1 Relace

1.1 Základní pojmy

Pojem relace neboli vztahu je znám nejen v matematice, ve které patří k nedůležitějším pojmům. Jak vyplývá z následujících několika příkladů, intuitivně se tento pojem používá i v běžném životě.

Příklady.

- (číslo) x je dělitelem y (číslo)
- (osoba) x je sousedem y (osoba)
- (osoba) x je členem y (spolek)
- (přímka) x je rovnoběžná s y (přímka)
- (auto) x má y (barva)

Jak je vidět, všechny tyto příklady mají společnou následující strukturu: Je dána množina X (auta) a množina Y (barvy) a vztah mezi nimi, který označíme ρ. Pak prvek $x \in X$ bude v relaci s prvkem $y \in Y$ právě když výrok, který můžeme symbolicky zapsat $x\rho y$, bude pravdivý. Matematicky lze tuto vlastnost definovat následovně.

Definice. Nechť X, Y jsou množiny. *Binární relace* ρ z množiny X do množiny Y je libovolná podmnožina kartézského součinu $X \times Y$.

Poznámky.

1. Bude-li zřejmé, o jaké množiny se jedná, budeme krátce hovořit o relaci ρ. Skutečnost, že x, y jsou v relaci, budeme značit

$$\begin{array}{llll} (x,y) \in \rho & \text{nebo} & x\rho y & \text{v opačném případě} \\ (x,y) \notin \rho & \text{nebo} & x\not\rho y & \end{array}$$

2. Nikde ovšem není zaručeno, že každý prvek z X je v relaci s nějakým prvkem z Y (a naopak).

Definice. Nechť ρ je relace z X do Y. Množina

$$L_\rho = \{a \in \mathrm{X} \mid \exists\, b \in \mathrm{Y}; a\rho b\} \text{ se nazývá } \textit{levý obor relace } \rho$$

$$R_\rho = \{b \in \mathrm{Y} \mid \exists\, a \in \mathrm{X}; a\rho b\} \text{ se nazývá } \textit{pravý obor relace } \rho$$

Příklad.

$$X = \{2,3,5\} \qquad Y = \{1,4,7,10\}$$
$$x\rho y \Leftrightarrow x \text{ je dělitelem } y.$$

Pak $L_\rho = \{2,5\}, R_\rho = \{4,10\}$.

Protože relace je množinou, lze na ní přirozeným způsobem definovat běžné množinové operace, jako je průnik relací, sjednocení relací. Obdobně lze zavést i termín podrelace, pro který se však používá i jiného názvosloví.

Definice. Nechť ρ_1, ρ_2 jsou relace z X do Y. Jestliže $\rho_1 \subset \rho_2$, říkáme, že relace ρ_1 *implikuje* relaci ρ_2.

Definice. Je-li speciálně $X = Y$, pak říkáme, že $\rho \subset X \times X$ je *relace na množině X.*

Následující operace mezi relacemi však svou obdobu mezi množinami obecně nemá.

Definice. Buďte X, Y, Z množiny, $\rho_1 \subset X \times Y, \rho_2 \subset Y \times Z$. Pak relace $\rho_1 \circ \rho_2 \subset X \times Z$ definovaná vztahem $(x,z) \in \rho_1 \circ \rho_2 \Leftrightarrow \exists\, y \in Y$ tak, že $x\rho_1 y$ a $y\rho_2 z$, se nazývá *složení (součin)* relacíρ_1, ρ_2.

Příklad.
$X = \{1,2,3,4\}$
$Y = \{5,6,10\}$
$Z = \{7,12,18,20\}$
$x\rho_1 y \Leftrightarrow x$ je dělitelem y
$y\rho_2 z \Leftrightarrow y < z$.

Potom $\rho_1 \circ \rho_2 = [1,7],[1,12],[1,18],[1,20],[2,7],[2,12],[2,18],[2,20],[3,7],[3,12],[3,18],[3,20]$. Naproti tomu $\rho_2 \circ \rho_1 = [1,12],[1,18],[1,20],[2,12],[2,18],[2,20],[3,12],[3,18],[3,20],[4,12],$ $[4,18],[4,20]$. Tedy obecně $\rho_1 \circ \rho_2 \neq \rho_2 \circ \rho_1$.

Vlastnosti operace skládání relací trochu připomínají vlastnosti, které má součin matic. Předně nelze skládat libovolnou dvojici relací a jak je z předchozího příkladu vidět, i když je složení relací ρ_1 a ρ_2 možné v libovolném pořadí, není tato operace obecně komutativní. Následující tvrzení však ukazuje, že asociativní zákon pro operaci skládání relací platí.

Věta. Nechť $\rho_1 \subset A \times B \quad \rho_2 \subset B \times C \quad \rho_3 \subset C \times D$. Potom $(\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3 = \rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3)$.

Důkaz. Nechť $a(\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3 d$. Potom existuje c tak, že $a\rho_1\rho_2 c \,\&\, c\rho_3 d$. Z prvního vztahu dále vyplývá, že existuje b tak, že $a\rho_1 b \,\&\, b\rho_2 c$. Protože $b\rho_2 c \,\&\, c\rho_3 d$ máme $b\rho_2\rho_3 d$ a protože také $a\rho_1 b$, dostáváme celkově $a\rho_1(\rho_2\rho_3)d$. Proto

$(\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3 \subset \rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3)$.
Obdobně se dokáže opačná inkluze.

Nyní zadefinujeme ještě další důležité typy relací .

Definice. Je-li $\rho \subset X \times Y$, pak relace $\rho^{-1} \subset Y \times X$ definivaná vztahem $y\rho^{-1}x \Leftrightarrow x\rho y$ se nazývá *inverzní relace* k relaci ρ.

Definice. Je-li X množina, pak relace $E_X \subset X \times X$ definovaná vztahem

$$E_X = \{(x,x)|x \in X\}$$

se nazývá *identická relace* na množině X.

Příklad Nechť $X = \{1,2,3\}$, nechť relace ρ je na množině X definována $x\rho y \Leftrightarrow x < y$. Potom

$$\rho \circ \rho^{-1} = \{[1,1],[1,2],[2,1],[2,2]\}$$
$$\rho^{-1} \circ \rho = \{[2,2],[2,3],[3,2],[3,3]\}$$

Tedy obecně $\rho \circ \rho^{-1} \neq \rho^{-1} \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1} \neq E_X$, dokonce ani $\rho \circ \rho^{-1} \neq E_{L_\rho}$. Obecně platí pouze následující.

Tvrzení.
$E_{L_\rho} \subset \rho \circ \rho^{-1} \quad E_{P_\rho} \subset \rho^{-1} \circ \rho$.

Příklad. Nechť $|X| = m \quad |Y| = n$. Kolik existuje různých relací z X do Y?

1.2 Zobrazení

Definice. Relace $f \subset X \times Y$, pro kterou platí

$$(x,y_1) \in f \& (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

čili každému $x \in X$ je přiřazeno nejvýše jedno $y \in Y$ se nazývá *zobrazení z množiny X do množiny Y*. Pokud platí $\forall x \in X \, \exists! \, y \in Y \quad (x,y) \in f$, pak *zobrazení množiny X do množiny Y*.

Poznámka. f^{-1} ve smyslu relace nemusí být zobrazení.

Definice. Řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je

- *prosté* jestliže $y = f(x_1) \,\&\, y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- *na množinu* Y, jestliže $P_f = Y$.
- *bijekce*, jestliže f je prosté zobrazení množiny X na množinu Y.

Příklad. Řekneme, že množiny X a Y jsou *ekvivalentní* $(X \sim Y)$ jestliže mezi nimi existuje bijekce. Zřejmě konečné množiny jsou ekvivalentní právě když mají týž počet prvků. Pro nekonečné množiny potom např. $N \sim Z$, $N \sim Q$, $R \sim R^+$, $R \sim \langle 0,1\rangle$, avšak $N \not\sim R$. Množiny ekvivalentní s množinou přirozených čísel se nazývají *spočetné*, ostatní nekonečné množiny se nazývají *nespočetné*. O ekvavilentních množinách se také říká, že mají tutéž *mohutnost*. Mohutnost konečné množiny je rovna počtu jejích prvků, mohutnost množiny přirozených čísel se značí $\aleph_0$.

1.3 Ekvivalence

Definice. Nechť ρ je relace na množině X. Řekneme, že ρ je

- *reflexivní* , jestliže $\forall x \in X; x\rho x$ (neboli $E_X \subset \rho$).
- *symetrická*, jestliže $x\rho y \Rightarrow y\rho x$ (neboli $\rho = \rho^{-1}$).
- *antisymetrická*, jestliže $(x\rho y \,\&\, y\rho x) \Rightarrow x = y$ (neboli $\rho \cap \rho^{-1} \subset E_X$).
- *tranzitivní*, jestliže $(x\rho y \,\&\, y\rho z) \Rightarrow x\rho z$ (neboli $\rho \circ \rho \subset \rho$).

Definice.
Reflexivní a symetrická relace se nazývá *tolerance*.
Reflexivní, symetrická a tranzitivní relace se nazývá *ekvivalence*.
Reflexivní, antisymetrická a tranzitivní relace se nazývá *uspořádání*.

Příklad tolerance.
Nechť $X = \{0,1\}^n$, neboli množina binárních vektorů délky n. Relace ρ je definována vztahem $x\rho y \Leftrightarrow x, y$ se liší nejvýše v jedné složce. Diagram této relace se nazývá *n-rozměrná krychle*.

Příklady ekvivalence.
V geometrii: shodnost či podobnost trojúhelníků, rovnoběžnost přímek.
Na množině čtvercových matic téhož řádu vztahy typu X je podobná Y, X má stejnou hodnost jako Y.

Definice. Nechť X je množina. Systém $\{B_i\}; i \in I$ podmnožin množiny X se nazývá *rozklad* množiny X jestliže

$$\begin{array}{rl} (i) & B_i \neq \emptyset \quad \forall i \in I \\ (ii) & B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \\ (iii) & \cup_i B_i = X \end{array}$$

Prvky rozkladu se nazývají *třídy*.

Věta. Každá ekvivalence na X definuje rozklad na X, tzv. *rozklad na třídy ekvivalence.* (A naopak)

Důkaz.
Definujme pro každé x $B_x = \{y \in X; y\rho x\}$. První a třetí podmínka z definice rozkladu jsou splněny evidentně, k důkazu disjunktnosti předpokládejme $a \neq b$ a nechť existuje $c \in B_a \cap B_b$. Potřebujeme dokázat, že $B_a = B_b$. Avšak je-li $x \in B_a$, pak $x\rho a$ a z definice prvku c je $a\rho c$. Z tranzitivity dále plyne $x\rho c$. Protože také $c\rho b$, je i $x\rho b$ a tedy $x \in B_b$. Dostáváme tedy $B_a \subset B_b$ a protože analogicky by se dokázalo $B_b \subset B_a$ je důkaz proveden.

1.3.1 Základní algebraické struktury

Definice. Zobrazení $\circ: \quad X \times X \to X$ se nazývá *binární operace.* Fakt, že $f(a,b) = c$ značíme $a \circ b = c$.

Definice. Operace se nazývá

- *komutativní*, jestliže $\forall a, b; a \circ b = b \circ a$.
- *asociativní*, jestliže $\forall a, b, c; (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
- Operace $\star$ se nazývá *distributivní* vzhledem k operaci $\circ$ jestliže $a \star (b \circ c) = (a \star b) \circ (a \star c)$.
- Prvek e, pro který $a \circ e = e \circ a = a \forall a$ se nazývá *neutrální prvek.*
- Prvek a^{-1}, pro který $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$ se nazývá *inverzní prvek* k prvku a.

Definice.
Množina M s operací, která je asociativní, se nazývá *pologrupa.*
Jestliže v ní existuje neutrální prvek, pak se M nazývá *monoid.*
Grupa je monoid, ve kterém ke každému prvku existuje inverzní prvek.
Komutativní (Abelova) grupa je grupa s komutativní operací.

Poznámka. V případě, že operace je považována za sčítání, pak se inverzní prvek nazývá *opačný.*

Příklady.
Množina přirozených čísel je pologrupa vzhledem k operaci sčítání, monoid vzhledem k operaci násobení.
Množina celých čísel je grupa vzhledem k operaci sčítání.
Množina racionálních čísel je monoid vzhledem k násobení, množina kladných racionálních čísel je vzhledem k násobení grupou.

Definice. Nechť M je množina vybavená operacemi $\circ$, $\star$. M se nazývá *okruh*, jestliže M je Abelova grupa vzhledem k operaci $\circ$, pologrupa vzhledem k operaci $\star$ a operace $\star$ je distributivní vzhledem k $\circ$. Jestliže navíc existuje neutrální prvek vzhledem k $\star$, pak se M nazývá *okruh s jednotkou*.

Konvence. V okruhu se neutrální prvek vzhledem k $\circ$ nazývá *nulový*, vzhledem k $\star$ *jednotkový*.

Věta. $0 \star a = a \star 0 = 0$.

Definice. Nechť $a \neq 0$. Pokud $\exists b \neq 0$ tak, že $a \star b = 0$, pak se a, b nazývají *dělitelé nuly*.

Definice. Okruh s jednotkou bez dělitelů nuly se nazývá *obor integrity*. Jestliže navíc existuje ke každému prvku prvek inverzní vzhledem k $\star$, pak se množina nazývá *těleso*.

Příklady.
Množina celých sudých čísel s operacemi sčítání a násobení tvoří okruh. Množina celých čísel tvoří obor integrity. Množina racionálních, reálných či komplexních čísel tvoří těleso. Příkladem okruhu, který není oborem integrity, je množina všech čtvercových matic téhož řádu s operacemi sčítání a násobení matic.

Věta. Každý konečný obor integrity je těleso.

