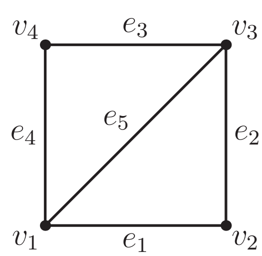
Kapitola 8

Lineární prostory grafu

Podobně, jako jsme definovali incidenční matici orientované grafy, lze ji zavést i pro grafy neorientované. Vzhledem k tomu, že hrany těchto grafů nemají směr, vystačíme zde s hodnotami 0 a 1. Je-li tedy G neorientovaný graf s n vrcholy $v_1, \ldots, v_n$ a m hranami $e_1, \ldots, e_m$, pak jeho *incidenční matice* $M(G)$ je definována předpisem $M(G) = (m_{ij})$, kde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } v_i \in e_j, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

pro $i = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, m$.



Obrázek 8.1: Neorientovaný graf H.

Graf na obr. 8.1 má například následující incidenční matici (i-tý řádek odpovídá vrcholu v_i, j-tý sloupec hraně e_j):

$$M(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že každý sloupec incidenční matice nyní obsahuje právě dvě položky, které jsou rovny jedné. Stejně jako u orientovaných grafů tak dokážeme jednoznačně zrekonstruovat poslední řádek z řádků předcházejících. Asi bychom proto čekali, že řádky takovéto matice jsou opět lineárně závislé. Výše uvedená matice $M(H)$ má však překvapivě hodnost 4, tedy maximální možnou!

Záhada má jednoduché řešení:

S incidenční maticí neorientovaného grafu
je třeba pracovat nad tělesem $\mathbf{Z}_2$.

Co to přesně obnáší, uvidíme v následujícím oddílu.

8.1 Hodnost nad $\mathbf{Z}_2$

Řádky matice $M(G)$ jsou vektory složené z m nul a jedniček. Můžeme je tedy interpretovat jako prvky vektorového prostoru $\mathbf{Z}_2^m$ dimenze m nad tělesem $\mathbf{Z}_2$. Veškerá aritmetika v tomto prostoru je prováděna 'po složkách' a modulo 2. Připomeňme, že množina vektorů $\{w_1, \ldots, w_k\} \subset \mathbf{Z}_2^m$ je *lineárně závislá nad* $\mathbf{Z}_2$, pokud existují koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{Z}_2$ (ne všechny nulové), pro něž je

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i = \mathbf{0},$$

přičemž samozřejmě stále počítáme nad tělesem $\mathbf{Z}_2$. Vzhledem k tomu, že koeficienty mohou být pouze 0 nebo 1, a nulové koeficienty součet neovlivní, je vidět, že množina vektorů je lineárně závislá nad $\mathbf{Z}_2$, právě když obsahuje neprázdnou podmnožinu s nulovým součtem.

Hodnost matice M nad $\mathbf{Z}_2$ (budeme ji značit $h_2(M)$) je definována jako maximální velikost množiny řádků, která je lineárně nezávislá nad $\mathbf{Z}_2$. Třebaže matice $M(H)$ má hodnost (nad tělesem reálných čísel) rovnou 4, nad $\mathbf{Z}_2$ je součtem jejích řádků nulový vektor a podle očekávání platí $h_2(M(H)) = 3$.

Pro hodnost matice $M(G)$ nad $\mathbf{Z}_2$ platí obdobné vztahy jako pro obyčejnou hodnost v orientovaném případě, a také se velmi podobně dokazují. Shrneme je v následující větě, jejíž důkaz ponecháme jako cvičení.

Věta 8.1 *Pro neorientovaný graf G platí:*

(i) Hodnost $h_2(M(G))$ je rovna $n - k$, právě když G má k komponent.

(ii) Je-li G souvislý, pak dokonce každých $n - 1$ řádků tvoří lineárně nezávislou množinu nad $\mathbf{Z}_2$. □

Cvičení

► **8.1** Dokažte větu 8.1.

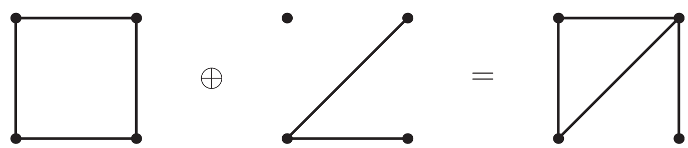
8.2 Vektory a faktory

Každý vektor z prostoru $\mathbf{Z}_2^m$ odpovídá nějaké množině hran grafu G, a ta zase jednoznačně určuje faktor grafu G. Pro jednoduchost proto nebudeme rozlišovat mezi vektory ze $\mathbf{Z}_2^m$, faktory grafu G a množinami jeho hran.

