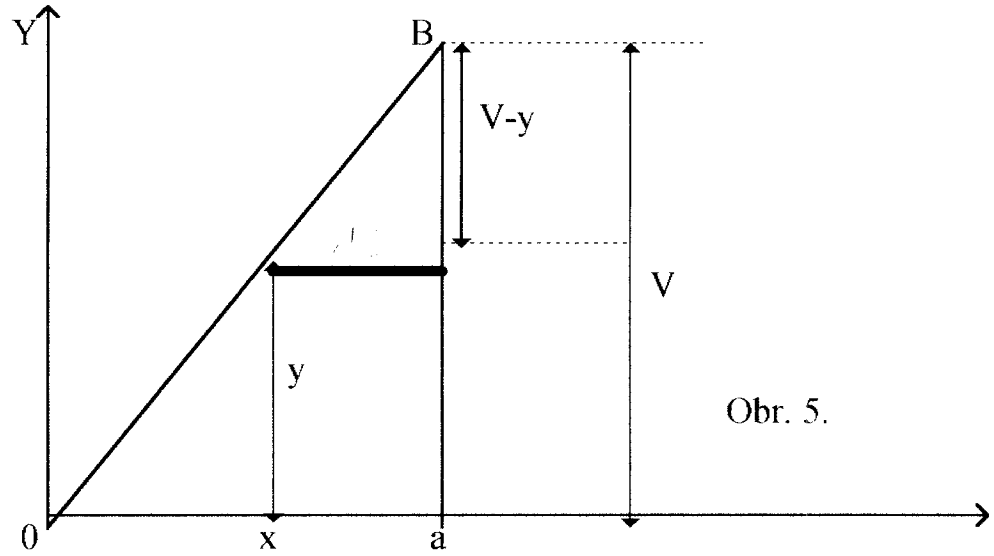
Obr.4

vystřiženého z plechu) na čtverečky o straně dr. Suma těchto čtverečků tvoří hmotnou soustavu, která zase tvoří tuhé těleso - plechový obdélníček. Hmotnost čtverečku je $dm = \sigma\, dS$, kde σ (sigma) je hustota materiálu obdélníka a $dS = (dr)^2$ je ploška čtverečku. Poznamenejme hned na tomto místě, že pro krychličky objemu V resp pro obdélníčky plochy S resp pro úsečky hmotné křivky s (drátu) platí $\boxed{dm = \rho . dV \text{ resp } dm = \sigma . dS \text{ resp } dm = \tau . ds \quad (1)}$, kde ρ (ró) resp σ resp τ (tau) je *objemová* resp *plošná* resp *délková* hustota materiálu daného tělesa. Samozřejmě pak součtem těchto diferenciálů hmotnosti je celková hmotnost tělesa: $\int dm = m$. Pro souřadnice těžiště pak platí:

$$\boxed{x_T = \frac{\int x . dm}{\int dm}, \quad y_T = \frac{\int y . dm}{\int dm}, \quad z_T = \frac{\int z . dm}{\int dm} \quad (2)}.$$

Často je však výhodné nedělit dané těleso na krychličky, čtverečky či úsečky, což jsou dobré idealizace hmotných bodů, ale je výhodnější dělit těleso na jiné útvary, stále však při zachování podmínky, že jde o tělíska limitně malé hmotnosti.

Příklad 1. Vypočtěte těžiště pravoúhlého trojúhelníka 0Ba.



Obr. 5.

Řešení

Platí úměra

$$\frac{V-y}{a-x}=\frac{V}{a}\Rightarrow V-y=\frac{V}{a}(a-x)=y=V-\frac{V}{a}(a-x)=V\left(1-1+\frac{1}{a}x\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{y=\frac{V}{a}x,\quad dy=\frac{V}{a}dx\quad(3)}.$$

Prověřme tuto úměru. Podle obr. 5 má pro x = a být y = V, pro x = 0 má být y = 0. Dosazením za x do (3) to skutečně vychází. Diferenciál dS plošky trojúhelníka je dS = x.dy, diferenciál jeho hmotnosti je (podle (3))

$$\boxed{dm=\sigma.dS=\sigma.x.dy=\sigma.x.\frac{V}{a}dx\quad(4)}$$

$$x_T=\frac{\int x\,dm}{\int dm}=\frac{\int x\sigma\frac{V}{a}x\,dx}{\int\sigma\frac{V}{a}x\,dx}=\frac{\int_0^a x^2\,dx}{\int_0^a x\,dx}=\frac{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a}{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a}=\frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{a^2}{2}}\Rightarrow\boxed{x_T=\frac{2}{3}a\quad(5)}.$$

Myslíme-li si trojúhelník převrácen o 90° ve směru chodu hodinových ručiček, dostáváme podle analogie $\boxed{y_T=\frac{2}{3}V\quad(6)}$, počítáno od bodu B směrem k bodu a.