1.3.2 Kongruence

Definice. Nechť $\mathcal{Z}$ je množina celých čísel, $p > 1$ přirozené číslo. Relaci $\equiv (mod\ p)$ definovanou předpisem

$$x \equiv y (mod\ \ p) \Leftrightarrow p | x - y$$

se nazývá *kongruencí modulo p*.

Věta Relace kongruence je ekvivalencí na $\mathcal{Z}$. V každé třídě ekvivalence leží právě všechna čísla, která dávají při dělení p stejný nezáporný zbytek.

Definice. Tyto třídy ekvivalence se nazývají *zbytkové třídy* modulo p.

Značení. Třídu exvivalence, do které patří číslo $i \in \mathcal{Z}$ značíme $\mathcal{Z}_p(i)$.

Věta. Nechť $x \in \mathcal{Z}_p(i), y \in \mathcal{Z}_p(j)$. Potom

$$x + y \in \mathcal{Z}_p(i + j) \qquad xy \in \mathcal{Z}_p(ij)$$

Definice. Označme $\mathcal{Z}_p$ množinu všech zbytkových tříd modulo p. Definujme operace $\oplus, \otimes$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_p(i) \oplus \mathcal{Z}_p(j) &= \mathcal{Z}_p(i+j) \\ \mathcal{Z}_p(i) \otimes \mathcal{Z}_p(j) &= \mathcal{Z}_p(ij) \end{aligned}$$

Označme $0 = \mathcal{Z}_p(0); 1 = \mathcal{Z}_p(1); i = \mathcal{Z}_p(i)$.

Toto značení umožňuje provádět se zbytkovými třídami operace obdobně jako s běžnými čísly. Takže například v množině $\mathcal{Z}_7$ platí $5 \oplus 4 = 2$, $5 \otimes 4 = 6$ a podobně. Otázka zní, zda tyto operace mají i očekávané vlastnosti.

Věta. $\mathcal{Z}_p$ je Abelova grupa vzhledem k $\oplus$, okruh s jednotkou vzhledem k $\oplus$ a $\otimes$, množina $\mathcal{Z}_p \setminus \{0\}$ je monoid vzhledem k $\otimes$.

Důkaz. Vzhledem k vlastnostem běžného sčítání a násobení jednoduchý.

Pro každé p je tedy $\mathcal{Z}_p$ okruhem s jednotkou. Lehce se však charakterizuje, kdy je tato množina také tělesem.

Věta. Množina $\mathcal{Z}_p$ je těleso právě když p je prvočíslo.

Důkaz. Protože $\mathcal{Z}_p$ je konečná množina stačí ukázat, kdy $\mathcal{Z}_p$ obsahuje dělitele nuly, neboli pro jaká p existují čísla mezi jednotkou a p taková, jejichž součin je násobkem čísla p. Ta však existují právě tehdy, kdzž p je složené číslo.

Protože pro prvočíslo p je množina $\mathcal{Z}_p$ tělesem, lze na ní definovat různé struktury, například vektorový prostor a na něm pak analogicky definovat pojmy jako u vektorového prostoru vlastnosti typu lineární nezávislost či báze vektorového prostoru. V některých případech však mají takto definované vztahy nečekané vlastnosti (například může existovat vektor, který je kolmý sám k sobě) a je nutno být opatrný při přebírání vět platných pro reálný vektorový prostor.

1.4 Uspořádání

Definice. Nechť ρ je relace na X. Pro $x, y \in X$ položme $x\rho^+y \Leftrightarrow x\rho y$ nebo $\exists\, k > 0$ a $x_1, x_2, \ldots x_k \in X$ tak, že $x\rho x_1 \,\&\, x_1\rho x_2 \,\&\, \ldots \,\&\, x_k\rho y$. Relace ρ^+ se nazývá *tranzitivní uzávěr* relace ρ.

Relace $\rho^\star$ definovaná vztahem $x\rho^\star y \Leftrightarrow x = y$ nebo $x\rho^+y$ se nazývá *reflexivně tranzitivní uzávěr* relace ρ.

Jinými slovy, ρ^+ je nejmenší tranzitivní relace obsahující ρ. Podobně $\rho^\star$ je nejmenší taková relexivní a tranzitivní relace.

Relace uspořádání se někdy nazývá částečné uspořádání nebo částečně uspořádaná množina – *POSET*. Poset se obvzkle značí $(X, \preceq)$. Kromě tohoto uspořádání se totiž ještě definuje následující typ relace.

Definice. Nechť X je uspořádaná množina. Jestliže pro $x, y \in X$ je $x\rho y$ nebo $y\rho x$ říkáme, že prvky x, y jsou *srovnatelné*. Jsou-li každé dva prvky X srovnatelné, říkáme, že ρ je *lineární (úplné, totální) uspořádání*.

Příklady. Typickým reprezentantem lineárního uspořádání je relace $\leq$. Typickým představitelem uspořádání. které není lineární je pak vztah dělitelnosti na množině přirozených čísel či na některé její podmnožině.

Kdybychom se pokusili nakreslit graf množiny uspořádané dělitelností, dostali bychom i pro poměrně malé množiny velmi nepřehledné diagramy. Proto se definuje následující vztah, pomocí kterého dostáváme o daném uspořádání úplnou informaci a přitom získáme přehlednost.

Definice. Nechť $\preceq$ je uspořádání na X. Relace $\stackrel{\bullet}{\prec}$ definovaná vztahem $x \stackrel{\bullet}{\prec} y \Leftrightarrow x \preceq y, x \neq y$ a pro žádný $z \in X, x \neq z \neq y$ není $x \preceq z \preceq y$ se nazývá *relace bezprostředního předcházení* příslušná k uspořádání $\preceq$. Diagram relace bezprostředního předcházení příslušné k $\preceq$ se nazývá *Hasseův diagram* relace $\preceq$.

Poznámky.
1. $\stackrel{\bullet}{\prec}$ není uspořádání.
2. Každé uspořádání je reflexivně tranzitivním uzávěrem své relace bezprostředního předcházení. $\stackrel{\bullet}{\prec}$ je nejmenší relace s touto vlastností.

2 Svazy a Booleovy algebry

2.1 Svazy

Definice. Nechť $(X, \preceq)$ je poset. Řekneme, že

- $a \in X$ je *minimální prvek* X, jestliže pro žádný prvek $x \in X, x \neq a$ není $x \preceq a$.
- $b \in X$ je *maximální prvek* X jestliže pro žádný prvek $x \in X, x \neq b$ není $b \preceq x$.
- $c \in X$ je *největší prvek* X jestliže $\forall x \in X; x \preceq c$.
- $d \in X$ je *nejmenší prvek* X, jestliže $\forall x \in X; d \preceq x$.

Definice. Nechť $(X, \preceq)$ je poset, nechť $a, b \in X$.
Horní závora prvků a, b je prvek $x \in X$ takový, že $a \preceq x, b \preceq x$. Nejmenší horní závora se nazývá *supremum* prvků a, b.
Dolní závora je prvek $z \in X$ takový, že $z \preceq a, z \preceq b$. Největší dolní závora se nazývá *infimum* prvků a, b.

Definice. Poset, v němž pro každé dva prvky existuje jejich supremum i infimum, se nazývá *svaz*.

Konvence. Ve svazu definují supremum a infimum binární operace. Supremum se nazývá *spojení* a značí $x \vee y$, infimum se nazývá *průsek* a značí $x \wedge y$.

Je zřejmé, že je-li na množině definováno uspořádání, jsou tímto uspořádáním definovány jednoznačně i operace průseku a spojení. Následující tvrzení nám ukazuje, že je tomu i naopak.

Věta. Nechť X je svaz, nechť $a, b \in X$. Pak

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

Další tvrzení pak vychází z následujícího pozorování: Jestliže Hasseův diagram daného uspořádání převrátíme naruby, pak se relace ρ změní na ρ^{-1} a zůstane uspořádáním, operace průseku se změní na spojení a naopak. Proto

Věta. *(Princip duality.)*
Když v libovolném pravdivém tvrzení prohodíme průsek a spojení a uspořádání nahradíme inverzním, dostáváme opět pravdivé tvrzení.

Základní vlastnosti operací průsek a spojení pak shrnuje následující věta.

Věta. V libovolném svazu platí

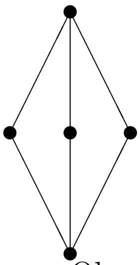
$a) a \vee a = a$	$a \wedge a = a$	*idempotentnost*
$b) a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$	*komutativita*
$c) a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$		*asociativita*
$d) a \vee (b \wedge a) = a$	$a \wedge (b \vee a) = a$	*absorbce*

Jak je vidět, mezi základními vlastnostmi chybí distributivní zákony. Obecně tyto zákony ve svazech neplatí. Například ve svazu na obr. 1a je vidět, že $a \wedge (b \vee c) = a$ zatímco $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0$. Na obrázku 1b zase máme $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$ a přitom $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee 0 = 0$. Proto má oprávnění následující definice.

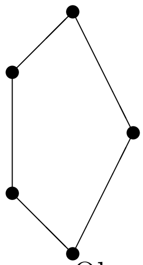
Definice. Řekneme, že svaz $(X, \preceq)$ je distributivní, jestliže navíc $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ a z duality také $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Svazy na obr. ?? budou hrát klíčovou roli při charakterizaci distributivních svazů. Než si tuto charakterizaci uvedeme, je třeba nejprve definovat podsvaz svazu. Při zavádění této definice je nutné zachovávat určitou opatrnost.

Definice. Nechť $(X, \preceq)$ je poset, nechť $Y \subset X$. Potom $(Y, \preceq)$ je také poset a $\preceq$ se nazývá *zúžení* původního uspořádání.



Obr. 1a



Obr. 1b

Definice. Nechť $Y \subset X$. Řekneme, že poset $(Y, \preceq)$ je *podsvazem* svazu $(X, \preceq)$ jestliže operace průseku a spojení zachovávají výsledky ze svazu X.

Věta. Svaz je distributivní, jestliže neobsahuje X_1 či X_2 jako svůj podsvaz.

Další otázkou je, zda je možné ve svazech definovat obdobu neutrálního a inverzního prvku. Vzhledem k předchozím úvahám je zřejmé, že roli neutrálních prvků mohou hrát nejmenší a největší prvek, pokud ovšem existují. Ovšem snadno se nahlédne, že v konečném svazu kdyby neexistoval např, největší prvek, pak by v něm musely nutně existovat minimálně dva maximální prvky a ty by neměly supremum. Proto v konečném svazu musí největší a z duality i nejmenší prvek existovat. V dalším budeme nejmenší prvek svazu značit 0 a největší 1.

Věta. $0 \vee a = a \quad 1 \wedge a = a.$

Definice. Nechť $(X, \preceq)$ je svaz s nulovým a jednotkovým prvkem. Prvek $\overline{x}$, pro který

$$x \vee \overline{x} = 1 \qquad x \wedge \overline{x} = 0$$

se nazývá *doplněk (komplement)* prvku x.

Komplement nemusí existovat ke každému prvku a pokud existuje, nemusí být určen jednoznačně. Například v lineárně uspořádaném svazu nemá komplement žádný prvek s výjimkou 0 a 1, k prvku c ve svazech X_1 a X_2 z obr. ?? existují komplementy dva. Ve speciálních případech však lze říci více, což bude předmětem další kapitoly. Na závěr této však ještě jednu definici.

Definice. Svaz, v němž $\forall x \in X$ existuje jeho komplement, se nazývá *komplementární svaz.*

2.2 Booleovy algebry

Definice. Distributivní komplementární svaz se nazývá *Booleova algebra.*

V Booleově algebře tedy ke každému prvku existuje jeho komplement. Jak již bylo řečeno, obecně ve svazu nemusí být komplement určen jednoznačně. Druhá podmínka však jednoznačnost komplementu zaručuje.

Věta. V distributivním komplementárním svazu existuje ke každému prvku právě jeden komplement.

Důkaz. Nechť b_1 a b_2 jsou doplňky prvku a, tj. nechť $a \vee b_1 = 1, a \vee b_2 = 1, a \wedge b_1 = 0, a \wedge b_2 = 0$. Potom $b_1 = b_1 \wedge 1 = b_1 \wedge (a \vee b_2) = (b_1 \wedge a) \vee (b_1 \wedge b_2) = 0 \vee (b_1 \wedge b_2) = b_1 \wedge b_2$. Podobně však $b_2 = b_2 \wedge 1 = b_2 \wedge (a \vee b_1) = (b_2 \wedge a) \vee (b_2 \wedge b_1) = 0 \vee (b_2 \wedge b_1) = b_1 \wedge b_2$, neboli $b_1 = b_2$.

V Booleově algebře je zvykem značit spojení znaménkem + a průsek znaménkem .. Následující věta pak dává přehled základních vlastností Booleovských operací. Je třeba ji chápat skutečně jako přehled vlastností, nikoli jako soustavu axiomů, neboť některá tvrzení v ní uvedená lze odvodit z jiných.

Věta. *Booleovský kalkulus.*
Pro operace Booleovy algebry platí

$S1$	$a + a = a$	$a.a = a$	*idempotentnost*
$S2$	$a + b = b + a$	$ab = ba$	*komutativita*
$S3$	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$	*asociativita*
$S4$	$a + ab = a$	$a(a + b) = a$	*absorbce*
D	$a(b + c) = ab + ac$	$a + bc = (a + b)(a + c)$	*distributivita*
$N1$	$a + 0 = a$	$a.1 = a$	*neutrální prvky*
$N2$	$a.0 = 0$	$a + 1 = 1$	
$K1$	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$	*komplementarita*
$K2$	$a + \overline{a} = 1$	$a.\overline{a} = 0$	
$K3$		$\overline{\overline{a}} = a$	*involutornost*
$K4$	$\overline{a + b} = \overline{a}\overline{b}$	$\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$	*de Morganovy zákony*

Tento soubor vlastností značně omezuje možnost býti Booleovou algebrou. Následující postup také ukáže, že všechny konečné Booleovy algebry lze v jistém smyslu jednoznačně popsat.

