cvicdoc5.doc

DÍL 1
ČÁST V
VLNY

1.Vlnová rovnice

Ze zkušenosti je známo a mnoha experimenty potvrzeno, že v plynech, kapalinách a pevných látkách se šíří mechanické rozruchy. Běžně pozorovatelné jsou tyto rozruchy na vodní hladině, kde bezprostředně zrakem pozorujeme, že tyto rozruchy mají tvar vln. Bezprostředně je vnímatelný i zvuk a světlo, avšak trvalo dlouho, než se ukázalo, že zvuk není nic jiného než mechanické vlnění, nejčastěji šíření vln ve vzduchu, ale případně i v jiném plynu a také ve vodě nebo v jiné kapalině. Nejlépe a nejjemněji vnímatelné je světlo, o němž se poznalo ještě později, že se šíří také vlněním, jehož podstata však není mechanická, ale elektromagnetická, tedy stejná, jako u rozhlasových, televizních, radarových a podobných vln. Elektromagnetické vlny se však šíří i ve vakuu, zatímco mechanické vlny se šíří jen hmotným prostředím.

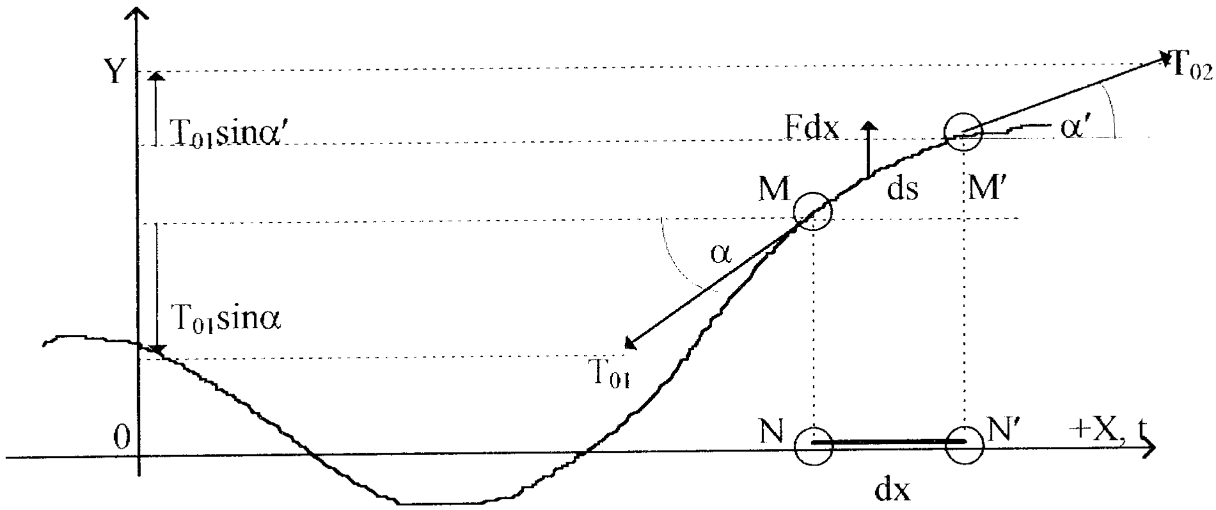
Mechanické vlny vznikají tak, že částice prostředí na sebe silově působí, takže pohyb první **vzbuzené** částice se přenese na obě částice sousední, od nich zase na sousední atd, čímž vlna vzniká a šíří se prostředím. Povšimněme si, že pro vznik vln v hmotném prostředí je zapotřebí mnoha částic, nemá smysl mluvit o vlnění několika nebo dokonce jediné částice. Při vlnění se tedy přenáší *pohyb (rozruch)* postupně na další a další částice, takže vlna je sdílený lokální pohyb, ačkoliv prostředí jako **celek** se žádným výsledným směrem nepohybuje. Pohybují se pouze zcela lokálně jednotlivé částice vlnícího se prostředí.

Detailní výzkumy ukázaly, že pohyb jednotlivých částic vlnícího se prostředí je pohyb *kmitavý*, nám již dobře známý. Proto si můžeme každou částici či každý diferenciál vlnícího se prostředí představit jako *oscilátor*. Vlna pak není nic jiného než určitým způsobem sfázovaný pohyb těchto oscilátorů. Protože každé dva sousední oscilátory musí být nějak silově vázány, aby k vlnění vůbec došlo, považujeme vlnu za *sfázovaný pohyb* (silově) *spřažených oscilátorů.* Celé vlnící se prostředí, tj celou množinu těchto oscilátorů tedy považujeme za **soustavu spřažených hmotných bodů.**

Kmitají-li oscilátory *ve směru šíření vlnění,* nazývá se vlnění **podélné**, kmitají-li *kolmo ke směru šíření vlnění,* nazývá se vlnění **příčné**. Jiné typy vlnění nejsou známy (nepočítáme-li *povrchové* vlny), v některých případech se však vyskytuje příčné a podélné vlnění současně. Vlna tedy vzniká tak, že nějaká vnější síla způsobí vychýlení některého diferenciálu daného prostředí z jeho rovnovážné (tj klidové) polohy a pak již může tato vnější síla vymizet. Vychýlený diferenciál, který je spřažen se svými sousedy, se začne vracet do klidové polohy, kolem ní začne kmitat, totéž učiní jeho sousedé, dále pak sousedé těchto sousedů atd; tak vzniká a šíří se vlnění.

Obecně se vlnění může šířit mnoha, popř všemi směry. Omezíme se na *šíření jedním směrem*, na obr. 1 jen ve směru vodorovné osy X, a ještě dále se omezíme na případ, kdy i *samo prostředí je jednorozměrné*. Takovým prostředím je např *struna*. Na obr. 1 je tedy znázorněna část struny, a to struny *nekonečně dlouhé*. Nekonečně dlouhou strunu předpokládáme proto, že nemá konce, na nichž u struny konečné délky dochází k odrazu vln a to výpočet komplikuje. Představujeme si strunu **ideální**, tj *nekonečně tenkou a dokonale ohebnou, nikoliv však nehmotnou*. Strunu v představě rozdělíme na diferenciály, které považujeme za oscilátory. Vazbu mezi každými dvěma sousedními oscilátory představuje síla, která prostě drží strunu pohromadě. Podle těchto představ není tedy struna nic jiného než **lineární řetězec vzájemně vázaných** (neboli **spřažených) oscilátorů.** Osu X spolu s osou času t jsme položili do struny, tedy vodorovně.