♣♣♣

5. Rotace tuhého tělesa. Dvojice sil a její moment

Protože těleso si představujeme jako hmotnou soustavu nekonečně mnoha nekonečně malých diferenciálů hmoty, budeme sice dále většinou stručně mluvit jen o tělese, ale současně si pod slovem těleso budeme představovat zmíněnou hmotnou soustavu, neboť pro většinu výpočtů je to výhodnější. Je potřeba uvědomit si hned zpočátku jeden zásadní rozdíl mezi rotací hmotného bodu a rotací tělesa. Ten spočívá v tom, že u hmotného bodu nemá smysl mluvit o jeho rotaci kolem vlastní osy, protože hmotný bod jakožto geometricky bezrozměrně malý útvar žádnou vlastní osu nemá. To souvisí bezprostředně s tím, že hmotný bod je sám sobě hmotným středem (těžištěm). Kromě toho u hmotného nelze mluvit o žádných *vnitřních silách*, protože hmotný bod žádný vnitřek nemá. Mohou tedy na něj působit jen síly *vnější.*

Těleso však, na rozdíl od hmotného bodu, může rotovat i kolem vlastní osy, nebo přesněji a obecněji řečeno kolem osy jdoucí jak jeho vnitřkem tak i mimo ně. Zvlášť významné postavení mezi takovými osami zaujímají osy jdoucí hmotným středem (těžištěm) tělesa a z nich pak ty, - pokud u daného tělesa existují - které jsou osami symetrie tělesa. Tak např homogenní koule má nekonečně mnoho os symetrie jdoucích jejím těžištěm, které u homogenní koule leží v jejím středu. Válec má jednu osu symetrie ležící v jeho ose geometrické plus nekonečně mnoho os symetrie jdoucích ve středu jeho výšky kolmo na jeho povrch.

Definice. Moment **M** síly **F** vzhledem k bodu A je definován vztahem **M** = [**r** x **F**],

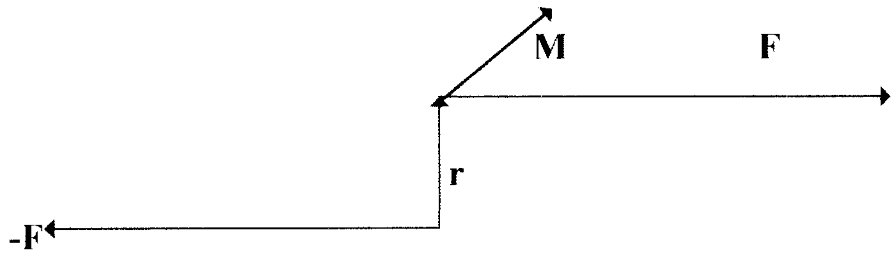
$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$, kde **r** je průvodič bodu A. ♣♣♣

Pro popis rotace tuhého tělesa je nutno použít další vektorovou veličinu, která se nazývá **dvojice sil** neboli *silová dvojice.* Jak je experimentálně dokázáno, dvojice sil *vždy vyvolává rotační pohyb tělesa.* Pro určitost budeme rozlišovat rotaci tělesa kolem osy, která má v prostoru *pevnou polohu* od rotace tělesa kolem *volné osy*, která tedy nemá pevnou polohu v prostoru. Nejprve budeme definovat dvojici sil a její moment.

Definice. Dvojice sil je definována jako dvě stejně velké síly opačného směru

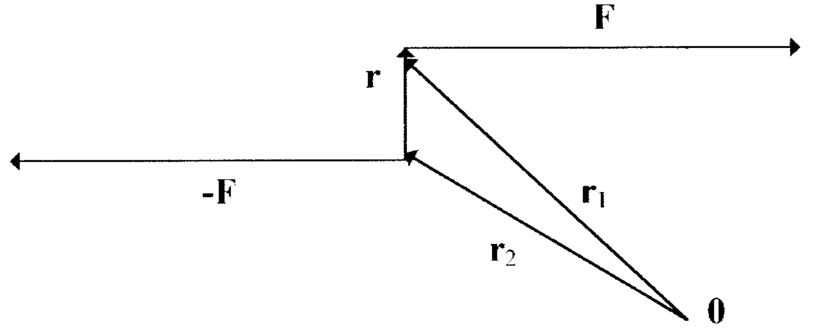
F a -**F** neležící ve stejné přímce. Kolmou vzdálenost r od přímky síly -**F** k přímce síly **F** považujeme za vektor **r** a moment $\boxed{\vec{M} = [\vec{r} \times F] \quad (1)}$ nazveme **moment dvojice sil**, jak je zakresleno na obr. 6. ♣♣♣

Dvojice sil má dvě význačné vlastnosti: předně způsobuje čistě rotační pohyb tělesa kolem jeho vlastní osy, za druhé dvojici sil je možno libovolně posouvat v její rovině, dokonce ji můžeme posunout i do libovolné jiné roviny rovnoběžné s její původní rovinou, a účinek dvojice se nezmění. Rovinou dvojice se myslí rovina určená oběma přímkami, v nichž leží **F** a -**F**.