Definice. Nechť X je Booleova algebra. Nenulový prvek $a \in X$ takový, že pro každý $x \in X$ platí $x \wedge a = a$ nebo $x \wedge a = 0$ se nazývá *atom* algebry X.

Atom algebry je tak vlastně bezprostřední následník nuly. V nekonečných Booleových algebrách atomy existovat nemusí, v konečné algebře samozřejmě existují. Následující věta nám pak ukazuje, že jsme schopni popsat všechny prvky konečné Booleovy algebry, známe-li její atomy. Nejprve však uvedeme jedno pomocné tvrzení.

Lemma. Nechť X je Booleova algebra a $x \in X$. Pak v X existují prvky y, z takové, že $y \neq x \neq z$ a $x = y \vee z$ právě když x není nulový prvek ani atom algebry X.

Důkaz. Že pro nulový prvek ani atom algebry takové prvky y, z existovat nemohou, je zřejmé. Předpokládejme tedy, že x není nulový ani atom a tedy že existuje $a \in X$ tak, že $0 \prec a \prec x$. Potom $x = x \wedge 1 = x \wedge (a \vee \overline{a}) = (x \wedge a) \vee (x \wedge \overline{a}) = a \vee (x \wedge \overline{a})$ a tedy $x = y \vee z$ pokud $y = a$ a $z = x \wedge \overline{a}$. Zbývá ukázat, že $y \neq x \neq z$. $y \neq x$ platí zřejmě. Pokud by bylo $z = x$, potom $x \wedge \overline{a} = x$ neboli $x \preceq \overline{a}$. Celkově tedy $x \preceq \overline{a}$, $a \prec x$, neboli $a \prec \overline{a}$, z čehož dostáváme $a \wedge \overline{a} = a$, což je spor s komplementaritou.

Věta. Pro každý prvek $x \in X, x \neq 0$ konečné Booleovy algebry X platí $x = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$, kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou všechny atomy algebry X, pro něž $a_i \preceq x$, $i = 1, 2, \ldots n$.

Důkaz. Je-li x atom, pak stačí volit $n = 1$ a $x = a_1$. Nechť tedy x není atom. Potom dle předchozího lemmatu je $x = y \vee z$, kde $y \prec x$ a $z \prec x$. Pokud y a z jsou atomy, jsme hotovi. Pokud ne, pak opakováním tohoto postupu dojdeme po konečném počtu kroků ke vztahu $x = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$, kde a_i jsou vesměs atomy. Zbývá ukázat, že $a_1, a_2, \ldots a_n$ jsou všechny atomy srovnatelné s x. Nechť $a \prec x$ je libovolný atom srovnatelný s x. Potom $a = a \wedge x = a \wedge (a_1 \vee \ldots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee \ldots \vee (a \wedge a_n)$. Protože průsek dvou různých atomů je roven nulovému prvku, pak pokud by a nebyl mezi $a_1, \ldots a_n$, dostali bychom v posledním výrazu spojení samých nul, což je spor.

Nyní jsme již schopni vyslovit charakterizační větu.

Věta. *Stoneova o reprezentaci.*
Každá konečná Booleova algebra X je izomorfní s algebrou 2^M, kde M je množina všech atomů algebry X a 2^M je množina všech podmnožin množiny M s operacemi průniku a sjednocení množin.

Důkaz. Definujme zobrazení $f : X \to 2^M$ předpisem

$$f(0) = \emptyset$$
$$f(x) = \{a \in M; a \preceq x\} \text{ pro } x \neq 0$$

Toto zobrazení je viditelně bijekcí mezi X a 2^M. Je ještě nutné ukázat srovnatelnost, neboli že pro každé $x, y \in A$ je

$$\text{(i) } f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$$
$$\text{(ii) } f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$$

$$\text{(iii) } f(\overline{x}) = \overline{f(x)}$$

To však vyplývá z asociativity zúčastněných operací a doplňku.

Důsledek. Každá konečná Booleova algebra obsahuje 2^n prvků, kde n je počet jejích atomů.

Jiný způsob, jak charakterizovat konečné Booleovy algebry, podává následující postup.

Definice. Nechť X a Y jsou Booleovy algebry. *Direktním součinem* algeber X, Y rozumíme kartézský součin $X \times Y$ s operacemi průseku a spojení definovanými následovně.

$$\begin{aligned} (a,b) \wedge (c,d) &= (a \wedge c, b \wedge d) \\ (a,b) \vee (c,d) &= (a \vee c, b \vee d) \\ \overline{(a,b)} &= (\overline{a}, \overline{b}) \end{aligned}$$

Poznámka. Ještě by se mělo ověřit, že takto definovaná množina tvoří s danými operacemi Booleovu algebru. Toto ověřeí však není obtížné.

Příklad. Nechť $X = 2^{\{a\}} = (\emptyset, \{a\})$, $Y = (\emptyset, \{b\}) = 2^{\{b\}}$. Potom $X \times Y$ má 4 prvky $(\emptyset, \emptyset), (\{a\}, \emptyset), (\emptyset, \{b\}), (\{a\}, \{b\})$ a je evidentně izomorfní s algebrou $2^{\{a,b\}}$. Indukcí bychom potom mohli dokázat následující větu.

Věta. Konečná Booleova algebra s r atomy je izomorfní s algebrou $(B_2)^r$.

Algebru $(B_2)^r$ lze zřejmě interpretovat jako množinu r-složkových vektorů. ve kterých jsou jednotlivé složky rovny 0 nebo 1.

2.3 Booleovy funkce

V následujícím odstavci si ukážeme, že várazy známé z výrokové logiky lze charakterizovat pomocí vhodné Booleovy algebry. Jakýkoli výrok lze interpretovat jako proměnnou, která nabývá hodnoty 0 nebo 1. Vyhodnotit jakýkoli výrok, např $x \Rightarrow (y \wedge z)$ vlastně znamená určit jeho hodnotu z závislosti na hodnotách jednotlivých jeho složek. Od této chvíle budeme místo termínu výrok používat termín *Booleovská proměnná.* Výraz $x \Rightarrow (y \wedge z)$ pak lze interpretovat jako Booleovu funkci 3 proměnných, pro kterou např. $f(1,0,0) = 0$ nebo $f(0,1,0) = 1$.

Definice. Zobrazení $f : (B_2)^n \to B_2$ pro $n \geq 1$ se nazývá *Booleova funkce n proměnných.*

Poznámka. Lze definovat i funkci $f : B^n \to B$, kde B je libovolná Booleova algebra. Podle předchozí charakterizační věty lze ale tyto funkce redukovat na funkce podle předchozí definice.

Poznámky.
1. Operace doplňku je Booleovskou funkcí jedné proměnné, známé logické operace $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ nebo $\Leftrightarrow$ jsou pak Booleovými funkcemi 2 proměnných.
2. Předpis téže Booleovy funkce nemusí být dán jednoznačně. Například platí $x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})$ neboli tyto tři funkční předpisy definují tutéž Booleovu funkci.

Druhá poznámka pak vede k následující otázce - lze vyjádřit libovolnou funkci nějakým "hezkým", tj. hlavně přehledným způsobem. Jedna z otázek například může znít kolik různých logických operací je třeba k vyjádření libovolné Booleovské funkce. Lze ukázat, že stačí jediná, libovolnou Boolevu funkci lze např. vyjádřit pouze pomoí funkce $\overline{\wedge}$ definovanou předpisem $x \overline{\wedge} y = \overline{x} \vee \overline{y}$, ovšem zápisy Booleových funkcı, používající pouze tuto funkci, rozhodně přehledné nejsou. Nadruhé straně není obtížné si uvědomit, že libovolnou Booleovu funkci lze vyjádřit pomocí operace negace a operací $\vee$ a $\wedge$. Navíc si ukážeme, že pomocí těchto operací lze dosáhnout také přehledného zápisu libovolné Booleovy funkce.

Definice. *Booleův polynom* n proměnných je Booleova funkce proměnných $x_1, \dots x_n$ získaná pomocí následujících pravidel:

1. Konstanty 0,1 a každá proměnná x_i je Booleovým polynomem
2. Jsou-li a, b Booleovy polynomy, pak i funkce $\overline{a}$, $a \vee b$ a $a \wedge b$ Booleovými polynomy.

Podle úvah před touto definicí je zřejmé, že každá Booleova funkce je vlastně Booleovým polynomem, neboť Booleův polynom je právě každá Booleova funkce, kterou lze vyjádřit pomocí operace negace a operací $\vee$ a $\wedge$. Čtenář si to může snadno ověřit na funkcích implikace nebo ekvivalence. Ovšem ani zápis Booleovy funkce ve tvaru polynomu nemusí (a vlastně nikdy není) dán jednoznačně. Například funkce symetrické diference (vylučovací nebo) lze vyjaádřit jako $a \oplus b = (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)$, ale také $x \oplus y = (\overline{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y)$. Čili i v případě Booleových polynomů je na místě otázka, jak vyjádřit jakoukoli Booleovu funkci "vhodným" Booleovým polynomem.

Definice. Polynomy tvaru $y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_n$ nebo $y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_n$, kde $y_i = x_i$ nebo $y_i = \overline{x}_i$ se nazývají *klauzule (průseková, spojová)*, každé y_i nazýváme *literál* proměnné x_i. O polynomu, který je spojením průsekových resp. průsekem spojových klauzulí říkáme, že je napsán v *disjunktivní* resp. *konjunktivní* formě. Jestliže každá klauzule obsahuje literály všech proměnných, hovoříme o *úplné disjunktivní (konjunktivnı)* normální formě.

Věta. Každou nekonstantní Booleovu funkci n proměnných lze vyjádřit Booleovým polynomem n proměnných v úplné disjunktivní i úplné konjunktivní normální formě.

Důkaz.

Konstantními Booleovskými funkcemi jsou takové, které dávají hodnotu 0 nebo 1 bez ohledu na hodnoty jednotlivých proměnných. Polynom dávající hodnotu 1 se nazývá *tautologie*, polynom dávající hodnotu 0 pak *kontradikce.* Tautologii lze vyjádřit pouze v disjunktivní, kontradikci v konjunktivní formě.

3 Grafy

3.1 Pojem grafu

Představme si následující dva problémy.

Problém kropicího vozu. Máme před sebou plán města a úkol projet s kropicím vozem všechny ulice města a přitom najet co nejmenší vzdálenost. V ideálním případě pak kropicí vůz projede každou ulicí právě jednou.

Problém obchodního cestujícího. Obchodní cestující má navštívit několik míst, přičemž nemusí mezi všemi existovat přímé spojení. Jak si má naplánovat cestu, aby vyšla co nejlevněji? Případně může si svoji cestu naplá novat tak, aby každé místo navštívil právě jednou?

Tyto dva problémy můžeme interpretovat následovně: Nechť body v rovině, které budeme od této chvíle nazývat *vrcholy* představují křižovatky nebo místa, která má navštívit obchodní cestující. Dva vrcholy potom spojíme čarou zvanou *hrana*, jestliže mezi křižovatkami existuje ulice bez další křižovatky nebo kdzž mezi jednotlivými místy existuje přímé spojení. Takový obrázek složený z vrcholů a hran budeme nazývat grafem a otázka v případě kropicího vozu zní, zda je možné projít všechny hrany grafu právě jednou (a vrátit se na výchozí místo), v případě obchodního cestujícího pak, jestli lze obdobnou úlohu řešit pro vrcholy.

Pojem grafu je však třeba přesně definovat. Jestliže vrcholy budou reprezentovány jednoprvkovými množinami, pak hrany si můžeme představit jako dvouprvkové množiny, jejímiž prvky budou vrcholy, které hrana spojuje. Musíme však uvažovat jak hrany "průchozí" jak jedním směrem, například v případě jednosměrné ulice (pak je nutno určit, který vrchol je počáteční a který koncový a bude se tedy jednat o uspořádanou dvojici), tak oběma směry, kdy se bude jednat o neuspořádanou dvojici, a také hranu, jejíž oba konce jsou v témže vrcholu. Graf je tedy možné definovat následovně.

Definice. Nechť U je konečná množina. Dvojice $G = (V, E)$, kde $E \subset U \times U \cup \binom{U}{2}$ se nazývá (obecný) *graf.*
Je-li $H \subset U \times U$ říkáme, že G je *orientovaný graf.* Je-li $H \subset \binom{U}{2}$ říkáme, že G je *neorientovaný graf.*

Z této definice je zřejmé, že v roientovaném grafu budeme připouštět i hranu, která začíná i končí v témže vrcholu (takovou hranu budeme nazývat *smyčkou*, u neorientovaného grafu je taková hrana nepřípustná. Navíc v neorientovaném grafu mohou být dva různé vrcholy spojeny nejvýše jednou hranou, v orientovaném grafu totéž platí pro uspořádané dvojice vrcholů. Pokud chceme připustit i neorientované smyčky či násobné hrany, musíme definovat obecnější strukturu.

Definice. *Multigraf* G je spořádaná trojice $G = (V, E, \varepsilon)$, kde V a E jsou množiny (množina vrcholů a množina hran) a zobrazení $\varepsilon : H \to \binom{U}{2} \cup U^2 \cup U$ se nazývá *incidenčním zobrazením*.

Na každý graf je tedy možné se dívat jako na speciální příklad multigrafu. Následující tvrzení je evidentní.

Věta. Multigraf je grafem právě když zobrazení ε je prosté a navíc $\varepsilon^{-1}(U) = \emptyset$.