Omezíme se na zkoumání *malých kmitů*. Kmity považujeme za malé tehdy, když tečna ke struně v libovolném jejím bodě svírá s vodorovnou osou tak malý úhel α, že je možno s dostatečnou přesností položit $\sin\alpha = \alpha$ a $\cos\alpha = 1$ (první členy Taylorových řad). Vodorovnou osu, tj osu *směru šíření vlny* jsme na obr. 1 označili +X, takže α je úhel, který svírá tečna k vlně s osou X. Každý diferenciál dx struny považujeme za oscilátor silově spřažený s oběma svými sousedy a kmitající ve směru osy Y, tedy kolmo neboli napříč ke směru osy X, tj napříč směru šíření vlny, takže zkoumáme *příčné vlny*. Jsou to tedy vlny, šířící se směrem X vyvolané kmitáním diferenciálů dx daného prostředí (u nás struny) ve směru Y. Vlnění tak probíhá v rovině X0Y a v čase t,



OBR. 1. K odvození vlnové rovnice. Pro názornost jsou zakresleny kmity velké, ačkoliv my se omezíme na kmity malé. Symbolem **F** dx *je označena ta složka vnější síly, působící na dx ve směru Y.Symbolem* α *rozumíme* $\alpha = \alpha + \pi$.

takže máme dvě nezávisle proměnné; polohu x a čas t. Diferenciál dx o souřadnici x má v čase t nějakou výchylku y ve směru osy Y, tedy $y = y(x,t)$. Výchylka y je tedy proměnná závisející na **dvou nezávisle proměnných** x a t. To je naše první úloha, v níž se vyskytují dvě nezávisle proměnné. Máme odvodit rovnici určující výchylku y struny v libovolném místě x v libovolném budoucím čase t. Poznamenejme, že pro začátek zkoumání vln jsme si vybrali vlnu příčnou proto, že příčné vlny, na rozdíl od vln podélných, jsou názorné, snadno viditelné. Jsou to např vlny na vodní hladině vzniklé vhozením kamene a podobně.

Sestavíme pohybovou rovnici struny podle druhého Newtonova pohybového zákona. Uvažujeme proto takto. V klidovém stavu je struna napnuta silou $\mathbf{T}_0$ a leží v ose X. Body N a N′ na ní vymezují diferenciál její délky dx. Pak necháme kolmo na strunu, tedy ve směru Y, působit nějakou sílu. Část této síly působící na jeden metr struny označíme **F**. Takovou silou může být např síla větru kolmého na strunu. Ten dokáže strunu rozezvučet, jak můžeme pozorovat sluchem na drátech venkovního elektrického vedení mezi sloupy. Délka drátu mezi dvěma sousedními sloupy není sice nekonečná, takže dochází k odrazu vln, ale na základním ději, jímž je rozezvučení drátů, to nic nemění. Naším sluchem vnímaný zvuk drátů vzniká takto: vlivem síly větru se dráty *rozvlní*. Toto vlnění, které je *příčné*, se přenese na okolní vzduch, v němž následkem toho vznikne také vlnění. Toto vlnění je však *podélné* a my je vnímáme jako **zvuk**. Při podélném vlnění kmitají diferenciály prostředí (vzduchu) ve směru neboli *podél* směru šíření vlnění.

Náš diferenciál, který má v klidu délku dx, se při kmitání různě deformuje (prohýbá) a takto deformovaný označíme jej ds místo dx. Hmotnost dm diferenciálu se však nemění, tedy hmotnost dm diferenciálu délky dx se rovná hmotnosti dm diferenciálu ds a dm se rovná $\boxed{dm = \rho\, dx \quad (1)}$, kde ρ (malé ró) je *délková hmotnost neboli hustota materiálu struny*. Protože strunu považujeme za jednorozměrné těleso, měli bychom hustotu materiálu struny označovat τ, neboť jde o hustotu délkovou. Protože však τ použijeme brzy ve významu času, budeme hustotu materiálu struny označovat ρ, což je správně symbol pro označení hustoty objemové. Působí-li na metr délky struny síla **F** (např od větru), pak na diferenciál délky dx působí pouze část této síly. Velikost této části síly je **F**dx.

Bod, který ve stavu klidu byl v místě N (obr. 1) o souřadnici x, zaujme v čase t místo M. Výkmit či posunutí NM ve směru Y jsme již označili y. Jak již bylo řečeno, naším cílem je nalézt posunutí y libovolného bodu x struny v libovolném čase t, takže hledáme y jako funkci x a t, $y = y(x,t)$.

Abychom mohli dosadit do Newtonovy pohybové rovnice diferenciálu dm, najdeme všechny vnější síly, které na něj působí. Tyto síly jsou tři: síla **F**dx (např od větru), síla T_{01}, kterou působí na dx celá část struny vlevo od dx a síla $\mathbf{T}_{02}$, kterou působí na dx celá část struny vpravo od dx. Síla **F**dx působí na diferenciál dx neboli ds po celé jeho délce ve směru Y. Pokud by vnější síla měla i složku F_X ve směru X, pak tato složka nemá na pohyb diferenciálu dx vliv, neboť pohyb se děje jen ve směru Y. Síla T_{02} působí na ds v bodě M′ a má směr tečny k ds v tomto bodě a míří zleva doprava. Síla $\mathbf{T}_{01}$ působí na ds v bodě M a má směr tečny k ds v tomto bodě a míří zprava doleva. Předpokládáme, že žádné další vnější síly na náš diferenciál struny nepůsobí (takže zanedbáváme i sílu gravitační, kterou na ds působí Země).

Řekli jsme, že se omezíme na malé kmity, tedy na kmity, při nichž je v libovolném čase úhel α tečny k okamžitému tvaru ds původně klidného diferenciálu dx malý. Nechť tedy je α ostrý úhel, který svírá tečna k ds s osou +X, obr.1. Směrnice tečny je $\mathrm{tg}\alpha$ a tangenta je geometrickým znázorněním derivace, v našem případě

$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial y}{\partial x} \quad (2)}$. Tuto rovnici čteme: tangens úhlu α rovná se první (parciální) derivaci funkce y podle x. Stručně: tangens α je y parciálně podle x. Symbol ∂ je symbol parciální derivace a žádné jméno nemá (zavedl jej fyzik a matematik Bernoulli, čti Bernuli).

Dále platí pro libovolné α: $$\sin\alpha = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\cos\alpha}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} \Rightarrow$$

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

Nyní využijeme předpokladu, že α je malé. Pro α malé je také $\mathrm{tg}\alpha$ malé. Jestliže je tedy $\mathrm{tg}\alpha$ tak malé, že je můžeme zanedbat proti jedničce, pak je $\mathrm{tg}^2\alpha = \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ ještě menší a tím spíše je proti jedničce (ve jmenovateli) můžeme zanedbat. Tak dostáváme z poslední rovnice $\boxed{\sin\alpha \cong \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x} \quad (3)}$. Na diferenciál ds vlnící se struny působí, jak již víme, tyto vnější síly: tečná napínací síla T_{02} v bodě M′, která svírá ostrý úhel α' s osou +X, tečná napínací síla T_{01} v bodě M, která svírá s osou +X tupý úhel α a síla **F**dx ve směru osy Y. Z předpokladu, že α je malé dále plyne, že *velikost* napínacích sil $\mathbf{T}_{01}$ v bodě M a $\mathbf{T}_{02}$ v bodě M′ se liší jen zanedbatelně, takže jejich velikosti můžeme považovat za stejné, T_0. Jejich směry se ovšem liší výrazně, téměř přesně o π. Je zřejmé, že $\sin\alpha'$ je kladný (jsme v prvním kvadrantu) a $\sin\alpha$ je záporný (jsme ve třetím kvadrantu).