Obr. 6. Dvojice sil **-F** *a* **F** *a moment* **M** *této dvojice.*

Dokážeme, že dvojici sil skutečně můžeme právě popsanými způsoby posunovat, obr. 7. Vypočteme proto moment **M** dvojice vzhledem k libovolnému bodu O, který je dán vektorovým součtem momentů obou sil dvojice vzhledem k tomuto bodu.



obr. 7.

$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}] + [\mathbf{r}_2 \times -\mathbf{F}]$. Z druhého vektorového součinu vytkneme znaménko mínus; $\mathbf{M} = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}] - [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}]$. Z obrázku vidíme, že $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}$. Tento výraz dosadíme za $\mathbf{r}_1$ do prvního vektorového součinu a dostáváme $\mathbf{M} = [(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}) \times \mathbf{F}] - [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}]$. Rozdělíme první vektorový součin na dva a máme $\mathbf{M} = [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}] + [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] - [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}]$, tedy $\boxed{\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] \quad \{2)}$

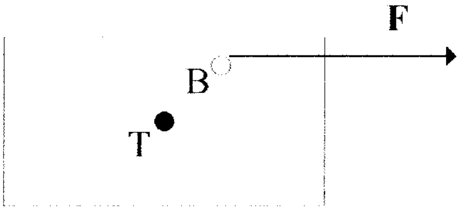
Dostali jsme výraz totožný s výrazem (1) a tak jsme dokázali tuto Větu:

Věta 1. *Dvojici sil lze rovnoběžně posunout do libovolného místa v tělese a její účinek na těleso se nezmění.* ♣♣♣

Větu použijeme v následujícím oddíle ke stanovení pohybu volného tělesa, na které působí libovolná síla **F**.

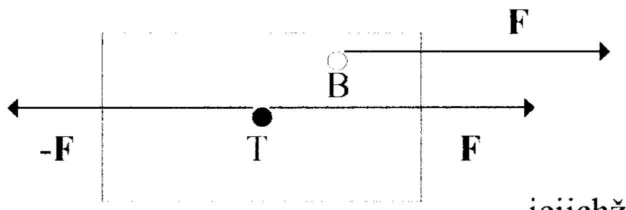
6. Pohyb volného tělesa vyvolaný silou F

Zkoumejme pohyb volného tělesa, na které působí výslednice vnějších sil **F**. Na obr. 8 je zakresleno těleso tvaru hmotného obdélníka, jakým je třeba obdélník vystřižený z plechu nebo vyříznutý z dřevěné desky. Obdélník (těleso) je volný, tj není podroben žádné vazbě. Předpokládáme, že na něj v bodě B působí výslednice vnějších sil **F**. Realizací takové situace může být tryskový motor pevně přišroubovaný k hmotnému obdélníku v bodě B; obdélník leží na vodní hladině. K prozkoumání pohybu tohoto volného obdélníka včetně motoru, jehož hmotnost proti hmotnosti obdélníka zanedbáme, použijeme následujícího postupu. Do těžiště T obdélníka umístíme dvě opačně orientované síly velikosti F, jak je zakresleno na obr. 9.

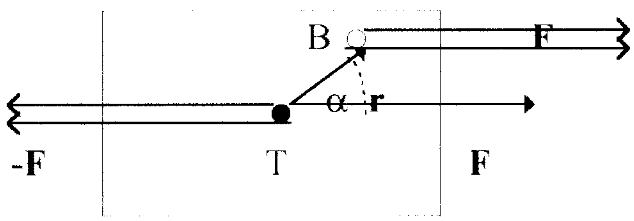


obr. 8

obr. 9



Do těžiště T jsou umístěny síly **F** a **-F**, jejichž účinek se vzájemně vyruší, neboť **F** - **F** = 0. Přesto jsme docílili ve výzkumu zásadní obrat, neboť nyní si můžeme představit tutéž situaci v rozložení sil podle obr. 10.

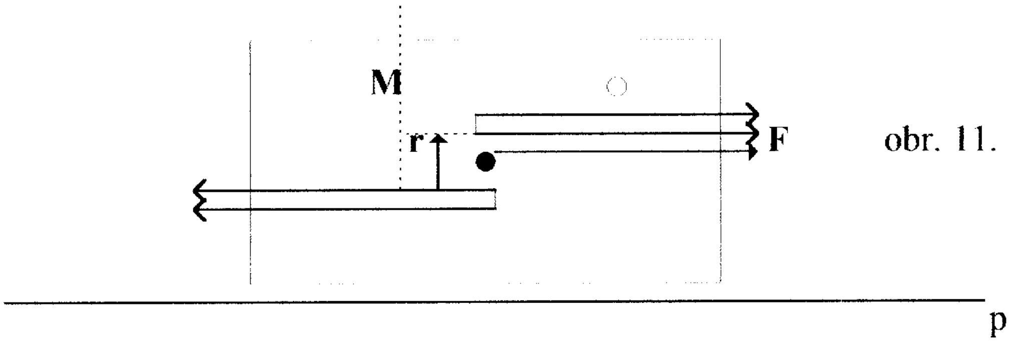


obr. 10.