Na grafem jako na dvojicích množin definujeme rovnost přirozeným způsobem jako rovnost této dvojice množin, neboli dva grafy jsou si rovny jestliže mají totožné množiny vrcholůa množiny hran. Podíváme-li se na následující dva grafy na obr. ??, vidíme, že bude nutné definovat nějaký obecnéjší vztah mezi grafy, neboť striktně vzato tyto dva grafy rovné nejsou, ovšem z přiřazení vrcholůpodle dané tabulky je vidět, že jde vlastně o různý nákres téhož grafu. Než si tento pojem, který do značné míry nahradí pojem rovnosti grafů uvedeme, zayneme obecnější definicí.

Definice. Nechť G a G' jsou grafy. Potom zobrazení $f : V(G) \to V(G')$ nazveme *homomorfismem* grafu G do grafu G', jestliže

$$(x, y) \in E(G) \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E(G')$$
$$\{x, y\} \in E(G) \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(G')$$

Homomorfismus je tedy zobrazení množiny vrcholů grafu G do množiny vrcholů grafu G' takové, že dva vrcholy grafu G spojené hranou se zobrazí na dva vrcholy grafu G', které jsou rovněž hranou spojeny. Opačně to však platit nemusí, vrcholy nespojené hranou mohou být zobrazeny i na vrcholy spojené hranou.

Homomorfismus dvou grafů je poěrně obecným vztahem. Je tedy užitečné zavést jeho speciální případy. Nejprve si však zavedeme definici, která, je-li dán nějaký homomorfismus, převádí nikoli vrcholy, ale hrany grafů.

Definice. Nechť $G = (V, E), G' = (V', E')$, nechť $f : V \to V'$. Potom zobrazení $f^\star : \binom{U}{2} \cup U^2 \to \binom{U'}{2} \cup U'^2$ definované vztahy

$$f^\star(\{u, v\}) = \{f(u), f(v)\}$$
$$f^\star((u, v)) = (f(u), f(v))$$

nazýváme zobrazením *indukovaným* zobrazením f.

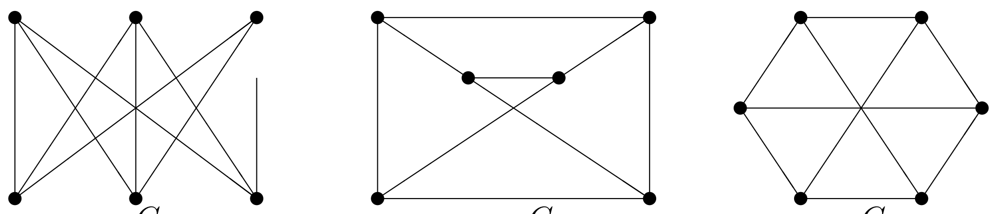
Poznámka. $f : V(G) \to V(G')$ je homomorfismus právě když $e \in E(G) \Rightarrow f^\star(e) \in E(G')$.

Definice. Nechť $G = (V, E), G' = (V', E')$ jsou grafy, $f : V \to V'$ homomorfismus. f se nazývá

- *vrcholový monomrfismus*, je-li f prosté
- *vrcholový epimorfismus*, je-li f na
- *hranový monomorfismus*, je-li $f^\star$ prosté
- it hranový epimorfismus, je-li $f^\star$ na
- *monomorfismus*, je-li f i $f^\star$ prosté
- *epimorfismus*, je-li f i $f^\star$ na
- *izomorfismus*, je-li f i $f^\star$ bijekce.

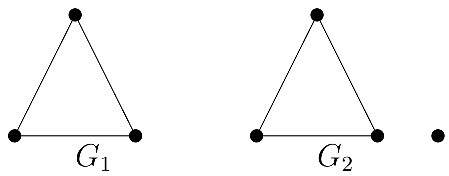
Definice. Dva grafy nazveme *izomorfní* jestliže mezi nimi existuje izomorfismus. Vztah izomorfismu grafů G a G' budeme značit $G \cong G'$.

Izomorfismus je tedy ten vztah, který v jistém smyslu nahrazuje rovnost grafů. Izomorfní grafy mají identické prakticky všechny podstatné vlastnosti, které se netýkají přímo otázky kreslenígrafů. Fakt, že dva grafy jsou izomorfní však nemusí být na první pohled patrný ani u relativně malých grafů. Například na následujícím obrázku ?? je trojice vzájemně izomorfních grafů. Čtenář si může sám najít odpovídající izomorfismy.



G_1 G_2 G_3

Při pohledu na speciální případy homomorfismů se zdá, že zobrazení "na hrany" musí být i zobrazením "na vrcholy" a podobně zobrazení prosté "vrcholově" musí být prosté i "hranově". Že to není zcela přesné ukazuje následující příklad dvou grafů a hranového epimorfismu, který není vrcholovým epimorfismem. Ovšem je z něj také vidět proč je to možné.



Definice. Vrchol $v \in V(G)$ je *izolovaný vrchol* grafu G, jestliže $E(G) \subset \binom{V'}{2} \cup V'^2$, kde $V' = V(G) \setminus \{u\}$.

Izolovaný vrchol je tedy takový, ze kterého nevychází žádná hrana. Nyní již můžeme vyslovit jednoduchá tvrzení, jejichž snadný důkaz přenecháváme čtenáři.

Věta.

1. Každý vrcholový monomorfismus je i hranovým monomorfismem.
2. Nechť G nemá izolované vrcholy. Potom každý hranový epimorfismus je i vrcholový epimorfismus.

V posledníćm části tohoto úvodího odstavce si ještě zadefinujeme vztah podgrafu. Tento vztah je samozřejmě definován množinově, ovšem je užitečné definovat dva speciální typy podgrafů.

Definice. Nechť $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ jsou grafy. Řekneme, že graf G_1 je

- *podgraf* grafu G_2 jestliže $V(G_1) \subset V(G_2)$ a $E(G_1) \subset E(G_2)$.
- *faktor* grafu G_2 jestliže $V(G_1) = V(G_2)$ a $E(G_1) \subset E(G_2)$.
- podgraf grafu G_2 *indukovaný množinou vrcholů* X jestliže $V(G_1) = X \subset V(G_2)$ a $E(G_1) = E(G_2) \cap (\binom{X}{2} \cup X \times X)$.

Faktor grafu je tedy podgraf, který obsahuje všechny vrcholy původního grafu, podgraf indukovaný na množině vrcholů pak podgraf, který obsahuje maximální možný počet hran vzhledem k dané množině vrcholů.

3.2 Neorientované grafy

V tomto paragrafu budeme pod termínem graf uvažovat neorientovaný graf, nebude-li řečeno jinak. Dále pod označením $\langle a, b\rangle$ budeme rozumět množinu všech celých čísel n takových, že $a \leq n \leq b$. Kromě toho budeme pro některé grafy používat speciální termíny.

Definice. Graf $G = (V, E)$ se nazývá

- *prázdný* jestliže $V = E = \emptyset$
- *diskrétní* jestliže $E = \emptyset$
- *úplný (klika)* jestliže $E = \binom{V}{2}$
- *kružnice* délky $n \geq 3$ jestliže $V = \langle 1, n\rangle$, $E = \{\{i, i+1\}, i \in \langle 1, n-1\rangle\} \cup \{\{1, n\}\}$
- *cesta* délky $n \geq 0$ jestliže $V = \langle 0, n\rangle$, $E = \{\{i, i+1\}, i \in \langle 0, n-1\rangle\}$.

Diskrétní graf na n vrcholech budeme značit D_n, kliku na n vrcholech K_n, kružnici délky n pak C_n a konečně cestu délky n budeme značit P_n.

Jako první si dokážeme vlastnost, která je celkem zřejmá, která je však patrně nejstarší známou grafovou vlastností, kterou dokázal již Leonhard Euler v osmnáctém století.

Definice. Nechť $G = (V(G), E(G))$, nechť $v \in V(G)$. Číslo

$$d_G(u) = |\{v \in V(G), \{u, v\} \in E(G)\}|$$

se nazývá *stupeň* vrcholu v v grafu G.

Stupeň vrcholu je tedy vlastně počet hran, které daný vrchol obsahují. V tomto smyslu lze izolovaný vrchol definovat jako vrchol stupně 0. Užitečné je však pojmenovat i vrchol stupně 1.

Definice. Vrchol stupně 1 se nazývá *koncový* vrchol grafu.

Nzní již slibovaný nejstarší vásledek teorie grafů. Od této chvíle budeme zásadně počet vrcholů grafu značit n, počet hran pak m.

Věta. V každém grafu platí

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(u) = 2m$$

Důkaz. Indukcí podle počtu hran grafu. Pokud G obsahuje jedinou hranu, je vše jasné. Nechť tedy uvedená vlastnost platí pro všechny grafy s $m-1$ hranami a uvažujme graf G s m hranami. Nechť h je libovolná hrana grafu G a nechť G' je graf, který dostaneme z grafu G vynecháním hrany h. Potom G' obsahuje $m-1$ hran a podle indukčního předpokladu je $\sum d_{G'}(v) = 2(m-1)$. Potom ale zřejmě $\sum d_G(v) = \sum d_{G'}(v) + 2 = 2(m-1) + 2 = 2m$.
■

Důsledek. Počet vrcholůlichého stupně je v každém grafu sudý.

Příklad. Pravidelné grafy, neexistence grafu jen s různými stupni, konstrukce grafu, který má jen dvojici vrcholů stejného stupně.

Definice. Posloupnost $a_1, a_2, \dots a_n$ se nazývá *grafová posloupnost* jestliže existuje graf o vrcholech $v_1, v_2 \dots v_n$ takový, že $d_G(v_i) = a_i$.

Grafová posloupnost je tedy taková, ke které existuje graf jehož vrcholy mají stupně rovnající se členům posloupnosti. Z předchozího je zřejmé, že tato posloupnost musí obsahovat pouze celá čísla mezi nulou a $n-1$, kde n je počet členů posloupnosti a že součet členů této posloupnosti musí být sudý. Toto vše jsou však jen nutné podmínky. Nutnou a postačující podmínku nám dává následující tvrzení.

Věta. Posloupnost $a_1, a_2, \dots a_n$ ve které je $a_{i+1} \leq a_i$ je grafová právě když je grafová posloupnost $a_2 - 1, a_3 - 1 \dots a_{a_1+1} - 1, a_{a_1+2}, \dots a_n$.

Uvedené tvrzení nám naznačuje, jak postupovat: odebereme první člen a hodnoty dalších členů, jejichž počet odpovídá hodnotě odebraného členu snížíme o jednotku, dokud nedojdeme k posloupnosti, která již evidentně grafová je nebo není. Probíráním takto vzniklých posloupností opačným směrem pak snadno zkonstruujeme příklad grafu, jehož soubor stupňů odpovídá dané posloupnosti. Izomorfní grafy mají samozřejmě týž soubor stupňů, poměrně snadno však najdeme veizomorfní grafy s týmž souborem stupňů.

Příklad. Existují také grafové posloupnosti, které graf zadávají až na izomorfismus jednoznačně. Takovým příkladem je například posloupnost 3, 3, 3, 1, 1, 1.

Definice. Nechť $f : P_n \to G$ je homomorfismus $f(0) = u$, $f(n) = v$. Podgraf $f(P_n)$ se nazývá *sled* z vrcholu u do vrcholu v. Je-li f hranový monomorfismus, pak se $f(P_n)$ nazývá *tah*, je-li f vrcholový monomorfismus, pak se $f(P_n)$ nazývá *cesta* z vrcholu u do vrcholu v.

Jinými slovy sled je taková posloupnost vrcholů grafu, ve které jsou každé dva následující vrcholy spojeny hranou, tah je sled, ve kterém se neopakují hrany, cesta je sled, ve kterém se neopakují vrcholy.

Definice. Jestliže pro každé $u, v \in V(G)$ existuje sled v G pak říkáme, že graf G je *souvislý*. *Komponentou* grafu G rozumíme souvislý graf $G' \subset G$ takový, že neexistuje souvislý graf G'', $G' \overset{\subset}{\neq} G'' \subset G$.

Komponenta je tedy maximální souvislý podgraf daného grafu. Následující jednoduchá tvrzení nám pak dávají základní vlastnosti komponent a souvislých grafů.

Věta. Nechť $u, v \in V(G)$. Pak v G existuje sled z u do v právě když existuje cesta z u do v.

Důkaz. Nechť z u do v existuje cesta, pak tato cesta je i sledem. Nechť mezi těmito vrcholy existuje v grafu sled, pak uvažujme sled nejkratší délky. Potom možnost, že se v tomto sledu opakují vrcholy vede exidentně ke sporu s tímto předpokladem.

Důsledek. G je souvislý právě když mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje cesta.

Věta. Nechť G je souvislý graf. Potom v G existujícm minimálně dva vrcholy u, v takové, že grafy $\langle V(G) \setminus u \rangle$ a $\langle V(G) \setminus v \rangle$ jsou souvislé.

Věta. Relace ρ na množině vrcholů grafu definovaná vztahem $u \rho v$ právě když v grafu existuje cesta z u do v je ekvivalencí a třídy ekvivalence jsou množiny vrcholů jednotlivých komponent.

Důkaz je zřejmý.

Důsledek. Dvě různé komponenty nemohou mít společný vrchol.

Důkaz. Nechť P je nejdelší cesta v grafu, nechť u a v jsou její koncové vrcholy. Předpokládejme, že graf $G' = \langle G \setminus u \rangle$ není souvislý. Nechť K je komponenta grafu G' obsahující cestu P. Protože G je souvislý a podle předpokladu $K \neq G'$, musí existovat cesta mezi libovolným vrcholem komponenty K a vrcholem grafu $\langle V(G) \setminus V(K) \rangle$ a tato cesta musí procházet vrcholem u. Z toho vyplývá, že vrchol u má souseda mimo komponentu K, což je ovšem spor s předpokladem, že P je cesta maximální možné délky.