Nejprve předpokládejme, že diferenciál struny ds je v rovnováze; takový případ nastává, držíme-li strunu prstem pevně ve vychýlené poloze. Pak za ds můžeme vzít kterýkoliv diferenciál oblouku struny obepínajícího prst. *Protože* ds *je v rovnováze, musí být v rovnováze průmět všech tří sil na přímku, v jejímž směru je pohyb možný.* Tímto směrem je Y. Ve stavu statické rovnováhy musí být průmět součtu těchto sil do směru Y nula. Tak dostáváme: $T_0 \sin\alpha' - T_0 \sin\alpha + F\,dx = 0$ neboli

$\boxed{T_0(\sin\alpha' - \sin\alpha) + F\,dx = 0 \quad (4)}$, kde α' je hodnota úhlu α v bodě M', takže

podle (3) platí dostatečně přesně: $\sin\alpha' \cong \mathrm{tg}\alpha' = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'}$; $\sin\alpha \cong \mathrm{tg}\alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_M$.

Tím (4) dostane tvar $\boxed{T_0\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_M\right] + F\,dx = 0 \quad (5)}$.

Výraz v hranatých závorkách však není nic jiného než přírůstek hodnoty *první* derivace $\partial y/\partial x$ způsobený změnou nezávisle proměnné z hodnoty x na hodnotu (x + dx). Derivace $\partial y/\partial x$ je však také funkcí x a přírůstek každé funkce, tedy i derivace, je možno zaměnit jejím diferenciálem. Abychom další postup vysvětlili detailně, diskutujme nejprve jen jednu nezávisle proměnnou x a její funkci w = w(x).

Uvažujeme takto: Označíme $N' - N \equiv N'N = \Delta x$. Výraz $M'-M = w(N') - w(N) = y_{N'} - y_N$ je přírůstek funkce y na intervalu N'N. Označíme $y_{N'} - y_N = \Delta w$. Limita podílu $\Delta w/\Delta x$ je derivace funkce w v bodě N a označuje se w'_N, tedy $w'_N = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \left(\frac{dw}{dx}\right)_N$.

V obecném, libovolném bodě x se prostě píše $w' = \frac{dw}{dx}$. To jsme diskutovali první derivaci.

Zůstaneme ještě u funkce w = w(x) a diskutujme druhou derivaci. Proto vezmeme první derivaci v bodě N', tedy $w'_{N'}$ a odečtem od ní první derivaci v bodě N, tedy w'_N. Tak dostaneme $w'_{N'} - w'_N$. To je rozdíl prvních derivací v bodech N' a N, který označíme $\Delta w'_N$, tedy $\Delta w'_N = w'_{N'} - w'_N$. A počítáme limitu: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w'_N}{\Delta x} \equiv \left(\frac{dw'}{dx}\right)_N$ .V libovolném bodě x (tedy nejen v N) píšeme prostě $\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w'}{\Delta x} = \frac{dw'}{dx} \quad (6)}$. Tak jsme vyjádřili derivaci derivace funkce w. Sem dosadíme $w' = \frac{dw}{dx}$ a máme

$\frac{dw'}{dx} = \frac{d}{dx} w' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\frac{dw}{dx} = \frac{d^2 w}{(dx)^2} = \frac{d^2 w}{dx^2}$, tedy $\boxed{\frac{dw'}{dx} = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (7)}$, což je již označení druhé derivace funkce w takové, jak je zavedli Newton a Leibnitz, nezávislí zakladatelé diferenciálního a integrálního počtu. Vynásobením posledního vztahu diferenciálem dx dostáváme $\boxed{dw' = \frac{d^2 w}{dx^2} dx \quad (8)}$, což je vztah mezi diferenciálním přírůstkem dw' první derivace, druhou derivací w podle x, tj $\frac{d^2w}{dx^2}$, a diferenciálem nezávisle proměnné dx. Když jsme právě ukázali, jak výraz $\frac{d^2w}{dx^2}$ pro druhou derivaci vznikl, je potřeba chápat jej jako nedělitelný symbol, takže v žádném případě nelze dx krátit, tj **nelze** napsat např $\frac{d^2w}{dx^2}.dx = \frac{d^2w}{dx}$. To v žádném případě nelze, výraz na pravé straně nemá v matematice žádný smysl, kdežto výraz $\frac{d^2w}{dx^2}dx$ význam má; říká, že druhou derivaci funkce w podle x máme násobit diferenciálem dx nezávisle proměnné x.

Právě zjištěné poznatky aplikujeme na náš případ. Výraz v hranaté závorce v (5) je $\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M}\right]$ a to není nic jiného než rozdíl hodnot první derivace funkce y ve dvou blízkých bodech M′ a M; píšeme ovšem derivace parciální, protože y(x,t) je funkcí dvou proměnných x a t. Také píšeme M′ resp M místo N′ resp N, abychom zvýraznili skutečnost, že struna při vlnění je namáhána v bodech M′ resp M a nikoliv v bodech N′ resp N.

Na místo výrazu $\Delta w'_N = w'_{N'} - w'_N$ máme nyní výraz tvaru $\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M}\right]$.

Napišme $\Delta y'_M = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M} = y'_{M'} - y'_M$, kde jsme stručně označili parciální derivace y podle x jen čárkou, a počítejme limitu podílu $\Delta y_M/\Delta x$, když Δx se blíží k nule, tj když M′ se blíží k M: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'_M}{\Delta x}$ neboli v obecném bodě struny (tj nejen v bodě M) prostě $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} y' = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{(\partial x)^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, kde již zase píšeme parciální derivace místo obyčejných na znamení, že y(x,t) je funkcí dvou nezávisle proměnných. Máme tedy $\frac{\partial}{\partial x} y' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Tuto rovnici vynásobíme diferenciálem dx nezávisle proměnné x (píšeme prozatím ∂x místo dx na znamení, že y je funkcí dvou nezávisle proměnných) a dostáváme $\boxed{\partial y' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\partial x \quad (9)}$, což je vztah mezi diferenciálním přírůstkem $\partial y'$ první derivace, druhou derivací y(x,t) podle x, tj $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, a diferenciálem nezávisle proměnné ∂x. Je však zvykem samotný tento diferenciál v součinu označovat místo ∂x jen dx, takže místo (9) se píše $\boxed{\partial y' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx \quad (10)}$. Jde tedy o postup zcela analogický s postupem u vzorce (8), rozdíl je pouze ten, že nyní píšeme v druhé derivaci symbol parciální derivace ∂ místo d, neboť jde o funkci y(x,t) dvou nezávisle proměnných, v součinu však ponecháváme dx, stejně, jako by šlo o derivaci funkce jedné nezávisle proměnné x.

Nyní se vrátíme ke vzorci $\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_M\right]$, který je rozdílem hodnot první parciální derivace ve dvou blízkých bodech M′ a M. Když se bod M′ limitně přiblíží k M, můžeme napsat $\lim\limits_{M'\to M}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_M\right] = \partial y'\big|_M$, kde y′ opět značí parciální derivaci $\partial y/\partial x$. Protože bod M byl vybrán libovolně, přestaneme jej již explicitně uvádět a řekneme, že diferenciál parciální derivace v libovolném bodě x je $\partial y'$. Pak ovšem můžeme $\partial y'$ vyjádřit výrazem podle (9) a tak konečně dostáváme

$$\boxed{\lim_{M'\to M}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_M\right] = \partial y'\big|_M = \partial y' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx \quad (11)}$$

Rovnice (5) byla rovnicí *statické rovnováhy* diferenciálu dm o velikosti dx (statické proto, že neobsahuje čas). Dosadíme do ní (11) a máme $\boxed{T_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx + F\,dx = 0 \quad (12)}$. Dosud jsme strunu drželi v poloze vychýlené z polohy klidové. Nyní ji uvolníme. V tom okamžiku síla $\mathbf{F}_Y$ dx vymizí a jediná výsledná vnější síla, která na diferenciál struny působí, je $\boxed{T_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx \quad (13)}$.