V prostoru $\mathbf{Z}_2^m$ je definováno sčítání, které budeme značit symbolem $\oplus$. Co znamená toto sčítání v řeči faktorů? Jsou-li $F, F' \in \mathbf{Z}_2^m$, pak na i-tém místě v součtu $F \oplus F'$ bude 0, právě když F a F' mají na tomto místě oba 0 nebo oba 1. Odtud snadno vidíme, že faktor $F \oplus F'$ je *symetrický rozdíl* faktorů F a F', tj. je definován předpisem

$$F \oplus F' = F \cup F' \setminus \Big(F \cap F'\Big).$$

Příklad 'sčítání' faktorů grafu H na obr. 8.1 ukazuje obr. 8.2.



Obrázek 8.2: Sčítání faktorů.

8.3 Sudé faktory

Řekneme, že faktor $F \subset G$ je *sudý*, má-li v něm každý vrchol sudý stupeň. Bude nás zajímat mimo jiné následující otázka:

Kolik má graf G sudých faktorů?

Alespoň jeden sudý faktor existuje vždy: faktor s prázdnou množinou hran. Je-li ovšem graf G například stromem, pak už žádné další sudé faktory nemá. Každý jeho faktor je totiž sjednocením disjunktních stromů, a my víme, že strom na alespoň dvou vrcholech obsahuje nějaký list, tj. vrchol stupně 1. Jediný sudý faktor stromu je tedy ten, ve kterém jsou všechny komponenty jednobodové. Oproti tomu každá kružnice C v grafu G určuje sudý faktor s množinou hran $E(C)$ (vrcholy na C mají stupeň 2, ostatní 0). Zdá se tedy, že čím více kružnic, tím více sudých faktorů.

Zásadní pozorování představuje následující věta.

Věta 8.2 *Sudé faktory tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbf{Z}_2^m$.*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že pracujeme nad tělesem $\mathbf{Z}_2$, stačí ověřit, že součet (=symetrický rozdíl) sudých faktorů F_1, F_2 je sudým faktorem, tj. že stupeň každého vrcholu $v \in V(G)$ ve faktoru $F_1 \oplus F_2$ je sudý. Nechť A_i je množina hran obsahujících v ve faktoru F_i $(i = 1, 2)$. Víme, že ve faktoru $F_1 \oplus F_2$ je vrchol v obsažen právě ve hranách ze symetrického rozdílu $A_1 \oplus A_2$. Jeho stupeň je tak

$$\begin{aligned} d_{F_1 \oplus F_2}(v) &= |A_1 \oplus A_2| = |A_1 \cup A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)| \\ &= |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|, \end{aligned}$$

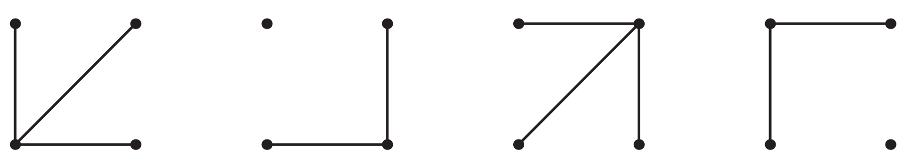
a protože A_i jsou množiny sudé velikosti, je i tento stupeň sudý. Vrchol v byl libovolný, takže $F_1 \oplus F_2$ je sudý faktor. $\square$

Podprostoru z věty 8.2 se říká *prostor kružnic* nebo (z jistého hlediska správněji) *prostor cyklů* grafu G. Označuje se $\mathcal{C}(G)$.

8.4 Hvězdy, separace a řezy

Od tohoto oddílu dále budeme předpokládat, že graf G je souvislý. K nesouvislým grafům se vrátíme na konci kapitoly.

Jak vypadají faktory určené řádky incidenční matice grafu G? Pokud se jedná o řádek, který přísluší vrcholu v_i, pak do daného faktoru náleží pouze hrany obsahující vrchol v_i. Tomuto faktoru říkáme *hvězda vrcholu* v_i a označujeme jej H_i. Všechny hvězdy grafu na obr. 8.1 jsou znázorněny na obr. 8.3.



Obrázek 8.3: Hvězdy v grafu na obr. 8.1.