Polsední tvrzení nám umožňuje dokázat dolní hranici pro počet hran souvislého grafu.

Věta. Je-li G souvislý graf, pak $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

Důkaz. Indukcí podle počtu vrcholů grafu. Graf o dvou vrcholech musí jednu hranu obsahovat, má-li být souvislý. Nechť věta platí pro grafy o n vrcholech a nechť G je souvislý graf o $n+1$ vrcholech, nechť u je vrchol grafu G takový, že graf $G' = \langle V(G) \setminus u \rangle$ je souvislý. Potom G' obsahuje n vrcholů a tudíž podle indukčního předpokladu obsahuje nejméně $n - 1$ hran. Protože vrchol u nemůže být izolovaný obsahuje graf G minimálně o jednu hranu více než graf G' a věta tedy pro něj platí také.

Uvedené tvrzení tedy mimo jiné říká, že pokud graf obsahuje příliš málo hran, nemůže být souvislý. Je však také zřejmé, že pokud graf obsahuje velké množství hran, pak už souvislý být musí. Následující tvrzení představuje větu tohoto typu. Nejprve však musíme uvést jednu definici.

Definice. Číslo $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v)$ se nazývá *minimální stupeň* grafu G.

Věta. Jestliže $\delta(G) \geq \frac{1}{2}|V(G)|$, potom je G souvislý graf.

Důkaz. Nechť G obsahuje více než jednu komponentu. Potom komponenta o nejmenším počtu vrcholukrm nemůže obsahovat více než $\frac{1}{2}|V(G)|$ vrcholů. Stupeň vrcholů této komponenty tak musí být ještě minimálně o jednotku menší.

Definice. Nechť $f : C_n \to G$ je homomorfismus. Potom $f(C_n)$ se nazývá *uzavřený sled*. Je-li f hranový monomorfismus, pak se $f(C_n)$ nazývá *uzavřený tah*, je-li f vrcholový monomorfismus, pak se $f(C_n)$ nazývá *kružnice*.

Příklad. Známé úlohy pro děti spočívají v nalezení nakreslení nějakého obrázku "jedním tahem", což grafově neznamená nic jiného, než, představíme-li si daný obrázek jako graf, jehož vrcholy jsou všechny body, ve kterých se stýká více čar a hrany pak jednotlivé čáry, otázku, zda v grafu existuje uzavřený tah, procházející všemi hranami grafu. Touto úlohou se zabýval a také ji vyřešil již Leonhard Euler a graf, ve kterém existuje takový tah, se po něm nazývá *eulerovský*. Odpověď na tuto otázku je až překvapivě jednoduchá.

Věta. Souvislý graf je eulerovský právě když obsahuje pouze vrcholy sudých stupňů.

Důkaz.

Je zajímavé, a netýká se to jenom tohoto příkladu, že zatímco úloha týkající se hran je dobře řešitelná, pak pro analogicky formulovanou úlohu týkající se vrcholů není její efektivní řešení známo a není ani známo, zda takové řešení může existovat.

V našem případě by se jednalo o úlohu nalézt kružnici procházející vrcholy daného grafu. Tento problém je také znám jako *problém obchodního cestujícího*, kdy vrcholy grafu představují města, která má obchodní cestující navštívit a dva vrcholy jsou spojeny hranou právě když mezi nimi existuje např. přímé letecké spojení. Úloha pak zní jak naplánovat návštěvu těchto měst tak, aby vyšla co nejlevněji, v ideálním případě tak, aby cestující navštívil každé město právě jednou.

Jako první si podobnou otázku položil W. R. Hamilton, po kterém se grafy, ve kterých existuje kružnice procházející všechny vrcholy grafy *hamiltonovské* a danou kružnici *hamiltonoskou kružnicí*. Zatímco předchozí věta nám dává jednoduchou nutnou a postačující podmínku pro to, aby graf byl eulerovský a důkaz věty pak udává i efektivní algoritmus pro nalezení eulerovského tahu, pak pro hamiltonovské grafy žádná taková nutná a postačující podmínka známa není a tudíž i alegoritmy pro hledání hamiltonovské kružnice musí více máně pracovat hrubou silou a jsou tudíž značně neefektivní. Otázka, zda existuje efektivní algoritmus pro hledání hamiltonovské kružnice je v poněkud obecnější formulaci jedním z nejvýznamnějších otevřených problémů současné matematiky.

Protipólem grafů obsahujících hamiltonovskou kružnici jsou grafy, která neobsahují vůbec žádnou kružnici. Tyto grafy mají v teorii grafů velký význam a tedy i vlastní terminologii.

Definice. Souvislý graf, který neobsahuje žádnou kružnici, se nazývá *strom*. Graf, jehož komponenty jsou stromy, se nazývá *les*.

Stromy lze definovat také jinými ekvivalentními vlastnostmi. Jedna z nich nám říká, že stromy jsou minimálními souvislými grafy ve smyslu existence vlastního souvislého faktoru. Proč tomu tak je nám ukáže pomocná věta, kterou uvedeme před vlastní charakterizací.

Lemma. Nechť G je souvislý graf, $C \subset G$ je kružnice v G, nechť $e \in E(C)$. Potom graf $G' = G \setminus e$ je souvislý.

Důkaz. Nechť $e = \{a, b\}$ a nechť u, v jsou libovolné dva vrcholy grafu G. Protože G je souvislý, existuje v G sled z u do v. Jestliže e není v tomto sledu obsažena, pak je tento sled sledem mezi u a v i v G' a jsme hotovi, pokud e je hranou tohoto sledu, pak zkonstuujeme nový sled tak, že na části z u do a budeme postupovat po původním sledu, poté projdeme z a do b po druhé části původní kružnice a pak se zase vrátíme na původní sled. Tím evidentně dostaneme sled z u do v v G'.

Věta. Nechť $G = (V(G), E(G)$, $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

1. G je strom.
2. $\forall u, v \in V(G)$ existuje právě jedna cesta z u do v v G.
3. G je souvislý a $m = n - 1$.
4. G jeminimální souvislý graf na množině vrcholů $V(G)$. Jinými slovy G je souvislý a neobsahuje žádný souvislý vlastní faktor.

Důkaz. Větu dokážeme pomocí několika implikací.

- $1 \Rightarrow 2$
  Protože G je strom, je souvislý a tudíž mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje cesta. Dvě cesty by však nutně vytvořily kružnici v G.

- $2 \Rightarrow 1$
  Pokud G obsahuje kružnici, potom mezi vrcholy této kružnice existují minimálně dvě cesty.

- $1 \Rightarrow 3$
  Indukcí podle počtu vrcholů. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť tvrzení platí pro stromy o n vrcholech. Uvažujme na stromu G o $n + 1$ vrcholech nejdelší cestu, nechť u je její koncový vrchol. Graf $G' = \langle V(G) \setminus u \rangle$ je podle jedné z předchozích vět souvislý, evidentně neobsahuje kružnici a je tedy stromem a podle indukčního předpokladu obsahuje n_1 hran. Kdybychom nyní vrchol u spojili se dvěma vrcholy x, y grafu G, vytvořili bychom mezi x a y druhou cestu v G a tudíž by G nebyl stromem. Proto u je koncový vrchol grafu G, což dokazuje druhý indukční krok.

- $3 \Rightarrow 4$
  Vyplývá okamžitě z faktu, že souvislý graf musí obsahovat minimálně $n - 1$ hran.

- $4 \Rightarrow 1$
  Souvislost je předpokladem v obou bodech a kdyby G obsahoval kružnici, pak by podle lemmatu před větou nebyl minimálním souvislým grafem.

Představme si nyní následující problém. Máme silniční síť, která je zavána sněhem. Je třeba ji co nejrychleji zprovoznit tak, aby každá obec oblasti byla dosažitelná. Představíme-li si tuto síť jako graf, ve kterém vrcholy budou obce a dvě obce budou spojeny hranou, pokud mezi nimi bude existovat silnice neprocházející jinou obcí, pak se problém převádí na problém najít v daném grafu jeho faktor obsahující co nejméně hran, ale je přitom souvislý a je tedy stromem.

Definice. Faktor grafu, ketrý je stromem, se nazývá *kostra.*

Věta. Každý souvislý graf obsahuje aspoň jednu kostru.

Důkaz bude spočívat v udání algoritmu, jak danou kostru najít.

Vyjdeme z podgrafu grafu G obsahujícím právě jednu hranu a budeme postupně přidávat hrany tak, že vždy spojíme vrchol již obsazený hranou s vrcholem, který zatím hranou obsazen není. Je-li takových možností více, můžeme zvolit libovolnou takovou hranu. Evidentně tímto postupem nemůžeme vytvořit kružnici a po $n-1$ krocích dostaneme graf s n vrcholy a $n - 1$ hranami, který neobsahuje kružnici a je tedy stromem.

Samozřejmě se nyní můžeme ptát, kolik má úloha najít kostru grafu řešení, či jak tuto úlohu vyřešit optimálním způsobem. Tyto problémy budou mimo jiné obsahem dalších kapitol. V nich se také dozvíme význam definic, které uvádíme na závěr tohoto odstavce.

Definice. Nechť $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$, nechť graf G má k komponent. Číslo $h(G) = n - k$se nazývá *hodnost grafu*, číslo $c(G) = m - n + k = m - h(G)$ se nazývá *cyklomatické číslo grafu.*

3.3 Orientované grafy

V tomto odstavci budeme pod pojmem graf rozumět orientovaný graf, nebude-li řečeno jinak. Opět pro některé grafy zavedeme speciální terminologii.

Definice.

- *Úplným orientovaným grafem* $\vec{K_n}$ je graf pro který $E = V \times V$.
- *orientovaná cesta* $\vec{P_n}$ je graf pro který $V(P) = \langle 0, n\rangle$, $E(P) = [i, i+1], i = 0, 1, \ldots n-1$.
- *cyklus* $\vec{C_n}$ je orientovaný graf pro který $V(C) = \langle 1, n\rangle$, $E(C) = [i, i+1] \cup [n, 1]$.

Mezi neorientovanými a orientovanými grafy existuje samozřejmě vazba. Jestliže v orintovaném grafu $\vec{G}$ "zrušíme" orientaci jeho hran, pak výsledný neorientovaný graf nazýváme *symetrizace* grafu $\vec{G}$. Naopak máme-li dán neorientovaný graf G, pak z něj můžeme utvořit dvěma přirozenými způsoby graf oreintovaný. Jednou možností je přiřadit každé hraně libovolnou orientaci. Pak hovoříme o *orientaci* grafu G, která tedy jak je vidět není dána jednoznačně. Nebo můžeme každou neorientovanou hranu $\{u, v\}$ nahradit dvojicí orientovaných hran $[u, v]$ a $[v, u]$. Pak hovoříme o *symetrické orientaci* grafu G.

Jak je vidět, množina hran orientovaného grafu $\vec{G}$ je podmnožinou kartézského součinu $V \times V$ a je tedy relací na množině V. Proto se také často hovoří o orientovaných grafech jako o relacích. Grafy bez smyček pak tak například reprezentují antireflexivní relaci, orientované grafy můžeme v tomto smyslu reprezentovat jako antireflexivní symetrické relace apod.

Cvičení. Jak vypadá graf ekvivalence?

Na orientované grafy lze přenést většinu vlastností zavedených pro neorientované grafy tak, že se definují jako vlastnost jejich symetrizace. Tímto způsobem se definuje například souvislost grafu. Často je však vhodné definovat pojmy specificky pro orientované grafy. Nelze například mechanicky převést definici stupně vrcholu, neboť bychom se dostali do problémů s paralelními opačně orientovanými hranami.

Definice. Nechť $V \in V(\vec{G})$. Číslo
$d^+_G(v) = |\{u \in V(\vec{G}); [u, v] \in E(\vec{G})\}|$ se nazývá *vstupní stupeň* vrcholu v
$d^-_G(v) = |\{u \in V(\vec{G}); [v, u] \in E(\vec{G})\}|$ se nazývá *výstupní stupeň* vrcholu v.

Věta pro vstupní a výstupní stupně vrcholů, jejíž důkaz ponecháváme jako cvičení, se potom dá vyslovit následovně.

Věta.

$$\sum d_G^-(v) = \sum d_G^+(v) = |E(\vec{G})|.$$

V podstatě analogicky jako pro neorientované grafy se zavádí termíny sled, tah či cesta.

Definice. Nechť $\vec{G}$ je orientovaný graf, $\vec{P_n}$ orientovaná cesta, $\vec{C_n}$ cyklus a nechť f je zobrazení z $\vec{P_n}$ či $\vec{C_n}$ do $\vec{G}$. Potom se f nazývá

- *orientovaný sled* jestliže f je homomorfismus $\vec{P_n}$ do $\vec{G}$.
- *orientovaný tah* jestliže f je navíc hranový monomorfismus,
- *orientovaná cesta* v grafu $\vec{G}$ jestliže f je navíc vrcholový monomorfismus.
- *uzavřený orientovaný sled* jestliže f je homomorfismus $\vec{C_n}$ do $\vec{G}$,
- *uzavřený orientovaný tah* jestliže f je navíc hranový monomorfismus,
- *cyklus* v grafu $\vec{G}$ jestliže f je navíc vrcholový monomorfismus.

Následující obrázek nám ukazuje, že jemnější terminologii je vhodné zavést i pro souvislost grafů. Na obrázku jsou totiž dva grafy, oba souvislé a přesto je mezi jejich souvislostí jistý rozdíl. Zatímco v prvním grafu existuje orientovaná cesta mezi libovolnými dvěma vrcholy, pak ve druhém žádná orintovaná cesta mezi vrcholy u a v neexistuje a první graf je tak v jistém smyslu "souvislejší než druhý graf. Mimo jiné proto se zavádí následující silnější termín.