Podle druhého Newtonova zákona se výslednice vnějších sil rovná časové změně hybnosti. Změna hybnosti diferenciálu o pevné hmotnosti dm a délce dx je dm krát zrychlení. Zrychlení je druhá derivace dráhy podle času. Náš diferenciál se může pohybovat jen po dráze y ve směru Y a toto y je funkcí souřadnice x a času t. Jeho zrychlení je tedy $\partial^2 y/\partial t^2$; píšeme opět symboly parciálních derivací, protože y(x,t) je funkcí dvou proměnných. Hmotnost je podle (1) dm = ρ dx, takže časová změna hybnosti neboli hmotnost krát zrychlení je $dm\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\rho\,dx$ a druhou Newtonovu pohybovou rovnici diferenciálu struny dostáváme ve tvaru $T_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,dx = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\rho\,dx$. Vydělíme dx a dostaneme $T_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\rho$. Vydělíme ρ a položíme $\boxed{\frac{T_0}{\rho} = v^2 \quad (14)}$ což můžeme, protože T_0 i ρ jsou kladná čísla, a máme $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (15)}$.

Rovnice (15) se jmenuje **rovnice vlastních kmitů struny** nebo také **vlnová rovnice struny**. Tato rovnice platí však nejen pro strunu, ale také pro jakoukoliv *rovinnou vlnu* (podélnou nebo příčnou). Jako parciální diferenciální rovnice platí v limitě pro velmi malý prostor, v němž můžeme dokonce **každou** vlnu považovat za rovinnou.

Povšimneme si, že na strunu jako na celek nyní nepůsobí žádné vnější síly, neboť sílu **F** (prstu, větru) jsme odstranili. Přesto se struna stále vlní, tak, jako netlumený oscilátor donekonečna kmitá, není-li zásahu vnějších sil.

2. Řešení rovnice vlastních kmitů struny neboli řešení vlnové rovnice

Rovnice (15) oddíl 1, tj (1,15) která je *parciální diferenciální rovnicí druhého řádu* (obsahuje druhé derivace podle *dvou* nezávisle proměnných x a t) platí, jak bylo řečeno, zcela obecně, tj pro každý druh vlnění, nejen pro strunu, a proto se stručně nazývá **vlnová rovnice**. Funkce, která je jejím řešením, se nazývá **řešení vlnové rovnice.** Existuje mnoho funkcí, které jsou řešeními naší diferenciální vlnové rovnice. Řešení pro nekonečně dlouhou strunu nalezl jako první d´ Alembert. Jeho metoda je však dosti složitá. My se proto pokusíme nalézt řešení jednoduššími úvahami.

Nejdříve stanovíme fyzikální rozměr veličiny v^2 resp v. Podle (1,14) je v odmocnina z podílu síly T_0 a hmotnosti ρ jednoho metru struny neboli její délkové hustoty. Proto je $[v]=\sqrt{\frac{[T_0]}{[\rho]}}=\sqrt{\frac{N}{kg\,m^{-1}}}=\sqrt{\frac{kg\,m\,s^{-2}}{kg\,m^{-1}}}=\sqrt{\frac{m^2}{s^2}}=\frac{m}{s}$ a to je rozměr rychlosti, kterou jsme již označili v, i když ještě nevíme, co vlastně se touto rychlostí pohybuje.

V dalších úvahách budeme na základě zkušeností a pokusů předpokládat, že vlna na struně se od místa svého vzniku šíří *konstantní rychlostí* na obě strany podél osy X. Označme rychlost šíření vlny C. Uvidíme, že C = v. Ať již mají v a C prozatím jakoukoliv hodnotu, je to konstanta a my se zamyslíme nad vlnovou rovnicí, kterou si sem zkopírujeme:

$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (0)}$. Uvědomíme si známou skutečnost, že druhou derivací sínusovky je zase sínusovka a obdobně pro kosínusovku. Zkusme proto řešení ve tvaru y(x,t) = cos(ax + bt). Má-li tato funkce být řešením vlnové rovnice, znamená to, že jí musí vyhovovat. Počítejme tedy nejprve druhé parciální derivace. Parciální derivací dané funkce podle libovolné proměnné se rozumí to, že danou funkci podle této proměnné derivujeme tak, jako by všechny ostatní proměnné byly konstanty. Tak dostáváme:

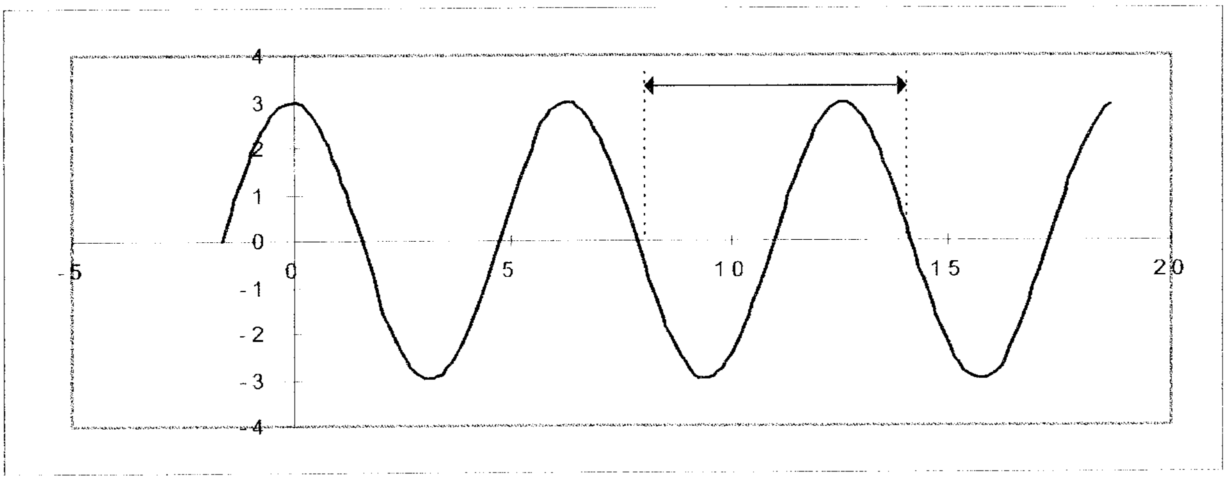
$$\frac{\partial y}{\partial x} = -a\sin(ax+bt), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -a^2\cos(ax+bt),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -b\sin(ax+bt), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -b^2\cos(ax+bt).$$

Vidíme, že jak první, tak zejména druhé parciální derivace y podle x i podle t jsou, až na konstanty, stejné. Z toho usuzujeme, že kosínusovka a obdobně sínusovka je v zásadě řešením vlnové rovnice, takže se na ně soustředíme.