Na hmotný obdélník působí podle obr. 10 vlastně dvojice sil zakreslených dvojšipkami a síla **F** zakreslená šipkou jednoduchou. Dvojice má rameno **d** = **r**sinα a na obdélník působí momentem. $\vec{M} = [d\vec{r} \times F]$, což budeme dále zapisovat jako

M = [**r** x **F**]. Vlivem tohoto momentu obdélník rotuje; záhy zjistíme kolem kterého bodu. Zbývající síla **F** působí v těžišti T obdélníka a snaží se vyvolat jeho translační pohyb.

Abychom zjistili kolem kterého bodu obdélník rotuje, připomeneme, že podle Věty 1 můžeme dvojici v tělese paralelně posunout. U rovinného tělesa přichází v úvahu jen posunutí v jeho rovině (nebo v rovinách rovnoběžných). Posuneme tedy dvojici sil symetricky k těžišti, jak je zakresleno na obr. 11. Z uvedeného usuzujeme, že dvojice sil *otáčí tělesem* (u nás hmotným obdélníkem) *kolem jeho těžiště*. Zbývající síla **F** působí na obdélník v jeho těžišti. Protože těžiště reprezentuje z hlediska hmotnosti celé těleso (u nás obdélník), platí podle druhého Newtonova zákona: **F** = m **w** a odtud dostáváme zrychlení translačního pohybu $\boxed{\vec{w} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (1)}$ kde m je hmotnost celého obdélníka a **w** je zrychlení. Ke skutečně translačnímu pohybu dojde ovšem jen



obr. 11.

v případě, kdy je zamezeno rotaci, v našem případě proti směru chodu hodinových ručiček. To lze u lodě docílit vhodným nastavením kormidla. Pak může loď jet rovně zleva do prava (obr. 11).

Další výpočet je obtížný, protože v důsledku rotace obdélníka (obecně tělesa) kolem těžiště mění síla **F** neustále svůj směr, takže takový pohyb nebudeme dále zkoumat.

Situace se značně zjednoduší, jde-li o těleso, které není v prostoru volné, ale je umístěno pevně na hřídeli, říkejme jí osa, kolem které může rotovat. Působí-li na těleso výsledná síla **F**, rozložíme ji na tři navzájem kolmé složky: na složku $\mathbf{F}_1$ kolmou na osu, kterou v prodloužení protíná, na složku $\mathbf{F}_2$ rovnoběžnou s osou a na zbývající složku, kterou označíme $\mathbf{F}_t$, která ji v prodloužení neprotíná, je s ní tedy mimoběžná. Vzdálenost těchto mimoběžek je R. Síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ se vyruší s reakcemi od osy rotace a rotaci způsobí dvojice sil $-\mathbf{F}_t$ a $\mathbf{F}_t$, kde $-\mathbf{F}_t$ je reakce osy na sílu $\mathbf{F}_t$. Rameno dvojice je R, moment dvojice je $\mathbf{M} = [\mathbf{R} \times \mathbf{F}_t]$.

Pro výpočet jsou nejjednodušší ty případy, kdy těleso je symetrické kolem osy rotace. Postup výpočtu účinku této dvojice sil je pak následující. Rozdělíme těleso na myšlené nekonečně malé diferenciály dm, tedy na hmotnou soustavu diferenciálů dm. Pevností tělesa se síla $\mathbf{F}_t$ rozprostře na celé těleso. Na diferenciál dm připadne diferenciál $d\mathbf{F}_t$ této rozprostřené síly. Pro každý diferenciál dm platí Newtonova rovnice $\boxed{d\vec{F}_t = dm\,\vec{w} = dm[\vec{\beta} \times \vec{r}] \quad (2)}$, kde **r** je průvodič diferenciálu dm s počátkem na ose rotace neboli ve středu kružnice kolem které dm rotuje. Velikost β úhlového zrychlení β je při konstantní velikosti F_t síly $\mathbf{F}_t$ také konstantní a stejná pro všechny dm ležící na **r**. Poslední rovnici vynásobíme zleva vektorem **r** a dostaneme $[\vec{r} \times d\vec{F}_t] = [\vec{r} \times [dm \times \vec{r}]]$, dm vytkneme a máme $\boxed{\vec{r} \times dF_t] = dm[\vec{r} \times [\vec{\beta} \times \vec{r}]] \quad (3)}$.