Definice. Řekneme, že graf $\vec{G}$ je *silněsouvislý*, jestliže pro každé $x, y \in V(\vec{G})$ existuje v $\vec{G}$ orientovaný sled z x do y. Maximální silně souvislý podgraf grafu $\vec{G}$ se nazývá *kvazikomponenta* grafu $\vec{G}$.

Je zřejmé, že každý silně souvislý graf je také souvislý, opačné tvrzení však neplatí. Proto se někdy místo termínu souvislý používá termín slabě souvislý graf. Rovněž tak se snadno ukáže, že slovo sled je možné v definici silně souvislého grafu nahradit slovem cesta, stačí analogicky jako v neorientovaném případě uvažovat sled nejkratší možné délky. Následujítvrzení však již tak evidentní není.

Věta. Souvislý graf je silně souvislý právě když každá jeho hrana je obsažena v nějakém cyklu.

Důkaz. Je-li graf $\vec{G}$ silně souvislý a $[u,v] \in E(\vec{G})$, potom nejkratší cesta z v do u vytvoří spolu s hranou $[u,v]$ cyklus, ve kterém tato hrana leží. Nechť naopak v souvislém grafu $\vec{G}$ leží každá hrana v cyklu. V symetrizaci tohoto grafu existuje cesta z u do v pro libovolné dva vrcholy grafu $\vec{G}$, nechť tuto cestu tvoří vrcholy $u = v_0, v_1, \dots v_k = v$. Nyní sestrojíme orientovaný sled z u do v v $\vec{G}$ následujícím postupem: Je-li $[v_i, v_{i+1}], i = 0, 1, \dots k-1 \in E(\vec{G})$, pak tuto hranu použijeme, je-li $[v_i, v_{i+1}] \notin E(\vec{G})$, pak nutně $[v_{i+1}, v_i] \in E(\vec{G})$ a navíc tato hrana leží v nějakém cyklu. Pro konstruovaný sled pak použijeme zbytek tohoto cyklu.

Různé komponenty grafu jak známo nemohou obsahovat společné vrcholy a ani nemohou být spojeny hranou. Toto druhé tvrzení pro kvazikomponenty neplatí, jak je vidět třeba z příkladu na obr. ?? Pro vrcholy však tvrzení v platnosti zůstává a je důsledkem tvrzení následujícího, jehož důkaz ponecháváme jako cvičení.

Věta. Relace *oboustranné dosažitelnosti* definovaná na vrcholech $V(\vec{G})$ orientovaného grafu $\vec{G}$ vztahem $u\rho v$ právě když z u do v i z v do u existuje orientovaný sled v $\vec{G}$ je ekvivalencí a třídy ekvivalence jsou množiny vrcholůjednotlivých kvazikomponent.

Orientovaný graf je jak bylo řečeno silně souvislý právě když každá hrana leží v nějakém cyklu. Proti těmto grafům je pak logické postavit grafy, ve kterých neleží v cyklu žádná hrana.

Definice. Řekneme, že $\vec{G}$ je *acyklický* graf, jestliže neobsahuje žádný cyklus jako svůj podgraf.

Podobně jako v neorientovaném případě pro stromy lze i zde vyslovit několik ekvivalentních tvrzení, před jejichž vyslovením si nejprve uvedeme dvě definice. Je však nutno podotknout, že těmito ekvivalencemi podobnost se stromy končí, struktura acyklických grafů je od struktury stromů zcela odlišná.

Definice. Řekneme, že vrchol $v \in V(\vec{G})$ je
vstupní vrchol jestliže $d^-_{\vec{G}}(v) = 0$
výstupní vrchol jestliže $d^+_{\vec{G}}(v) = 0$.

Věta. Následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. $\vec{G}$ je acyklický graf
2. Každý neprázdný podgraf grafu $\vec{G}$ obsahuje vstupní vrchol
3. Každý neprázdný podgraf grafu $\vec{G}$ obsahuje výstupní vrchol
4. existuje takové očíslování vrcholů grafu $\vec{G}$ čísly $1, 2 \dots n$ tak, že $[i,j] \in E(\vec{G}) \Rightarrow i < j$

5. Každý orientovaný sled v $\vec{G}$ je cestou
6. $\vec{G}$ neobsahuje smyčky a má jen jednovrcholové kvazikomponenty.

Důkaz. Jak je ve větách tohoto typu obvyklé, dokážeme sérii implikací.

- $1 \Rightarrow 2$
  Uvažujme libovolný vrchol v_1 acyklického grafu $\vec{G}$. Pokud je tento vrchol vstupním vrcholem, jsme hotovi. Pokud ne, pak existuje vrchol v_2 takový, že $[v_1, v_2] \in E(\vec{G})$. Uvažujme nyní graf $\langle V(\vec{G}) \setminus v_1 \rangle$. Je-li v_2 vstupní vrchol v tomto grafu, je vstupním vrcholem i v grafu $\vec{G}$. Jestliže ne, pak opakováním tohoto postupu nutně po konečném počtu kroků dojdeme ve vstupnímu vrcholu grafu $\vec{G}$.
- $2 \Rightarrow 3$
  Jestliže v $\vec{G}$ změníme orientaci všech hran, pak vstupní vrchol tohoto grafu je výstupním vrcholem grafu $\vec{G}$.
- $3 \Rightarrow 4$
  Číslo 1 přiřadíme výstupnímu vrcholu grafu $\vec{G}$. Uvažujme graf $\vec{G}_1 = \langle V(\vec{G}) \setminus v_1 \rangle$. Tento graf rovněž obsahuje výstupní vrchol, který očíslujeme jako 2 a tento postup opakujeme.
- $4 \Rightarrow 1$
  Pokud by v $\vec{G}$ existoval cyklus, pak takové očíslování nemůže existovat.
- $1 \Rightarrow 5$
  Uvažuje sled, který není cestou. Buďto obsahuje smyčky a $\vec{G}$ není acyklický nebo musí obsahovat totožné vrcholy $v_i = v_j, i < j$ takové, že mezi vrcholy v_i a v_j již žádné vrcholy neopakují. Podsled $v_i, v_{i+1}, \ldots v_j$ nutně tvoří cyklus v $\vec{G}$.
- $5 \Rightarrow 1$
  Pokud v $\vec{G}$ existuje cyklus, pak jeho několikanásobným oběhnutím dostaneme sled, který není cestou.
- $1 \Rightarrow 6$
  V obou tvrzeních je vysloven předpoklad, že $\vec{G}$ neobsahuje smyčky. Pokud by $\vec{G}$ obsahoval vícevrcholovou kvazikomponentu, pak každá hrana této kvazikomponenty ležív cyklu složeném z vrcholukrm kvazikomponenty a $\vec{G}$ nemůže být acyklický.
- $6 \Rightarrow 1$
  Pokud v $\vec{G}$ existuje cyklus na více než jednom vrcholu, pak kvazikomponenta obsahující vrchol tohoto cyklu musí obsahovat všechny jeho vrcholy.

Podívejme se nyní na vlastnosti oreintovaných grafů jako na vlastnosti relací. Každý orientovaný graf $\vec{G}$ určuje relaci na $V(\vec{G})$ vztahem $x\rho y \Leftrightarrow [x, y] \in E(\vec{G})$. Je zřejmé, že relace určená tímto grafem je reflexivní pokud její graf obsahuje všechny smyčky, symetrická, pokud obsahuje pouze smyčky a paralelní opačně orientované hrany a antisymetrická pokud žádné paralelní hrany neobsahuje. V případě, že ρ je tranzitivní, pak pro její graf musí platit, že kdykoli v $\vec{G}$ existuje sled mezi u a v, pak nutně $[u, v] \in E(\vec{G})$. Toto tvrzení by se dokázalo stejně jako analogické tvrzení pro relace.

Podobně jako u relací je tedy i u orientovaných grafů definovat jejich reflexivní a reflexivně tranzitivní uzávěr grafu $\vec{G}$ tak, že reflexivní uzávěr grafu daného relací ρ je graf $\vec{G}^+$ daný tranzitivním uzávěrem relace ρ, reflexivně tranzitivní uzávěr tohoto grafu je pak graf $\vec{G}^\star$ daný reflexivně tranzitivním uzávěrem relace ρ. Pomocí těchto pojmů můžeme vyslovit další tvrzení ekvivalentně definující acyklický graf. V důkazu pak použijeme zřejmého tvrzení , že relace daná acyklickým grafem je antisymetrická.

Věta.
Orientovaný graf $\vec{G}$ je acyklický právě když graf $\vec{G}^+$ neobsahuje žádnou smyčku.
Orientovaný graf bez smyček $\vec{G}$ je acyklický právě když graf $\vec{G}^\star$ je grafem uspořádání na $V(\vec{G})$.

Pokud by vrchol v grafu $\vec{G}^+$ obsahoval smyčku, znamenalo by to, že v $\vec{G}$ existuje sled z v do v a tedy sled, který není cestou. Pokud naopak $\vec{G}$ obsahuje cyklus, pak v jeho tranzitivním uzávěru budou všechny vrcholy daného cyklu obsahovaly smyčku.

Reflexivně tranzitivní uzávěr libovolného grafu je pochopitelně reflexivní a tranzitivní. Pokud $[u, v] \in E(\vec{G}^\star)\&[v, u] \in E(\vec{G}^\star)$, pak v $\vec{G}$ existuje sled jak z u do v tak z v do u. Spojením těchto sledů pak získáme v $\vec{G}$ sled, který není cestou. Naopak pokud v $\vec{G}$ existuje cyklus délky alespoň 2, potom pro vrcholy u, v z tohoto cyklu platí $[u, v] \in E(\vec{G}^\star)\&[v, u] \in E(\vec{G}^\star)$.

Popis kvazikomponent je podle předchozích tvrzení velmi jednoduchý v případě acyklických a silně souvislých grafů. Jejich popis je však možno provést u libovolných grafů následujícím postupem.

Definice. Nechť $\vec{G}$ je orientovaný graf, $\vec{G}_1, \dots \vec{G}_k$ jeho kvazikomponenty. Graf $\vec{G}_C$= $(V(\vec{G}_C), E(\vec{G}_C))$, kde
$V(\vec{G}_C) = \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \dots \vec{G}_k\}$
$E(\vec{G}_C) = \{(\vec{G}_i, \vec{G}_j), i \neq j$ a existuje $x \in V(\vec{G}_i), y \in V(\vec{G}_j)$ tak, že $[x, y] \in E(\vec{G})\}$
nazveme *kondenzací (redukovaným grafem)* grafu $\vec{G}$.

Kondenzace grafu se tedy zkonstruuje tak, že se kovazikomponenty nahradí vrcholy a dvě kvazikomponenty jsou spojeny hranou jestliže mezi nimi vedla alespoň jedna hrana i v původním grafu. Lze si ji tedy jednoduše představit jako "stažení " jednotlivých kvazikomponent do jedjiného vrcholu. Pojem kondenzace grafu pak umožňuje vyslovit další tvrzení, jejichž důkaz již ponecháváme jako cvičení.

Věta. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf. Potom

1. $\vec{G}_C$ je acyklický graf.
2. $\vec{G}$ je silně souvislý právě když $\vec{G}_C$ je graf o jediném vrcholu.
3. $\vec{G}$ je acyklický právě když $\vec{G}=\vec{G}_C$.

4 Grafy a matice

V této kapitole si popíšeme vztahy mezi grafy a maticemi a především různé možnosti, jak popsat graf maticovým způsobem a jaké vlastnosti grafu z tohoto popisu lze vyčíst.

4.1 Incidenční matice

Definice. Nechť G je neorientovaný graf, $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$. Matice $M(G)$ typu $n \times m$ definovaná předpisem

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže} \quad v_i \in e_j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

se nazývá *(uzlo–hranová) incidenční matice* grafu G.

Definice. Nechť Gor je neorientovaný graf, $|V(Gor)| = n$, $|E(Gor)| = m$. Matice $M(Gor)$ typu $n \times m$ definovaná předpisem

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže} \quad v_i \text{je počátečním vrcholem} e_j \\ -1 & \text{jestliže} \quad v_i \text{je koncovým vrcholem} e_j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

se nazývá *(uzlo–hranová) incidenční matice* grafu Gor.

Incidenční matice grafu tedy v každém sloupci popisuje jednu hranu grafu a v každém sloupci tak má právě dva nenulové prvky. Právě tento fakt jí dává specifické vlastnosti, ze kterých lze vyčíst i vlastnosti jí náležejícího grafu. Probereme je zvlášť pro orientované a neorientované grafy.

4.1.1 Incidenční matice orientovaného grafu

Zde má incidenční matice v každém sloupci právě jednu jednotku a právě jedno číslo -1. Z toho okamžitě vyplývá

Tvrzení. Množina l řádků matice $M(\vec{G})$ kde $l \leq n$ je lineárně závislá právě když existuje její neprázdná podmnožina majícínulový součet.

Důkaz. Jestliže taková podmnožina existuje, je lineární závislost zřejmá. Nechť tedy naopak množina l řádků je lineárně závislá. Z definice lineární závislosti vyplývá, že existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_l$, alespoň jedno různé od nuly taková, že $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i = 0$. V tomto součtu nyní vybereme ty řádky, pro které je α_i nenulové. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je to prvních k řádků, neboť přehození řádků v matici znamená pouze přečíslování vrcholů grafu. Potom však má-li být součet $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$ skutečně roven nule, musí každý sloupec v těchto k řádcích obsahovat buď samé nuly nebo alespoň dvě nenulová čísla. V případě incidenční matice to znamená, že v každém sloupci jsou buďto samé nuly nebo obě nenulová čísla 1 a -1. Nulový součet všech těchto řádků je pak evidentní.