Na obr. 2 je zakreslena plnou čarou kosínusovka $\boxed{y(x,t) = 3\cos(ax+bt) \quad (1)}$ v čase t, v němž její vrchol právě prochází počátkem 0 souřadnic X a Y. Řekněme, že kosínusovka znázorňuje vlnu na struně, šířící se zleva doprava rychlostí C. Touto rychlostí se tedy pohybují zleva doprava všechny body kosínusovky, např tedy každý její vrchol a každý její průsečík s osou X. Pro bod x = 0 tedy v čase t je y = 3, což je amplituda vlny, kterou obecně označíme A.

Kosínusovka, obecně *rozruch prostředí,* se tedy šíří rychlostí C ve směru osy X.. Jak se však pohybují diferenciály dm tohoto prostředí? Sledujme pohyb diferenciálu dm, který se právě nachází v bodě x = 0 a právě má maximální výchylku y, tj právě dosahuje amplitudy y = A, u nás A = 3. Jak se vlna (kosínusovka) pohybuje doprava, souřadnice y diferenciálu dm v bodě x = 0 se nejprve zmenšuje na nulu a dále až na -A (u nás na -3), pak se y zase zvětšuje, prochází nulou a dosáhne +A, pak zase klesá, až znovu dosáhne nuly atd a to vše přesně podle naší kosínusovky. Jinými slovy, diferenciál struny, jehož klidovou polohou je počátek souřadnic y = 0, koná pohyb daný rovnicí $\boxed{y = A\cos\omega t \quad (2)}$. Tak se ukázalo, že diferenciál struny mající klidovou polohu v počátku souřadnic 0 *harmonicky kmitá* s amplitudou A a s určitou úhlovou rychlostí ω sdruženého pohybu kruhového s dobou kmitu $T = 2\pi/\omega$ tj s frekvencí $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$.



OBR.. 2. Dvojšipka ⟷ *zobrazuje délku vlny neboli vlnovou délku.*

Přicházíme k jádru úvahy. Nechť struna leží *v klidu* v ose X. Zvolme na ní libovolný bod B o souřadnici x. Pak vychýlíme strunu v počátku souřadnic 0, uvolníme, a diferenciál struny ležící v 0 začne kmitat podle rovnice (2) ve směru osy Y. Rozruch neboli tzv **fáze** se od bodu 0 šíří vlevo i vpravo rychlostí C, neboli struna se začíná vlnit. Do bodu B o souřadnici x dorazí vlna, přesněji řečeno libovolná, ale pevně zvolená fáze vlny, rovnoměrným přímočarým pohybem za čas τ (malé tau), $\boxed{\tau = \frac{x}{C} \quad (3)}$. Bod B začne tedy kmitat o čas τ později než bod (diferenciál dm) v počátku 0, takže pro B platí $y = A\cos\omega(t-\tau)$ neboli podle (3) $\boxed{y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{C}\right) \quad (4)}$. Ukážeme, že *tato funkce je řešením vlnové rovnice* (0).

Předně, y podle (4) skutečně jednoznačně stanovuje výchylku y libovolného bodu struny o souřadnici x v libovolném čase t, což byl zásadní požadavek na řešení. Kromě toho ovšem musí vyhovovat vlnové rovnici (0). Abychom se o tom přesvědčili, počítejme nejprve parciální derivace podle x a podle t:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{A\omega}{C}\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{C}\right)\right], \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{A\omega^2}{C^2}\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{C}\right)\right],$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{C}\right)\right], \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{C}\right)\right].$$

Porovnáním obou druhých derivací vidíme, že má-li platit vlnová rovnice (1), musí být $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Leftrightarrow -A\omega^2\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{C}\right)\right] = -v^2\frac{A\omega^2}{C^2}\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{C}\right)\right]$ a po vykrácení $A\omega^2$ musí být $1 = \frac{v^2}{C^2} \Rightarrow \boxed{v = C \quad (5)}$. To znamená, že **konstanta** v **ve vzorci (0) má význam rychlosti** C **šíření fáze vlny ve směru osy X.** Rychlosti C říkáme rychlost *fázová* pro vyjádření faktu, že touto rychlostí se nepohybuje žádná hmota, ale *rozruch* v dané hmotě (tj v daném prostředí). U naší vlny se tedy rychlostí C ve směru X pohybují libovolné, ale pevně zvolené stejně velké výchylky y vlny. Jinými slovy lze říci, že rychlostí C se pohybuje **čelo vlny**.

Tak jsme zjistili, že jedním, tedy *partikulárním* řešením zcela obecné vlnové rovnice (0) je funkce y(x,t), $\boxed{y \equiv y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{C}\right)\right] \quad (6)}$, kde A je amplituda kmitů oscilátorů (tj diferenciálů dm) tvořících strunu nebo stručně amplituda vlny, ω je úhlová rychlost kruhového pohybu sdruženého s pohybem každého jednotlivého oscilátoru a C je rychlost šíření fáze vlny ve směru X. Funkce y(x,t) je výchylka y místa struny o souřadnici x v čase t ve směru Y; tato výchylka je stanovena pro každou hodnotu x a t jednoznačně. Podotkněme ještě, že rychlost V kmitů těchto oscilátorů je podle definice rychlosti $V = \partial y/\partial t$, což je obecně zcela jiná hodnota než hodnota fázové rychlosti C.

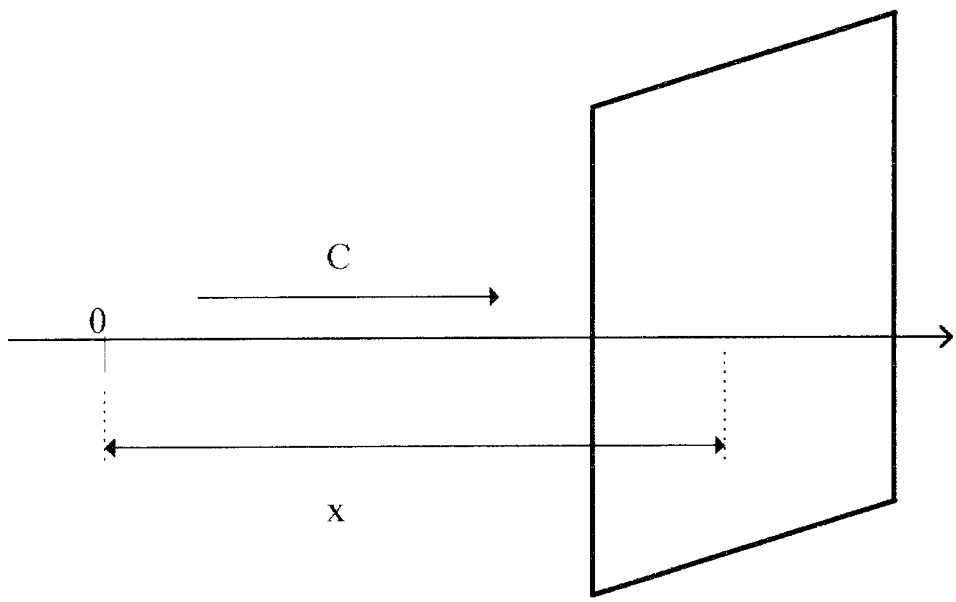
V matematické analýze se dokazuje věta, že *obecné* řešení *parciální* diferenciální rovnice typu (0) obsahuje, obdobně jako u diferenciální rovnice *obyčejné* druhého řádu, dvě libovolné konstanty. Takové řešení pro nekonečně dlouhou strunu nalezl, jak bylo již zmíněno, d' Alembert. V jeho obecném řešení se dvě libovolné konstanty vyskytují. My jsme poměrně jednoduše nalezli partikulární řešení, tj funkci y (6), která dané obecné vlnové rovnici (2) vyhovuje, ovšem neobsahuje žádnou libovolnou konstantu, jak také má u každého partikulárního řešení být. Nalezením obecného řešení se zabývat nebudeme.