Všimněme si, že hvězdy typicky obsahují izolované vrcholy (vrcholy stupně 0) — konkrétně ve hvězdě vrcholu v_i bude izolovaný každý vrchol, který s ním nesousedí. Všechny tyto vrcholy však do hvězdy patří (je to faktor)!

Pojem hvězda lze zobecnit následujícím způsobem. Pro množinu vrcholů $X \subset V(G)$ nechť ∂X označuje faktor složený ze všech hran, které mají v množině X právě jeden koncový vrchol (tj. z hran, které vedou 'mezi' X a $V(G) \setminus X$). Každý faktor tohoto tvaru označíme termínem *separace*. Například každá hvězda je separace, protože platí $\partial\{v_i\} = H_i$. Separací je i faktor bez hran.

Věta 8.3 *Množina všech separací je podprostorem prostoru* $\mathbf{Z}_2^m$.

Důkaz. Stačí ověřit uzavřenost na součty. Dokazujeme, že pro každé $X, Y \subset V(G)$ je faktor $\partial X \oplus \partial Y$ separací. Všimněme si, že hrana e patří do faktoru

$\partial X \oplus \partial Y$, právě když $e \in \partial X$ a $e \notin \partial Y$ nebo naopak. To zase platí právě tehdy, když e má v jedné z množin X, Y jeden konec a v té druhé buď žádný nebo oba konce. Jak lze snadno ověřit, ekvivalentní podmínkou je, že e má právě jeden konec v množině $X \oplus Y$. Dokázali jsme tedy, že

$$\partial(X \oplus Y) = \partial X \oplus \partial Y$$

a z toho plyne tvrzení věty. □

Nechť S je separace, dejme tomu $S = \partial X$. Odstraněním hran faktoru S z grafu G dostaneme jistě nesouvislý graf, protože z žádného vrcholu v množině X v grafu $G - E(S)$ nevede hrana do žádného vrcholu mimo X. Speciálním případem separace je řez, který je definován následovně.

Řezem v souvislém grafu G je množina hran A s vlastností, že graf $G - A$ (vzniklý odstraněním hran v A z grafu G) je nesouvislý, ale přitom žádná vlastní podmnožina množiny A tuto vlastnost nemá.

Podprostor z věty 8.3 se nazývá *prostor řezů*[1] grafu G a označuje se $\mathcal{R}(G)$. Víme, že každá hvězda je jeho prvkem. Platí dokonce následující:

Tvrzení 8.4 *Hvězdy generují celý prostor řezů.*

Důkaz. Musíme ukázat, že každou separaci ∂X lze vyjádřit jako součet hvězd. Tvrdíme, že platí

$$\sum_{v_i \in X} H_i = \partial X.$$

Tato rovnost plyne z faktu, že má-li hrana e_j v množině X oba koncové vrcholy, započítali jsme ji v součtu na levé straně dvakrát; nemá-li v X ani jeden vrchol, nezapočítali jsme ji vůbec. V obou případech vyjde na j-tém místě výsledného vektoru 0. Hodnota 1 tedy na tomto místě vyjde právě tehdy, když e_j je hranou faktoru ∂X. □

Věta 8.5 *Dimenze prostoru řezů je právě $n - 1$.*

Důkaz. Podle předchozího tvrzení je prostor řezů generován hvězdami. Podle věty 8.1(ii) je dimenze tohoto prostoru přesně $n - 1$. □

Cvičení

▶ **8.2** Najděte příklad separace v nějakém grafu, která není řezem. Najděte příklad hvězdy s touto vlastností.

▶ **8.3** Dokažte, že je-li A řez v grafu G, pak graf $G - A$ má právě dvě komponenty. Rozhodněte, zda platí opačná implikace.

[1] Stejně jako většina prvků prostoru kružnic nejsou kružnice (ale sudé faktory), také prostor řezů je z větší části tvořen faktory, které nejsou řezy (ale separacemi). Označení je tradiční.

8.5 Ortogonalita

Připomeňme, že ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^n$ je pro každou dvojici vektorů u, v definován skalární součin. Od něj se odvozuje pojem ortogonality vektorů. Podobné pojmy mají smysl i v prostoru $\mathbf{Z}_2^m$.