Zamyslíme-li se nad touto vlastností prvních k řádků matice $M(\vec{G})$, musíme dojít k závěru, že z vrcholů odpovídajících těmto řádkům nemůže již vycházet ani do nich vcházet žádná hrana a tvořítedy (slabou!) komponentu grafu $\vec{G}$ případně sjednocení komponent. Naopak také součet řádků matice odpovídajících komponentě grafu $\vec{G}$ je nulový. Po tomto zjištění je již jednoduchý důkaz následujícího tvrzení i jeho důsledku, který ukazuje na oprávněnost definice hodnosti grafu a jehož důkaz již ponecháme čtenáři jako cvičení.

Věta. Je-li $\vec{G}$ souvislý graf, pak $r(M(\vec{G})) = n - 1$.

Důkaz. Protože součet všech řádků matice $M(\vec{G})$ roven nule, je její hodnost menší než n pro jakýkoli graf. Nechť platí $r(M(\vec{G})) \leq n - 2$. Potom v matici existuje lineárně závislá množina řádků neobsahující všechny řádky matice. Podle předchozích úvah však vrcholy odpovídající těmto řádkům tvoří komponentu grafu nebo sjednocení komponent. V každém případě tak v grafu $\vec{G}$ existuje komponenta neobsahující všechny vrcholy grafu a tudíž graf $\vec{G}$ nemůže být souvislý.

Důsledek. Je-li $\vec{G}$ graf s k komponentami, pak $r(M(\vec{G})) = n - k$, neboli hodnost grafu je rovna hodnosti jeho incidenční matice.

Protože víme, že součet řádků incidenční matice je nulový, neztrácíme žádnou informaci, jestliže jeden jejířádek vynecháme.

Definice. Matice $M_R(\vec{G})$ vzniklá z matice $M(\vec{G})$ vynecháním posledního řádku v souvislém grafu $\vec{G}$ se nazývá *redukovaná incidenční matice* grafu $\vec{G}$.

Slovo poslední by se dalo nahradit slovem libovolný, neboť v původním grafu to znamená pouze přečíslování vrcholů. Předpoklad souvislosti je však ve vyslovené definici důležité, neboť jinak by nebylo možné vyslovit následující tvrzení.

Věta. Nechť $\vec{G}$ je souvislý graf bez smyček. Čtvercová podmatice M' matice $M_R(\vec{G})$ řádu $n-1$ je regulární právě když množina hran odpovídající jejím sloupcům je množinou hran kostry grafu $\vec{G}$.

Důkaz. Vynecháním sloupců v matici $M_R(\vec{G})$ dostaneme matici odpovídající nějakému faktoru grafu $\vec{G}$. Má-li to být čtercová regulární matice, pak tento faktor musí být souvislým faktorem o $n-1$ hranách, neboli musí to být strom a tudíž kostra grafu.

O čtvercových podmaticích redukované incidenční matice lze však říci více.

Věta. Nechť $\vec{G}$ je orientovaný graf bez smyček a nechť A je libovolná čtvercoá podmatice matice $M(\vec{G})$. Pak $|A| \in \{-1, 0, 1\}$.

Poznámka. Matice s touto vlastností se nazávají *totálně unimodulární*.

Důkaz. Indukcí podle řádu r dané podmatice. Pokud $r = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť tvrzení platí pro $n = k$ a uvžujme čtvercovou podmatici řádu $k + 1$, označme ji A_{k+1}. Pokud tato matice obsahuje nulový sloupec, je její determimant zřejmě roven nule. Pokud všechny její sloupce obsahují jak 1 tak -1, je součet jejích řádkůroven nule a je tedy také singulární. Zbývá možnost, že A_{k+1} obsahuje sloupec s právě jedním nenulovým číslem. Rozvojem podle tohoto sloupce pak dostaneme $|A_{k+1}| = (-1)^{i+j} a_{ij} |A_k|$, kde a_{ij} je jediné nenulové číslo sloupce, podle kterého rozvoj děláme, a je tedy rovno 1 nebo -1 a A_k je čtvercová podmatice řádu k a podle indukčního předpokladu je $|A_k| \in \{-1, 0, 1\}$. Nyní již evidentně do této množiny patří i determinant matice A_{k+1}.

Spojením tohoto výsledku a věty známé z lineární algebry dostaneme význam redukované incidenční matice, či lépe matice, která z této matice vznikne jednoduchou operací. Protože následující tvrzení patří svým charakterem do lineární algebry, nebudeme uvádět jeho důkaz, musíme však zavést následující značení: Nechť A je matice typu $p \times q$, kde $p \leq q$, nechť $I \subset \{1, 2, \ldots q\}, |I| = p$. Matici tvořenou sloupci z indexové množiny I značíme A_I.

Věta. *Cauchy – Binet*
Nechť A je matice typu $p \times q$, $p \leq q$. Potom

$$|AA^T| = \sum_I |A_I|^2$$

Podívejme se, co toto tvrzení znamená pro redukovanou incidenční matici. Druhé mocnina determinantu je vždy rovna nule nebo jedné, neboli úkol zjistit velikost determinantu redukuje na problém určení počtu regulárních podmatic řádu $n-1$. Vzhledem k tomu, že tato matice je regulární právě když sloupce této podmatice odpovídají kostře grafu, je následující tvrzení již zřejmé.

Věta. Nechť $\vec{G}$ je souvislý graf bez smyček, $M = M_R(\vec{G})$. Pak počet různých koster grafu $\vec{G}$ je roven $|MM^T|$.

Je dobré podotknout, že se jedná o počet různých koster, nikoli neizomorfních. Důležité však také je, že matici MM^T můžeme zkonstuovat snadno rovnou z grafu, jak ukazuje následující vztah.

Otázka nyní zní, zda by nebylo možné zkonstruovat matici MM^T rychlejším způsobem, než přes incidenční matici. Odpověďď je kladná a je užitečná především pro neorientovan'e grafy. Prvek na diagonále bude vlastně podle předpisu pro násobení matic roven skalárnímu součinu odpovídajícího řádku matice $M(\vec{G})$ se sebou samým. Ovšem tam najdeme nulu v případě, že do vrcholu odpovídajího danému sloupci nevede hrana a jednička nebo -1 pokud taková hrana existuje. Ve skalárním součinu pak dostanu vlastně počet hran z vrcholu vycházejících, neboli jeho stupeň.

Mimo diagonálu pak se jedná o skalární součin odpovídajících řádků. Tam se mohou potkat dvě nenulová čísla pouze pokud jsou tyto vrcholy spojeny hranou. Ve sloupci dané hrany se v tomto případě setkají jednička a -1. Pokud graf neosahuje paralelní hrany jako v předpokladu následující věty, pak můě tato situace nastat nejvýše jednou. Tyto úvahy vlastně již zmíněnou větu dokazují.

Věta. Nechť G je souvislý neorientovaný graf, $\vec{G}$ jeho libovolná orientace, $A = M(\vec{G})(M(\vec{G}))^T$, $A_R = M_R(\vec{G})(M_R(\vec{G}))^T$. Potom pro všechny prvky $\alpha_{i,j}$ matice A platí

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad i \neq j \quad \{i,j\} \notin E(G) \\ -1 & \text{pro} \quad i \neq j \quad \{i,j\} \in E(G) \\ d_G(v_i) & \text{pro} \quad i = j \end{cases}$$

Matice A_R se pak sestrojí z matice A vynecháním posledního řádku a sloupce.

Definice. Matice zkonstruovaná podle předchozí věty se nazývá *Laplaceova matice sousednosti* grafu G.

Příklad. Kolik existuje koster úplného grafu?
Je zřejmé, že je tentýž jako počet koster jeho libovolné orientace. Podle předchozí věty

můžeme rovnou sestavit jeho Laplaceovu matici sousednosti. Ta bude mít na diagonále $n-1$ a všude jinde -1. Zbývá určit její determinant. Čtenář si může snadno ověřit, že pokud v prvním kroku přičteme k prvnímu řádku všechnyostatní a poté ke všem ostatním řádkům přičteme takto vzniklý první řádek, lehce zjistíme, že tento determinant je roven n^{n-2}, což je také hledaný počet úplného grafu.

4.1.2 Incidenční matice neorientovaného grafu

Zde obashuje incidenční matice pouze hodnoty 0 a 1. Navíc většinu vlastností grafu vyčteme z vlastností libovolné jeho orientace, jak je zřejmé z předchozího paragrafu. Důležité však je, že pokud obvyklé sčítání a násobení nahradíme sčítáním a násobením modulo 2, pak tvrzení pro incidenční matici orientovaného grafu zůstanou v platnosti a jejich důkazy budou identické.

Definice. Označme $\mathcal{M}(G)$ lineární prostor nad tělesem $\mathcal{Z}_2$ generovaný řádky matice $M(G)$. *Hodností modulo 2* matice $M(G)$ značenou $h_2(M(G))$ pak budemerozumět dimenzi tohoto prostoru.

Jak jsme již uvedli, mnoho tvrzení vyslovených pro orientované grafy lze nyní vyslovit i dokázat zcela analogicky. Omezíme se proto pouze na jejich stručný výčet.

Tvrzení. Pro každý neorientovaný graf G je $h_2(M(G)) \leq n - 1$.

Věta. Nechť G je souvislý neorientovaný graf, $1 \leq r \leq n - 1$. Pak libovolné množina r řádků matice $M(G)$ je lineárně nezávislá (nad tělesem $\mathcal{Z}_2$).

Důsledky.

- Je-li G souvislý, pak $h_2(M(G)) = n - 1$
- Má-li G k komponent, pak $h_2(M(G)) = n - k$

4.2 Matice kružnic

V tomto odstavci budeme vždy pod termínem graf uvažovat souvislý neorientovaný graf. Navíc narozdíl od předchozího paragrafu nebudou definované matice popisovat celý graf, ale zaměří se pouze na některé jeho vlastnosti. Zde se, jak je již z názvu odstavce patrné, zaměříme na popis kružnic v grafu. Nejprve však jedna pomocná definice.

Definice. Nechť G je souvislý neorientovaný graf, T jeho kostra. Potom hrany kostry T nazveme *větve* a hrany mimo T *tětivy*..

Nyní když budeme uvažovat graf, ve kterém zvolíme nějakou jeho kostru, pak pokud k této kostře přidáme právě jednu tětivu, dostaneme faktor původního grafu, který bude evidentně obsahovat právě jednu kružnici. Zkusme tedy k této kostře přidávat postupně všechny tětivy grafu.

Nechť T je kostra grafu G, nechť $h_1, h_2, \dots h_c$ jsou všechny tětivy grafu G vzhledem k této kostře. Označme C_i kružnici grafu $T + h_i$, který vznikne z kostry T přidáním této hrany. Množina kružnic $F = \{C_1, C_2, \dots C_c\}$ se nazývá *fundamentální soustava kružnic* grafu G vzhledem ke kostře T.

Fundamentální soustava kružnic samozřejmě obecně nepopisuje všechny kružnice grafu a závisí na volbě kostry grafu. Některé vlastnosti, jako například počet kružnic fundamentální soustavy na volbě kostry nezávisí .

Definice. Nechť G je souvislý neorientovaný graf, $C_1, C_2, \dots C_p$ všechny jeho kružnice. Matice $C(G)$ typu $p \times m$ definovaná předpisem

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže} \quad h_j \in E(C_i) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

se nazývá *úplná matice kružnic* grafu G. Podmatice $C_F(G)$ typu $c \times m$ jejíž řádky odpovídají kružnicím fundamentální soustavy F se nazývá *fundamentální matice kružnic* grafu G.

Následující věta pak uvádí základní vlastnosti právě zkonstruovaných matic kružnic grafu.

Věta. Nechť G je souvislý graf, T jeho kostra a F příslušná fundamentální soustava kružnic. Potom

1. Při vhodném očíslování hran grafu G je

$$C_F(G) = [I_c|K]$$

2. $h_2(C_F(G)) = c = m - n + 1$
3. $M(G).(C(G))^T = O$
4. $h_2(C(G)) = c$

Důkaz.

1. stačí jako první očíslovat tětivy a teprve poté větve vzhledem k dané kostře.
2. plyne ihned z faktu, že matice obsahuje jednotkovou podmatici.
3. Označme $A = M(G).(C(G))^T$. Potom $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} \mu_{i,k}\gamma_{j,k}$. k-tý sčítanec je přitom roven 1 právě když k-tá hrana leží v j-té kružnici a obsahuje i-tý vrchol. Ale jestliže vrchol v_i na kružnici neleží , pak taková hrana neexistuje a pokud ano, pak jsou takové hrany právě dvě. Součet modulo 2 je tedy vždy roven nule.

4. Z předchozího bodu plyne, že každý řádek matice $C(G)$ je řešením soustavy $M(G)\vec{x} = 0$, tedy prostor generovaný řádky matice $C(G)$ je podprostorem prostoru všech řešení této soustavy, její hodnost tedy nemůže bát větší než dimenze tohoto prostoru, neboli $h_2(C(G)) \leq m - h_2(M(G)) = m - n + 1 = c$. Protože však $C(G)$ obsahuje podmatici $C_F(G)$ hodnosti c, musí v uvedeném vztahu nastat rovnost.

Důsledek. Každá kružnice grafu G je modulo 2 součtem nějakých kružnic libovolné fundamentální soustavy.

Každá kružnice grafu G tedy leží v prostoru nad tělesem $\mathcal{Z}_2$ generovaný řádky fundamentální matice kružnic. Podívejme se tedy na základní vlastnosti tohoto prostoru, který budeme značit $\mathcal{C}(G)$.

Tvrzení.

1. $\mathcal{C}(G)$ obsahuje všechny řádky $C(G)$.
2. Dimenze $\mathcal{C}(G)$ je rovna $m - n + 1$.
3. $\mathcal{C}(G) \perp \mathcal{M}(G)$
4. $\mathcal{C}(G)$ je ortigonální doplněk $\mathcal{M}(G)$.
5. $\mathcal{C}(G)$ obsahuje hranově disjunktní sjednocení kružnic grafu G.