Z vektorové algebry je známo, že pro tři vektory **A**, **B**, **C** v prostoru platí:

$\boxed{[\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{C}.\vec{A}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B}) \quad (4)}$, tedy složený vektorový součin těchto tří vektorů je roven rozdílu vektoru **B** násobeném číslem (skalárním součinem) (**C**.**A**) a vektoru **C** násobeném číslem (skalárním součinem) (**A**.**B**). Aplikujeme vzorec (4) na vztah (3), tedy **A** = **r**, **B** = β, **C** = **r**. Tak dostaneme $\boxed{\vec{r} \times [\vec{\beta} \times \vec{r}] = (\vec{r}.\vec{r})\vec{\beta} - (\vec{r}.\vec{\beta})\vec{r} \quad (5)}$

Pro skalární součiny platí podle definice:

$(\mathbf{r}.\mathbf{r}) = rr\cos(\mathbf{r},\mathbf{r}) = r^2$, $(\mathbf{r}.\boldsymbol{\beta}) = r\beta\cos(\mathbf{r},\boldsymbol{\beta}) = r\beta\cos 90° = 0$,

takže $[\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}]] = r^2$ a rovnice (3) nabývá tvaru $\boxed{[\vec{r} \times d\vec{F}_t] = dm\, r^2\beta \quad (6)}$.

Avšak $[\mathbf{r} \times d\mathbf{F}_t]$ není nic jiného než diferenciál d**M** momentu dvojice sil $-\mathbf{F}_t$, $\mathbf{F}_t$, takže (6) můžeme psát $\boxed{d\vec{M} = \vec{\beta} r^2 dm \quad (7)}$, kde v analogii s hmotným bodem diskutovaným dříve definujeme $\boxed{dJ = r^2 dm \quad (8)}$ jako diferenciál momentu setrvačnosti J celého tělesa neboli jako moment setrvačnosti diferenciálu hmotnosti dm. Rovnici (7) pak můžeme zapsat ve tvaru $\boxed{d\vec{M} = \vec{\beta}\, dJ \quad (9)}$ a integrujeme: $\int d\vec{M} = \vec{M} = \vec{\beta}\int dJ$ a tedy $\boxed{\vec{M} = J\vec{\beta} \quad (10)}$, kde J je moment setrvačnosti celého tělesa vzhledem k ose symetrie jdoucí těžištěm. Jsou-li síla $\mathbf{F}_t$ a její rameno R dány, je tím dána dvojice $-\mathbf{F}_t$, $\mathbf{F}_t$ a její moment $\mathbf{M} = [\mathbf{R} \times \mathbf{F}_t]$, takže při daném úhlovém zrychlení β můžeme z (10) vypočíst moment setrvačnosti J daného tělesa vzhledem k ose, nebo známe-li moment J, můžeme z (10) vypočíst β. Jsou-li dány J i β, můžeme při známém rameni R vypočíst sílu $\mathbf{F}_t$. V příštím oddílu vypočteme momenty setrvačnosti několika jednoduchých symetrických těles.

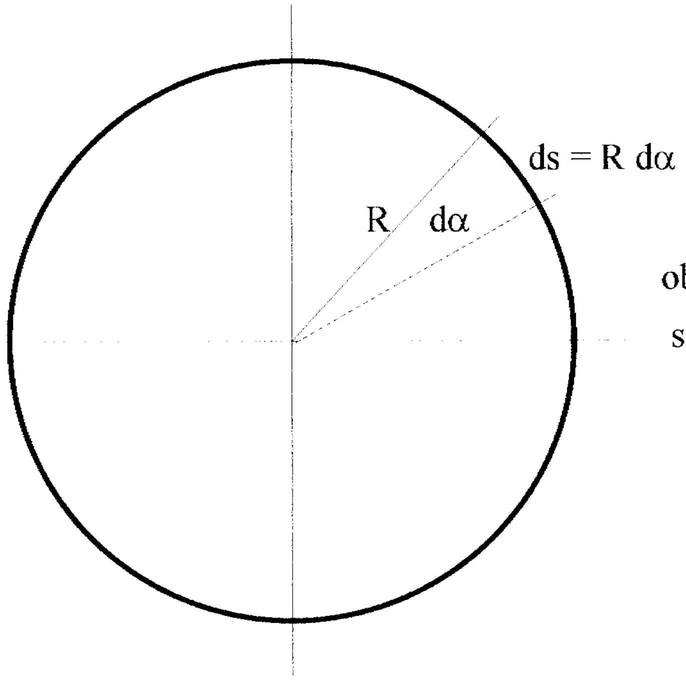
7. Příklady na výpočet momentu setrvačnosti

Vypočteme postupně momenty setrvačnosti tří těles: hmotné kružnice, hmotného kruhu a tenkostěnného válce. Budeme počítat moment vzhledem ke středu kružnice a kruhu a vzhledem k ose válce.