Na obr. 2 je zakreslena také *délka vlny* neboli **vlnová délka**, která se obvykle označuje λ (malé lambda). Vlnová délka je vzdálenost libovolných dvou *nejbližších* sousedních míst *stejné fáze*, tedy např vzdálenost dvou nejbližších sousedních diferenciálů struny, které mají v libovolném čase t stejně velkou výchylku y ve stejném směru, tedy např amplitudu +A nebo -A a podobně. Protože předpokládáme, že hodnotu ω v rovnici (6) známe a víme, že pro dobu T kmitu netlumeného oscilátoru platí $T = 2\pi/\omega$, je zřejmé, že délku λ urazí vlna šířící se rovnoměrně rychlostí C právě za čas T, takže platí $\boxed{\lambda = CT \quad (7)}$. Tento vztah spojuje rychlost vlny C s dobou kmitu T jednotlivých oscilátorů (diferenciálů prostředí). Za dobu T kmitu *oscilátoru* posune se tedy fáze vlny o λ, jinými slovy, za dobu T učinila i *vlna* jeden kmit. Počet kmitů za vteřinu je tedy stejný jak pro oscilátor, tak pro vlnu. Je to prostě počet průchodů stejné fáze vlny daným místem za vteřinu neboli je to **frekvence vlny**. Frekvence vlny, stejná jako frekvence oscilátorů přenášejících vlnu, značí se obvykle ν (malé ný) a měří se v *hertzech*. **Hertz (Hz)** je definován jako jeden kmit za vteřinu. Vyjádříme-li z rovnice (7) C a vezmeme-li vztah $1/T = \nu$ popř $(\omega T = 2\pi \Rightarrow \nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$ platný jak pro frekvenci jednotlivých oscilátorů tak pro frekvenci vlny, dostaneme vztah mezi C, λ, T, ω a ν: $\boxed{C = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda\,\nu = \lambda\,\dfrac{\omega}{2\pi} \quad (8)}$.

Představme si, že chceme rychlost C šíření vlny zvětšit. Co to znamená pro λ a ν? Připomeňme proto vzorec (1,14), kde již napíšeme C místo v, takže pak máme $\dfrac{T_0}{\rho} = C^2$. Vzhledem k (8) dostáváme $\boxed{\lambda\,\nu = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}} \quad (9)}$. Při daném T_0 a ρ je tedy součin vlnové délky λ a frekvence ν vlny konstantní a roven C. Tak např ve vzduchu (kde jde o vlnění podélné) se zvuk šíří rychlostí přibližně C = 331 m/s. Je-li frekvence zvuku nejnižší (nejhlubší) ještě slyšitelná ν = 20 Hz, vychází ze vztahu (8) pro vlnovou délku hodnota λ = 331/20 = 16,5 m, je-li $\nu = 2.10^4$ Hz (nejvyšší ještě slyšitelná), vychází λ = 1,65 cm a pro středně vysoký tón ν = 500 Hz vychází λ = 66,2 cm.

Jestliže chceme rychlost C vlny na struně zvýšit, musíme zvýšit napínací sílu T_0 nebo vzít strunu z materiálu o menší hustotě ρ.

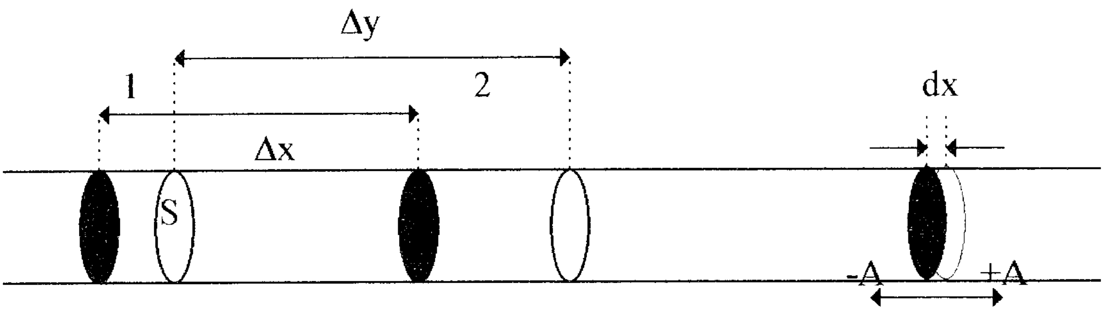
3. Rychlost elastických vln v pevných kátkách a energie vlny



OBR. 3. Vlnoplocha (plocha stejné fáze) rovinné vlny šířící se fázovou rychlostí C ve směru osy +X.

Obecná vlnová rovnice v diferenciálním tvaru (0), kde již píšeme C místo v, $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)}$, platí pro každou vlnu, šířící se ve směru osy X fázovou rychlostí C. Platí tedy nejen pro strunu, ale i pro **rovinnou vlnu** (tj pro vlnu s rovinnými vlnoplochami) zakreslenou na obr. 3 a platí jak pro vlnění příčné, tak podélné. Který z těchto dvou druhů vlnění v daném prostředí nastane, záleží jen na vlastnostech prostředí. Šíří se takové vlnění, v němž diferenciály jeho objemu mohou být *pružně* deformovány. V prostředí, v němž je možná jen deformace *stlačením* (kapalina, plyn), šíří se jen vlny podélné. V prostředí, kde je možná jak deformace stlačením, tak smykem, mohou se šířit vlny podélné i příčné. Energii vlnění přenášenou rychlostí C budeme zkoumat na případu podélného vlnění ve směru osy X v pružném pevném prostředí, např ve štíhlé kovové tyči. O vlnění budeme předpokládat, že je postupné a podélné a o tyči budeme předpokládat, že je nekonečně dlouhá (abychom nemuseli do problému zahrnout vlny odrážené na koncích tyče) a je vyrobena z materiálu o hustotě ρ. Další úvahy by formálně analogicky platily i pro vlny akustické.

Jak již víme, podélným vlněním rozumíme vlnění, při němž diferenciály prostředí kmitají ve směru šíření vlny kolem svých středních poloh. Kdyby těleso bylo tuhé, nemohlo by v něm k vlnění vůbec dojít, protože vzdálenosti mezi jednotlivými diferenciály tuhého tělesa jsou v čase neměnné a také velikosti těchto diferenciálů jsou neměnné. U pružného tělesa k vlnění dojít může, protože jednotlivé diferenciály tělesa se periodicky deformují a také vzdálenosti sousedních diferenciálů se periodicky mění. Všechny tyto proměny jsou určitými kmity, které mají svoji energii a ta je fázovou rychlostí C unášena objemem tělesa (tyče) ve směru osy X. O místech stejné fáze předpokládáme, že leží (či spíše běží) ve společných rovinách, navzájem rovnoběžných, kolmých k X a postupujících ve směru X rychlostí C, jak je zakresleno na obr. 4.