Na závěr uvažujme, že graf není souvislý. Pak lze matici, ať již fundamentální nebo úplnou reprezentovat jako spojení odpovídajících matic jednotlivých komplnent. Její hodnost by tedy byla rovna $m-n+k$, kde k je počet komponent grafu. I v tomto případě by prostory generované řádky incidenční matice a řádky matice kružnic byly vzájemně ortogonálními doplňky.

4.3 Matice řezů.

Jak ještě dále uvidíme, v teorii grafů hrají důležitou úlohu množiny hran, které graf "rozdělí" na více částí. Takové množiny však musíme přesněji definovat.

Definice. Nechť G je neorientovaný graf. Minimální množina hran $R \subset E(G)$ taková, že $G \setminus R$ má o jednu komponentu více než G se nazývá *(hranový) řez* grafu G.

Prvním problémem je nyní popis množiny řezů. Opět se soustředíme pouze na souvislé grafy, neboť v opačném případě je možné pracovat s každou komponentou zvlášť. Nejprve dvě pomocná tvrzení.

Věta. Nechť G je souvislý graf, R řez G. Pak existuje rozklad množiny $V(G)$ na množiny V_1, V_2 takový, že $\{x, y\} \in R \Leftrightarrow x \in V_1 \& y \in V_2$.

Důkaz. $G \setminus R$ má dvě komponenty a V_1 a V_2 jsou množiny vrcholů těchto komponent.

Nechť G je souvislý neorientovaný graf. Pak pro každou kružnici $C \subset G$ a každý řez $R \subset E(G)$ platí $|R \cap E(C)| \equiv 0(mod \quad 2)$, neboli každá kružnice a každý řez mají sudý počet společných hran.

Nechť K_1 a K_2 jsou komponenty grafu $G \setminus R$. Začneme-li procházet vrcholy kružnice např v K_1 pak ke každému návratu do této komponenty potřebujeme dvě hrany řezu, jejich celkový počet tedy bude sudý.

První tvrzení nám tedy říká, že každý řez definuje rozklad množiny vrcholů. Je přirozené se ptát, zda také naopak každý rozklad množiny $V(G)$ definuje řez tak, že ten budou tvořit hrany spojující odpovídajících množin rozkladu. Odpověď je záporná, neboť výsledný graf může obsahovat větší počet komponent nežli požadované dvě. Důležité tedy bude, aby grafy indukované na množinách rozkladu byly souvislé. To máme zaručeno v případě, že vezmeme kostru grafu a za třídy komponent vezmeme množiny vrcholů komponent vzniklých odstraněním jedné hrany z kostry. Nejen z tohoto důvodu se zavádí následující definice.

Definice. Nechť G je souvislý graf, T jeho kostra a $e_1, e_2, \dots e_{n-1}$ hrany této kostry. Pro každou $e_i \in E(T)$ označme $R_i = \{\{x, y\} \in E(G); x, y$ jsou v různých komponentách grafu $T - e_i\}$. Množina $F = \{R_1, R_2, \dots R_{n-1}\}$ se nazývá *fundamentální soustava řezů* grafu G.

Definice. Nechť G je souvislý graf, $R_1, R_2, \dots R_r$ všechny jeho řezy, F fundamentální soustava řezů. Matice $R(G)$ typu $r \times m$ definovaná

$$\rho_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže} \quad e_j \in R_i \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

se nazývá *úplná matice (hranových) řezů* grafu G. Podmatice $R_F(G)$ typu $(n-1) \times m$ matice $R(G)$, jejíž řádky odpovídají prvkům soustavy F se nazývá *fundamentální matice řezů* grafu G.

Nyní se opět podívejme na základní vlastnosti obou typů matic řezů.

Věta. Nechť G je souvislý neorientovaný graf, T jeho kostra a F příslušná fundamentální soustava řezů. Potom platí

1. Při vhodném očíslování hran grafu G je

   $$R_F(G) = [I_{n-1}|K]$$

   kde I_{n-1} je jednotková matice řádu $n - 1$.

2. $h_2(R_F(G)) = n - 1$
3. $R(G).(C(G))^T = 0$
4. $h_2(R(G)) = n - 1$

Důkaz.

1. Stačíočíslovat nejprve hrany kostry.
2. Plyne ihned z předchozího bodu (obsahuje jednotkovou podmatici).
3. Podle předchozí věty má každá kružnice a každý řez sudý počet společných hran.
4. Z (ii) plyne $h_2(R(G)) \geq n - 1$, podle (iii) je R(G) ortogonální k C(G), její řádky tedy leží v ortogonálním doplňku $\mathcal{C}(G)$ v $\mathcal{Z}_2^m$. Ten má dimenzi $m-(m-n+1) = n-1$ a tedy $h_2(R(G)) \leq n - 1$. Celkově tedy nastává rovnost.

Z posledního tvrzení vyplývá, že lineární obal řádků matice $R(G)$ je ortogonálním doplňkem prostoru kružnic $\mathcal{C}(G)$ v $\mathcal{Z}_2^m$. V předchozí kapitole jsme však dokázali, že tentýž ortogonální doplněk generují také řádky incidenční matice. Čili řádky matice $R(G)$ generují tentýž prostor jako řádky matice $M(G)$. Proto má opodstatnění následující definice.

Definice. Prostor $\mathcal{M}(G)$ generovaný řádky incidenční matice grafu se nazývá *prostor řezů* grafu G.

4.4 Matice sousednosti

Z předchozích tupů matice pouze incidenční matice popisovala zadaný graf jednoznačně, měla zase tu nevýhodu, že obecně mohla dosahovat značné velikosti, což bylo dáno množstvím nul v této matici obsažených. Otázka proto zní, zda je možné graf popsat jednoznačně a přitom stručnějším způsobem. Jednu z možností dává následující definice.

Definice. Nechť $\vec{G}$ je orientovaný graf. Čtvercová matice $S(\vec{G})$ řádu n definovaná předpisem

$$\sigma_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže} \quad (u_i, u_j) \in E(\vec{G}) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

se nazývá *matice sousednosti* grafu $\vec{G}$.
Pro neorientovaný graf definujeme matici sousednosti jako matici sousednosti jeho symetrické orientace.

U neorientovaného grafu jsme sejiž setkali s jedním typem matice sousednosti, s Laplaceovou maticí sousednosti. Mezi ní a takto definovanou maticí sousednosti je zřejmý vztah.

Věta. Nechť G je neorientovaný graf. Potom
$L(G) = \operatorname{diag}[d_G(v_1), \ldots d_G(v_n)] - S(G)$.

Podobně jako u předchozích matic se i zde budeme ptát, jaké vlastnosti lze vyčíst z matice sousednosti. U této matice je vhodné pracovat s jejími mocninami.

Věta. Nechť $\vec{G}$ je orientovaný graf. Potom prvek $\sigma_{i,j}^{(k)}$ matice $(S(G))^k$ je roven počtu orientovaných sledů délky k z vrcholu v_i do vrcholu v_j v grafu $\vec{G}$.

Důkaz. Indukcí podle k.
Pro $k = 1$ je tvrzení zřejmé. Pro $k = 2$ dostáváme $\sigma_{i,j}^{(2)} = \sum_{p=1}^{n} \sigma_{i,p}\sigma_{p,j}$. Je evidentní, že v této sumě se sčítají pouze nuly a jednotky a sčítanec pro konkrétní p je roven jedné právě když z vrcholu v_i vede orientovaný sled do vrcholu v_j přes vrchol v_p. Celkově tedy skutečně dostaneme počet orientovaných sledůdélky 2 z v_i do v_j.

Nechť nyní věta platí pro $(S(G))^{k-1}$. Potom $(S(G))^k = (S(G))^{k-1}.S(G)$ neboli $\sigma_{i,j}^{(k)} = \sum_{p=1}^{n} \sigma_{i,p}^{(k-1)}\sigma_{p,j}$. V každém sčítanci této sumy pak $\sigma_{i,p}^{(k-1)}$ představuje počet sledů délky $k-1$ z u_i do u_p a $\sigma_{p,j}$ je rovno jedné právě když existuje hrana z u_p do u_j. Každý sčítanec tedy reprezentuje počet sledů délky k z u_i do u_j s předposledním vrcholem u_p. Celkově pro $p = 1, 2, \ldots n$ tak skutečně dostaneme počet sledů délky k z u_i do u_j.

Definice. Nechť $\vec{G}$ je orientovaný graf, nechť u a v jsou dva jeho vrcholy. Délka nejkratšího orientovaného sledu z u do v v $\vec{G}$ se nazývá *vzdálenost vrcholů* u, v v grafu $\vec{G}$ a značí $d_{\vec{G}}(u, v)$). Neexistuje-li mezi u a v sled v $\vec{G}$ pak klademe $d_{\vec{G}}(u, v) = \infty$.
Pro neorientovaný graf se vzdálenost definuje jako vzdálenost v jeho symetrické orientaci.

Vzdálenost vrcholů v souvislém neorientovaném grafu je jedním z příkladů obefcnější struktury. *Metrickým prostorem* nazýváme množinu M společně s funkcí $f : M \times M \to \langle 0, \infty)$, která splňuje následující vlastnosti:

1. $f(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $f(a, b) = f(b, a)$
3. $f(a, b) + f(b, c) \geq f(a, c)$
   trojúhelníková nerovnost

Funkce f se potom nazývá *metrika*. Snadno se ověří, že v souvislém neorientovaném grafu vzdálenost vrcholů splňuje požadavky na metriku. V orientovaném grafu to pravda není, neboť tam obecně neplatí druhá vlastnost metriky.

Definice. Nechť $\vec{G}$ je orientovaný graf. Čtvercová matice $D(\vec{G})$ řádu n definovaná předpisem

$$\delta_{i,j} = d_G(u_i, u_j)$$

se nazývá *distanční matice* grafu $\vec{G}$.

Pro neorientovaný graf G definujeme $D(G)$ jako matici jeho symetrické orientace.

Následující tvrzení nám dává návod, jak distanční matici konstruovat. Tato konstrukce není příliš vhodná, neboť je zbytečně časově náročná. Efektivnější algoritmus si uvedeme v příští kapitole, neboť jej lze sestavit pro obecnější případ.

Věta. Prvek $\delta_{i,j}$ matice $D(\vec{G})$ pro $i \neq j$ je roven nejmenší mocnině k, pro kterou je prvek $\sigma_{i,j}^{(k)}$ matice $(S(\vec{G}))^k$ nenulový.

Důkaz je z předchozího zřejmý.

Nyní si uvedeme dalšíz řady ekvivalentních tvrzení pro acyklické grafy.

Věta. Graf $\vec{G}$ je acyklický práě když existuje $k \in N$ takové, že $(S(\vec{G}))^k = 0$.

Důkaz. Jestliže $\vec{G}$ obsahuje cyklus, pak zřejmě na tomto cyklu existuje sled libovolné délky a žádná mocnina tak nemůže být nulová.Jestliže naopak $\vec{G}$ je acyklický, pak je každý sled cestou, nejdelší sled může mít délku maximálně $n-1$ a proto $(S(\vec{G}))^n = 0$.

Charakterizovat lze i matice sousednosti silně souvislých grafů.

Definice. *Permutační matice* je matice, která obsahuje v každém řádku i sloupci právě jednu jedničku a jinak nuly.

Je zřejmé, že permutační matice musí být čtvercová a že existuje bijekce mezi množinou všech permutací n prvků a všech permutačních matic řádu n, kdy n-tý prvek permutace nám udává, na kterém místě je jednotkový prvek v n-tém řádku matice. Význam permutačních matic je ale také následující: Nechť A a P jsou čtvercové matice řádu n. Potom součin PA vlastně znamená přehození řádků matice A podle dané permutace, součin AP^T potom obdobné přehození sloupců. Součin PAP^T pak tedy představuje paralelní přehození řádků i sloupců.

To má velký význam pro matici sousednosti nějakého grafu, neboť potom matice PAP^T je maticí sousednosti téhož grafu jako matice A, pouze s jinak očíslovanými vrcholy. Představme si nyní orientovaný graf, který není silně souvislý a tudíž jeho kondenzace není jednovrcholová. Připomeňme, že kondenzace je acyklický graf a očíslujme kvazikomponenty v kondenzaci podle známých pravidel pro číslování vrcholů acyklického grafu. V původním grafu pak nejprve libovolně očíslujme vrcholy odpovídající první kvazikomponentě. Z této kvazikomponenty mohou hrany vycházet pouze směrem ven a proto v matici sousednosti nutně vznikne blok složený z nul. Tato úvaha vede k následující definici a je také hlavní myšlenkou důkazu charakterizace silně souvislých grafů, jejíž pečlivý důkaz ponecháváme čtenáři.

Definice. Matice A se nazývá *reducibilní*, jestliže existuje permutační matice P taková, že

$$PAP^T = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline 0 & A_{2,2} \end{array}\right)$$

kde $A_{1,1}$ a $A_{2,2}$ jsou čtvercové matice.

Matice se nazývá *ireducibilní*, jestliže není reducibilní.

Věta. Orientovaný graf je silně souvislý, právě když jeho matice sousednosti je ireducibilní.

Příklad. Matice se nazývá *blokově trojúhlelníková*, jestliže jejídiagonála je pokryta čtvercovými maticemi, pod kterými již jsou pouze nuly. Pouze zobecněním předchozí charakterizace je úvaha, podle které lze vrcholy grafu očíslovat tak, že tyto diagonální čtvercové bloky budou odpovídat právě kvazikomponentám daného grafu. I z tohoto důvodu se většinou považuje matice řádu 1 s nulou jako svým jediným prvkem za ireducibilní.

5 Ohodnocené grafy

eeeeeee