Příklad 1. Vypočteme moment setrvačnosti J hmotné kružnice vzhledem k jejímu středu neboli vzhledem k ose rotace jdoucí středem kružnice kolmo k její rovině.

Řešení. Na obr. 12. je zakreslena hmotná kružnice o poloměru R a jeden její diferenciál ds. Hmotnost dm diferenciálu ds je $dm = \tau\, ds \quad (1)$, kde τ je hustota látky tvořící kružnici. Moment setrvačnosti tohoto diferenciálu je

$\boxed{dJ = R^2 dm = R^2\tau\, ds \quad (2)}$.



obr. 12. K momentu setrvačnosti kružnice

Máme-li vypočíst moment setrvačnosti celé kružnice, znamená to sečíst neboli zintegrovat momenty všech nekonečně mnoha nekonečně malých diferenciálů. Vzpomeneme si, že ds = R dα a dostáváme (stále vzhledem ke středu kružnice):

$$dJ = \tau R^2 R\, d\alpha = \tau R^3 d\alpha \Rightarrow \quad J = \tau R^3 \alpha \Big|_0^{2\pi} = 2\pi\tau R^3 = 2\pi R\tau R^2 \Rightarrow \boxed{J = mR^2 \quad (3)}.$$

Moment setrvačnosti téže kružnice vzhledem k jinému bodu bude jiný.

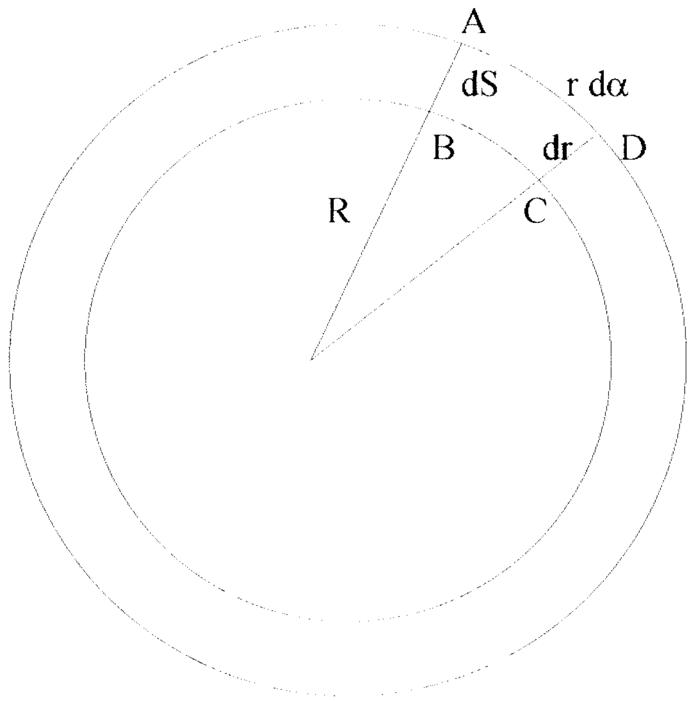
Příklad 2. Vypočteme moment setrvačnosti hmotného kruhu o poloměru R vzhledem k ose jdoucí těžištěm kolmo k rovině kruhu.

Řešení.

Na obr. 13 je zakreslen kruh a jeho diferenciál dS. Diferenciál plochy kruhu je tedy tvořen křivostranným lichoběžníkem ABCD. Bude-li tento lichoběžník limitně malý, změní se v obdélníček se dvěma stranami AB = CD = dr a dvěma stranami BC = DA = r dα. Plocha tohoto obdélníčka tedy bude dS = r dr dα, hmotnost dm tohoto diferenciálu je dm = σ dS, kde σ je hustota materiálu kruhu, tedy dm = σ r dr dα. Moment dJ tohoto diferenciálu je $dJ = r^2 dm \Rightarrow dJ = r^2 \sigma r\, dr\, d\alpha = \sigma r^3\, dr\, d\alpha$. Moment celého kruhu (vzhledem k O) dostaneme integrací

$$\boxed{J = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\alpha = \sigma \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{1}{2} \sigma \pi R^2 R^2 = \frac{1}{2} m R^2 \quad (4)}$$

kde m je hmotnost kruhu.



Obr. 13. K diferenciálu kruhu.

Moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí jiným bodem bude jiný.

Příklad 3. Vypočíst moment setrvačnosti tenkostěnného válce vzhledem k jeho ose.