OBR. 4. Tyč o ploše průřezu S. Vpravo je již jen diferenciál tyče, nekonečně tenký válec o výšce dx a o ploše každé základny S. Dvojšipkou je znázorněno jeho kmitání mezi amplitudami -A a +A.

Nechť tyč je nejprve v klidu, žádné vlnění v ní není. Vybereme libovolně dva kolmé řezy 1 a 2. Tyto řezy (začerněné) jsou v klidu od sebe vzdáleny Δx metrů. Pak v tyči vzbudíme podélné vlnění. To se projeví tak, že řez v místě 1 se v jistém čase t posune doprava do nezačerněné polohy a podobně i řez v místě 2. Nyní je vzdálenost obou (nezačerněných řezů) Δy. Hodnota tohoto Δy se v každém místě tyče a v každém čase stále mění, takže je funkcí x a t. Zakreslena je situace, kdy $\Delta y > \Delta x$. Část tyče mezi místy 1 a 2 se tedy prodloužila (zdeformovala) o *absolutní* délku $\Delta y - \Delta x$. Nás však bude zajímat **relativní prodloužení** vzdálenosti mezi místy 1 a 2. Relativní prodloužení (tj relativní deformace), které označíme ε (malé epsilon) je definováno jako poměr nové délky k délce původní, tedy $\varepsilon = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. A nyní k sobě budeme řezy 1 a 2 přibližovat. Objem V tyče, který v klidu byl $\Delta V = S\,\Delta x$, se při zmenšování Δx změní na nekonečně malý objem $dV = S\,dx$, což je tedy objem nekonečně tenkéhoválečku o výšce dx a ploše základen S. Mezi oběma těmito nekonečně blízkými základnami dochází tedy při vlnění k nekonečně malé relativní deformaci dy, takže definujeme:

relativní deformace v řezu tyče v místě x je: $\boxed{\varepsilon = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2)}$. Píšeme parciální derivace, protože y je funkcí dvou proměnných x a t. V libovolném, ale pevně zvoleném čase t je relativní deformace ε funkcí funkce $\partial y/\partial x$ a můžeme je tedy derivovat: dostaneme $\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{d}{dx}\varepsilon = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Vynásobíme dx a dostaneme

$\boxed{d\varepsilon = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad (3)}$. K tomuto vzorci se záhy vrátíme.

Nyní nutno připomenout zákon, který experimentálně objevil HOOK (čti Huk) a který říká, že **při pružné deformaci je napětí** σ (malé sigma) **v tělese úměrné poměrné deformaci** ε: $\boxed{\sigma = E\varepsilon \quad (4)}$, kde E je konstanta různá pro různé materiály a nazývá se **YOUNGův** (Jangův) **modul pružnosti.** Napětím σ se rozumí síla F působící kolmo na jeden metr čtvereční. Síla F, působící na plochu S, je $F = S\sigma$ a tak podle Hooka $F = SE\varepsilon$. Diferenciál dF síly F, tj nekonečně malá část síly F, způsobí nekonečně malou relativní deformaci $d\varepsilon$ výsledné hodnoty ε: $dF = S\,E\,d\varepsilon$ a sem dosadíme z (3) a dostaneme

$$\boxed{dF = S\,E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = S\,dx\,E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = dV\,E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (5)}.$$

Diferenciál dF síly působící na diferenciál tyče o hmotnosti $dm = \rho\, dV$ (ρ je hustota materiálu tyče) je podle druhého Newtonova pohybového zákona roven časové změně hybnosti p tohoto diferenciálu hmotnosti, tedy

$dF = \frac{\partial}{\partial t}p = \frac{\partial}{\partial t}(dm\, v) = dm\frac{\partial v}{\partial t} = \rho\, dV\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} = \rho\, dV\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, neboť podle definice je rychlost v rovna derivaci dráhy podle času a y je dráha (okamžité vysunutí diferenciálu dm z klidové polohy). Sem dosadíme za dF z (5) a dostaneme

$dF = S\,E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = S\,dx\,E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = dV\,E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho\, dV\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Zkrátíme dV, dostaneme

$E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, vydělíme hustotou ρ a dostaneme $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (6)}$.

Porovnáme tuto rovnici s rovnicí $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)}$ a vidíme, že

$$\boxed{C^2 = \frac{E}{\rho} \Rightarrow C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7)}.$$

Tak jsme zjistili, že fázová rychlost C je dána Youngovým modulem E a materiálovou hustotou ρ.

Nyní se budeme zabývat energií vlny. Co je energie vlny? Jak jsme viděli, lze si celou tyč představit složenou z diferenciálů hmotnosti dm = dV ρ = S dx ρ oscilujících při vlnění tyče kolem svých klidových poloh. Vlnění pak není nic jiného než postup (přenos) těchto lokálně vázaných kmitů fázovou rychlostí C ve směru osy X tyče. Energií vlnění se pak rozumí energie těchto oscilátorů. Souhrnná energie obsažená v 1m^3 tyče (obecně - vlnícího se prostředí) nazývá se **hustota energie vlnění** a budeme ji značit w (malé dvojvé).

Jak jsme viděli dříve, mění se u jednotlivého oscilátoru periodicky energie kinetická v potenciální a zpět. Připomeňme, že pro okamžitou výchylku y osamoceného oscilátoru o hmotnosti m platí $y = A \sin\omega t$, kde A je amplituda kmitů a ω je úhlová rychlost sdruženého kruhového pohybu, pro níž platí (8), kde T je doba kmitu a

$\boxed{\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi\nu \quad (8)}$ 1/T = ν (malé ný) je frekvence kmitů.

Protože naše oscilátory, na něž si tyč myslíme rozdělenu, nejsou osamocené ale vázané, použijeme pro výchylku y vzorec (9), kde C je fázová rychlost vlny:

$$\boxed{y = A \sin\omega(t - \frac{x}{C}) = A \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{C} x\right) \quad (9)}.$$

Stejně jako u osamoceného oscilátoru budeme považovat energii a tedy i hustotu energie vlny za součet energie kinetické a potenciální, tedy $\boxed{w = w_k + w_p \quad (10)}$.

Počítejme hustotu w_k kinetické energie. Kinetická energie libovolného tělesa o hmotnosti m pohybujícího se rychlostí v je definována vztahem (11)

$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (11)}$. Vezměme náš oscilátor o hmotnosti dm = S dx ρ = dV ρ. Tento oscilátor má v každém okamžiku určitou kinetickou energii dW_k , pro níž podle definice (11) platí : $dW_k = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} dV \rho \left(\frac{d}{dt} y\right)^2$. Sem dosadíme za y okamžitou výchylku (tj dráhu) podle (9) a dostaneme:

$$\boxed{dW_k = \frac{1}{2} dV \rho \left(\frac{d}{dt} A \sin(\omega t - \frac{\omega}{C} x) \right)^2 = \frac{1}{2} dV \rho A^2 \omega^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{C} x \right) \quad (12)}.$$

Hustotu kinetické energie dostaneme jako celkové množství kinetické energie dělené objemem, které zaujímá. U našeho oscilátoru je jeho celkové množství kinetické energie dW_k a objem, který zaujímá, je dV, takže

$$\boxed{w_k = \frac{dW_k}{dV} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{C} x \right) \quad (13)}.$$ To je hustota energie vlnění v tyči.

Spočteme hustotu w_p potenciální energie. U osamoceného (izolovaného) oscilátoru je okamžitá hodnota potenciální energie rovna práci, kterou musí vykonat vnější síla, aby posunula oscilátor do okamžité výchylky y. Počítejme tedy práci, kterou musí vykonat nekonečně malá síla dF, aby náš oscilátor o objemu $S\,dx = dV$ posunula o diferenciál $d\varepsilon$ relativní deformace ε. Diferenciál této práce je v souladu s Hookovým zákonem $\boxed{dF\, d\varepsilon = dV \sigma\, d\varepsilon = dV E \varepsilon\, d\varepsilon \quad (14)}$. Hustotu w_p potenciální energie vlny, tj množství potenciální energie všech oscilátorů v $1m^3$ tyče dostaneme opět jako energii dělenou objemem, v němž je obsažena, tj $\boxed{w_p = \frac{dW_p}{dV} = E \varepsilon\, d\varepsilon}$ a integrujeme až do amplitudy výchylky, tj do ε: $\boxed{P = E \int \varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad (15)}$. Za ε sem dosadíme parciální derivaci y podle x podle (2) a za y dosadíme podle (9): dostaneme

$$w_p = \frac{1}{2} E \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \sin(\omega t - \frac{\omega}{C} x \right) \right]^2 = \frac{1}{2} E A^2 \frac{\omega^2}{C^2} \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{C} x \right)$$ a sem dosadíme za fázovou rychlost podle (7). Dostaneme: $w_p = \frac{1}{2} E A^2 \frac{\omega^2}{\frac{E}{\rho}} \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{C} x \right)$ a po vykrácení

$$\boxed{w_p = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{C} x \right) \quad (16)}.$$ Vidíme, že jsme pro hustotu potenciální energie w_p dostali stejný výraz jako (13) pro hustotu w_k energie kinetické. To znamená předně, že **okamžitá hustota energie w je**

$$\boxed{w = w_k + w_p = \rho A^2 \omega^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{C} x \right) \quad (17)}$$

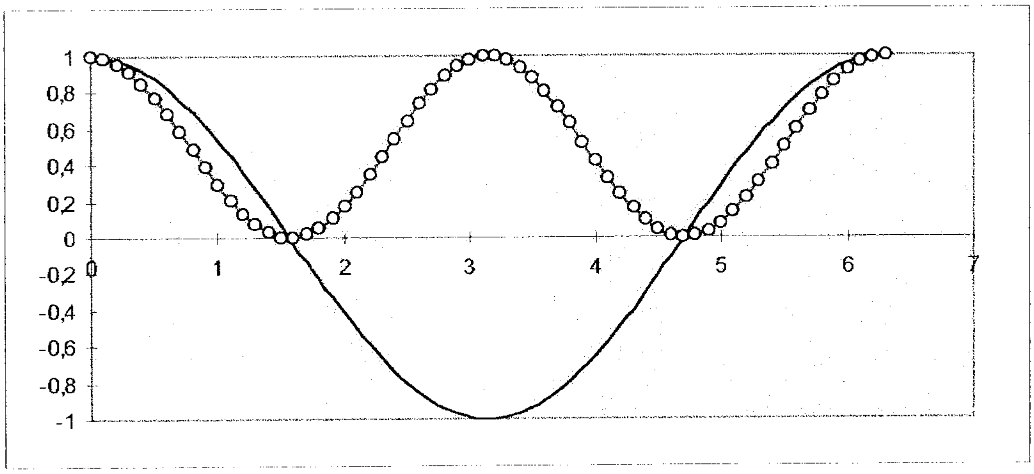
a dále že **kinetická a potenciální energie jsou ve stejné fázi, tj obě dosahují minima a maxima v každém místě x ve stejném čase t.** To je jeden z významných rozdílů mezi vlněním prostředí a oscilací osamoceného oscilátoru, kde je kinetická energie posunuta ve fázi proti energii potenciální o $\pi/2$.

Podle (17) je hustota energie vlny periodickou funkcí času, neboť se mění podle druhé mocniny kosínusovky. Vypočtěme tedy ještě střední hodnotu hustoty energie, kterou označíme w_S. Nejprve obecně o střední hodnotě funkce.

Definice střední hodnoty funkce:

Nechť funkce $y = f(x)$ je definována na intervalu délky L, kde počáteční bod tohoto intervalu má souřadnici x_1, koncový bod x_2, takže $L = x_2 - x_1$. Pak střední hodnota f_s funkce f(x) na intervalu L je definována vztahem $\boxed{f_s = \frac{1}{L}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \quad (18)}$. ♣♣♣

V našem konkrétním případě nás zajímá střední hodnota funkce $f(x) = \cos^2(x)$, protože střední hodnoty konstant (u nás A^2 a ω^2) splývají s těmito konstantami. Funkce cos(x) je periodická na intervalu délky $L = (0;2\pi)$, funkce $\cos^2 x$ je však periodická na intervalu délky $L = (0;\pi)$, jak je vidět i z obr. 5. Je zřejmé, že střední hustotu jakékoliv funkce, tedy i střední hodnotu w_s hustoty energie, stačí



OBR.. 5. Plnou čarou je zakreslena funkce cos(x), kroužkovaně $\cos^2 x$.

spočítat na intervalu periodicity, protože dále se situace opakuje. Počítáme tedy střední hodnotu f_s na intervalu $(0;\pi)$ podle vzorce (18), kde bude $f(x) = \cos^2 x$, $L = \pi$, $x_1 = 0$ a $x_2 = \pi$. Tak dostáváme nejprve $\boxed{f_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx \quad (19)}$ a nyní tento integrál máme vypočíst. Použijeme vzorec známý z trigonometrie:

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ a podle tohoto vzorce dosazeného do (19) dostáváme:

$$f_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}dx + \int_0^{\pi}\cos 2x\,dx\right)$$. Dále máme:

$\int_0^{\pi}dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi$ takže $\frac{1}{2\pi}.\pi = \frac{1}{2}$ a $\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0$.

Tedy $\boxed{f_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2} \quad (20)}$ a dosazením do (17) máme konečně

$\boxed{w_s = \rho A^2\omega^2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \quad (21)}$. To je hodnota hustoty energie vlnění obsažená v jednom krychlovém metru vlnícího se prostředí. Vidíme, že je úměrná čtverci (tj druhé mocnině) amplitudy A kmitů diferenciálních oscilátorů prostředí a čtverci sdruženého kruhového pohybu ω těchto oscilátorů.

Pohybuje-li se vlna fázovou rychlostí C, pak střední hustota energie prošlá jedním čtverečním metrem kolmo ke směru šíření vln (tj kolmo k ose X) za vteřinu se nazývá **intenzita vlnění**, značí se I a zřejmě pro ni platí $\boxed{I = w_s C = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 C \quad (22)}$.

OBSAH

Strana

Konec dílu 1.