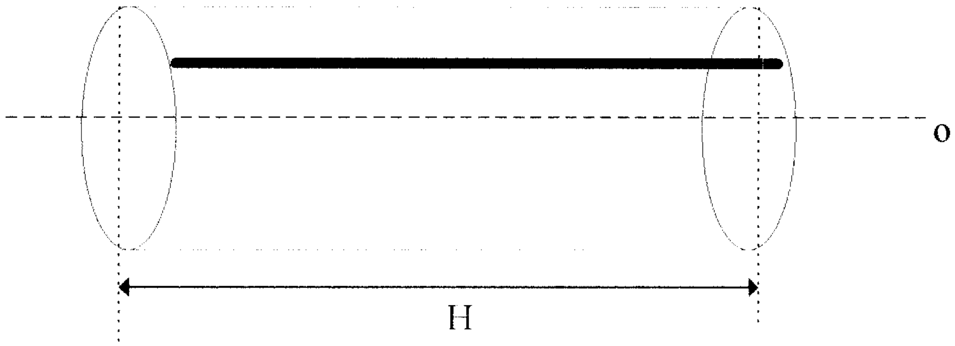
Řešení. Tenkostěnný válec o poloměru R je zakreslen na obr. 14 má se vypočíst jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose o . Výška válce je H, hustota jeho látky je σ. Za diferenciál hmotnosti válce zvolíme nekonečně tenký proužek válce rovnoběžný s osou o tj s osou X. Tento diferenciál nemůžeme považovat za hmotný bod, neboť má konečnou délku H, jde však o diferenciál hmoty, protože v limitě je jeho hmotnost nulová. Pro hmotnost dm tohoto diferenciálu platí $dm = \sigma\, dS = \sigma\, H\, ds = \sigma\, H\, R\, d\alpha$. Moment dJ diferenciálu dm vzhledem k ose o je $dJ = dm\, R^2 =$

$= \sigma\, H\, R\, d\alpha\, R^2 = \sigma\, H\, R^3\, d\alpha$.

Protože válec je tenkostěnný, např vyrobený z plechu, můžeme o diferenciálech dm předpokládat, že nemají prakticky žádnou tloušťku, tedy že jsou všechny od osy o vzdáleny R a integrujeme:

$$\boxed{J = \sigma\, H\, R^3 \int_0^{2\pi} d\alpha = \sigma\, H\, R^3\, 2\pi = \sigma 2\pi R\, R^2 = mR^2 \qquad (5)}$$

Moment setrvačnosti téhož válce vzhledem k jiné ose bude jiný.



Obr. 14. *Tenkostěnný válec. Diferenciál plochy obdélníka je vyznačen černým pruhem.*

8. Druhá věta impulzová

Chceme charakterizovat časové působení síly, momentu síly a potom zavést pojem rotační náraz. Kromě toho požadujeme přenesení těchto úvah z hmotného bodu na hmotnou soustavu. Připomeňme proto druhý Newtonův pohybový zákon pro hmotný bod: $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1)}$, kde **F** je výslednice vnějších sil na bod působících. Vynásobíme dt a integrujeme: $\boxed{\vec{F}\,dt = d\vec{p} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} \quad (2)}$. Předpokládáme-li **F** = konst, pak odtud máme $\boxed{\vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad (3)}$. Výraz $\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \mathbf{I} \quad (4)}$ nazveme **impulz síly F.** Tento vektor charakterizuje *časové* působení síly, zatímco *dráhové* působení síly vyjadřuje skalár zvaný *práce* $A = \int (\vec{F}.d\vec{s})$, jak jsme definovali již dříve.

Nyní připomeňme moment **M** síly **F** vzhledem k bodu s průvodičem **r**: **M** = [**r** x **F**]. Sem dosadíme za **F** z (1) a dostaneme: $\boxed{\vec{M} = [\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}] = \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{p}] \quad (5)}$. Výraz na pravé straně (5) se nazývá **moment hybnosti** hmotného bodu vzhledem k danému bodu. Někdy se nazývá **točivost**. Označíme [**r** x **p**]= **b** a máme $\boxed{\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M} \quad (6)}$. Analogicky s dobovým účinkem síly bude dobový účinek momentu vyjádřen rovnicí $\boxed{\vec{b}_2 - \vec{b}_1 = \int_{t_1}^{t_2} M\,dt = \vec{L} \quad (7)}$. Tento dobový účinek se nazývá **rotační impulz** nebo **rotační náraz.** Je li moment **M** po dobu t_2-t_1 stálý, pak $\boxed{\vec{b}_2 - \vec{b}_1 = \vec{M}(t_2 - t_1) \quad (8)}$.

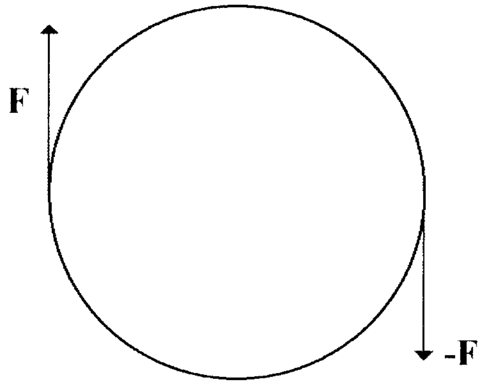
Zobecnění od hmotného bodu k hmotné soustavě vyjadřují pak tyto Věty:

Věta 1 - první věta impulzová neboli **věta o hybnosti soustavy:** *Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výsledné vnější síle.* ♣♣♣

Věta 2 - druhá věta impulzová: Jak jsme viděli, pro 1 hmotný bod platí $\boxed{\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M} \quad (9)}$, pro i-tý bod tedy máme $\frac{d\vec{b}_i}{dt} = \vec{M}_i$. *Vztah (9) nyní říká, že časová změna točivosti soustavy hmotných bodů vzhledem k libovolnému pevnému bodu je rovna výslednému vnějšímu momentu vzhledem k témuž bodu.* ♣♣♣

Příklad 4. Homogenní hmotný kruh o poloměru R = 3m zhotovený z látky o hustotě $\sigma = 700\ kg/m^3$ byl ve vzduchu roztočen ve vodorovné rovině kolem osy jdoucí jeho středem kolmo na jeho rovinu a tedy i na vodní hladinu. Pak byla roztáčecí silová dvojice odstraněna, úhlová rychlost byla $\omega_1 = 6\pi/s$ a kotouč byl opatrně položen vodorovně na vodní hladinu. Třením o vodu se jeho rotace za 75 vteřin zastavila.

Má se vypočíst moment sil tření kruhu o vodu a vyjádřit tento moment jako moment dvojice sil **F** a **-F** tečných k obvodu kruhu a napevno k němu vázaných.



obr. 15

Výpočet se má provést jednak přímo ze vztahu mezi momentem M a J a β a za druhé z časové změny momentu hybnosti.

Řešení

Budeme předpokládat, že úhlové zpomalení β při tření kruhu o vodu je konstantní. Jak víme, platí M = Jβ. Moment setrvačnosti J hmotného kruhu jsme stanovili již dříve; vyšlo $J = mR^2/2$. Úhlové zpomalení -β je podle definice $\beta = d\omega/dt \Rightarrow \beta\, dt = d\omega$ a integrujeme:

$\beta\int_0^{75} dt = \beta t\Big|_0^{75} = 75\beta = \int_{6\pi}^{0} d\omega = -6\pi$, tedy $75\beta = -6\pi \Rightarrow \boxed{\beta = -\frac{6\pi}{75} \quad (a)}$. Přímým výpočtem tedy máme $M = 2RF \Rightarrow F = \frac{M}{2R} \Rightarrow F = \frac{J\beta}{2R} = \frac{\sigma\pi R^2 R^2 \beta}{4R} = \frac{\pi\sigma R^3\beta}{4} =$

$= \pi.700\frac{27.6\pi}{4.75} \Rightarrow F = 3730{,}7$ N.

Počítáme totéž druhou metodou. Moment hybnosti **b** je podle definice **b**=[**r** x **p**]=[**r** x dm **v**]=dm [**r** x **v**] = dm [**r** x [ω x **r**]]. Opět aplikujeme pravidlo: [**r** x [ω x **r**]] = (**r**.**r**)ω -- (**r**.ω)**r** = r^2 ω, takže dm[**r** x **v**] = dm r^2 ω. Avšak u rovnoměrně zpomalené rotace je ω = β t, takže dm[**r** x **v**] = dmr^2 β t.

Hmotnost diferenciálu kruhu je dm = σ dS = σ r dα dr ⇒ dm = σ r dr dα ⇒

dm[**r** x **v**] = d**b** = σ r dr dα r^2 ω = σ r^3 dr dα ω, kde již píšeme ω jako skalár, protože jeho směr je kolmý na rovinu kruhu a na směru rotace zde nezáleží. Dosadíme ω = β t a máme db = dm[r x v] = σ r^3 dr dα β t. Derivujeme: db/dt = d(σ r^3 dr dα β t)/dt = σ β r^3 dr dα a máme integrovat přes celou plochu kruhu: Tak dostaneme:

$$\int\frac{db}{dt} = \sigma\beta\int_0^{2\pi} d\alpha\int_0^{R} r^3 dr = \sigma\beta\alpha\Big|_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{R} = \sigma\beta 2\pi\frac{R^4}{4} = \beta\pi R^2\sigma\frac{R^2}{2} =$$

$$= \beta\sigma V\frac{R^2}{2} = m\beta\frac{R^2}{2} = J\beta = M = 2RF \Rightarrow F = \frac{J\beta}{2R} = \frac{mR^2\beta}{4R} =$$

$$\frac{\sigma\pi R^2R^2\beta}{4R} = \frac{\pi\sigma R^3\beta}{4} = \pi\, 700\frac{27.6\pi}{4.75} \Rightarrow \boxed{F = 3730{,}7\text{ N.}}$$

Vidíme, že vyšel stejný výsledek jako při aplikaci první metody.

O B S A H

Konec části IV Dílu 1