Jsou-li $u = (u_1 \dots u_m)$ a $v = (v_1 \dots v_m)$ prvky prostoru $\mathbf{Z}_2^m$, pak jejich *skalární součin*[2] $u \cdot v$ je definován předpisem

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{m} u_i v_i,$$

kde sčítání provádíme v tělese $\mathbf{Z}_2$ (výsledek je tedy 0 nebo 1). Vektory u, v jsou *ortogonální* nebo *kolmé* (značíme $u \perp v$), pokud $u \cdot v = 0$. Tento pojem lze rozšířit na množiny vektorů: množiny $U, V \subset \mathbf{Z}_2^m$ jsou *ortogonální* ($U \perp V$), pokud $u \perp v$ pro každé $u \in U$, $v \in V$.

Jaký význam má skalární součin při našem ztotožnění vektorů a faktorů? Kdy jsou dva faktory navzájem kolmé? Přímo z definice plyne jednoduchá odpověď: jsou kolmé, právě když se shodují v sudém počtu hran (tj. jejich průnik má sudou velikost).

Je-li W podprostor prostoru $\mathbf{Z}_2^m$, definujeme jeho *ortogonální doplněk* $W^\perp$ jako množinu všech vektorů, které jsou kolmé na každý prvek podprostoru W. Z bilinearity skalárního součinu snadno plyne, že $W^\perp$ je opět podprostorem (viz cvičení 8.4). Pro nás bude velmi důležitá následující věta.

Věta 8.6 *Je-li W podprostor prostoru $\mathbf{Z}_2^m$, pak platí*

$$\dim W + \dim W^\perp = m.$$

Důkaz. Označme $\dim W = k$. Nechť M je matice o rozměrech $k \times m$, jejíž řádky jsou prvky nějaké pevné báze podprostoru W. K tomu, aby vektor $x \in \mathbf{Z}_2^m$ byl kolmý na každý vektor z W, stačí, aby byl kolmý na každý prvek zvolené báze. Jinými slovy, $x \in W^\perp$, právě když x je řešením soustavy $Mx = \mathbf{0}$.

Standardní eliminací (a případným přeskupením sloupců) upravíme M na matici M', ve které prvních k sloupců tvoří jednotkovou matici, tedy

$$M' = \left(\begin{array}{c|c} I_k & B \end{array} \right),$$

kde B je nějaká matice o rozměrech $k \times (m-k)$. Je jasné, že libovolně zvolená čísla $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m$, lze *jednoznačně* doplnit na řešení $x = (x_1 \dots x_m)$ soustavy $Mx = \mathbf{0}$. Dimenze prostoru, tvořeného řešeními této soustavy (kterým je shodou okolností prostor $W^\perp$), je tedy $m - k$. Věta je dokázána. □

[2]Pro přesnost upozorněme, že naše definice je v mírném rozporu s obecnou definicí skalárního součinu ve vektorových prostorech. Ta totiž mj. požaduje, aby vztah $x \cdot x = 0$ platil pouze pro nulový vektor. V našem případě ale bude platit pro každý vektor se sudým počtem jedniček.

Cvičení

▶ **8.4** Dokažte, že ortogonální doplněk $W^{\perp}$ podprostoru $W \subset \mathbf{Z}_2^m$ je rovněž podprostorem.

8.6 Prostor kružnic a prostor řezů jsou ortogonální

V této části dokončíme výpočet dimenzí prostoru kružnic a prostoru řezů. Nechť F je nějaký faktor grafu G. Podle toho, co bylo řečeno o ortogonalitě faktorů, je stupeň vrcholu v_i ve faktoru F sudý, právě když je F kolmý na hvězdu H_i. To znamená, že F je sudý faktor, právě když je kolmý na všechny hvězdy. Jinak řečeno:

Věta 8.7 *Prostor kružnic $\mathcal{C}(G)$ je ortogonálním doplňkem prostoru řezů $\mathcal{R}(G)$.*

Důkaz. Prvky prostoru $\mathcal{C}(G)$ jsou právě sudé faktory. Víme, že $F \in \mathcal{C}(G)$, právě když F je kolmý na každou hvězdu. Protože prostor řezů $\mathcal{R}(G)$ je hvězdami generován, platí, že $F \in \mathcal{C}(G)$, právě když $F \perp S$ pro každou separaci $S \in \mathcal{R}(G)$. Jinými slovy $\mathcal{C}(G) = \mathcal{R}(G)^{\perp}$. □

Podle věty 8.5 je $\dim \mathcal{R}(G) = n-1$. Podle věty 8.6 platí $\dim \mathcal{C}(G) + \dim \mathcal{R}(G) = m$. V důsledku dostáváme:

Věta 8.8 *Dimenze prostoru kružnic je $m - n + 1$.* □

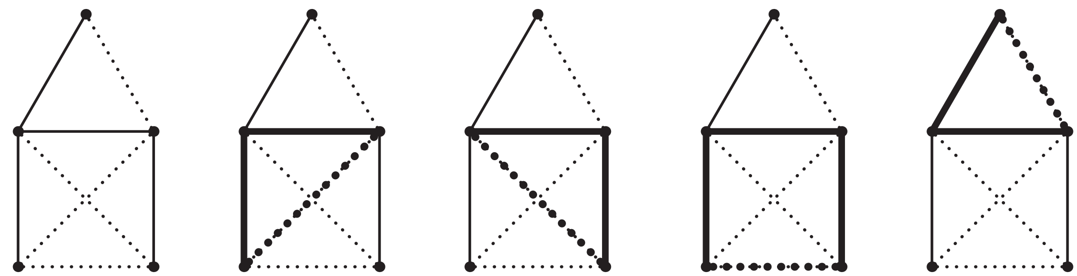
Důsledek 8.9 *Souvislý graf G má 2^{m-n+1} sudých faktorů.* □

8.7 Fundamentální soustavy kružnic a řezů

Určili jsme přesně dimenzi prostoru kružnic a prostoru řezů. V tomto odstavci ukážeme způsob, jak snadno najít báze těchto prostorů, navíc v pěkném speciálním tvaru. Nechť G je souvislý graf. Zvolme pevně nějakou jeho kostru T. Hrany $e \in E(G) \setminus E(T)$ se nazývají *tětivy* kostry T. Je jich $m - n + 1$, protože každý strom na n vrcholech má $n - 1$ hran, přičemž počet všech hran grafu G je m.

Víme, že stromy jsou charakterizovány vlastností, že každé dva jejich vrcholy jsou spojenu právě jednou cestou. Odtud plyne, že přidáme-li ke kostře T tětivu e_j, výsledný graf $T + e_j$ bude obsahovat právě jednu kružnici. Označme tuto kružnici C_j. Soubor všech kružnic C_j, kde e_j probíhá tětivy kostry T, se nazývá *fundamentální soustava kružnic* grafu G vzhledem ke kostře T. Příklad takové soustavy je na obr. 8.4.

Tvrzení 8.10 *Fundamentální soustava kružnic vzhledem ke kostře T tvoří bázi prostoru kružnic $\mathcal{C}(G)$.*



Obrázek 8.4: (a) Graf s plně vyznačenou kostrou, (b)–(e) jeho fundamentální soustava kružnic (kružnice tučně).

Důkaz. Nechť $\mathcal{F}$ je fundamentální soustava kružnic vzhledem ke kostře T. Všimněme si, že každá tětiva e_j kostry T je obsažena v jediném prvku systému $\mathcal{F}$ (totiž ve faktoru C_j). Množina $\mathcal{F}$ tedy musí být lineárně nezávislá, protože pro každý člen C_k v součtu $\sum_j C_j$ (kde e_j probíhá některé tětivy) je k-tá složka výsledného vektoru nenulová.

Našli jsme tedy $m-n+1$ lineárně nezávislých prvků prostoru $\mathcal{C}(G)$, a protože víme, že dimenze tohoto prostoru je $m-n+1$, musí jít o bázi. □

Podobný postup lze aplikovat v případě prostoru řezů. Nechť e_j je některá z hran kostry T. Odstraníme-li ji, výsledný graf $T - e_j$ bude nesouvislý (to snadno plyne z vlastností stromů) a bude mít právě 2 komponenty. Definujme R_j jako faktor sestávající ze všech hran grafu G, které vedou mezi komponentami grafu $T - e_j$. Snadno se nahlédne, že jeho množina hran je řez. Kostra T má $n-1$ hran, takže tímto způsobem dostaneme $n-1$ faktorů, které dohromady tvoří *fundamentální soustavu řezů* vzhledem ke kostře T.

Každá hrana $e_j \in E(T)$ je hranou jediného faktoru z této fundamentální soustavy řezů, totiž faktoru R_j (dokažte!). Odtud opět plyne, že fundamentální soustava řezů je lineárně nezávislá, a protože $\dim \mathcal{R}(G) = n-1$, dostáváme:

Tvrzení 8.11 *Fundamentální soustava řezů vzhledem ke kostře T tvoří bázi prostoru řezů $\mathcal{R}(G)$.*

8.8 Nesouvislé grafy

Doposud jsme se zabývali souvislými grafy. Naše úvahy lze uplatnit i na grafy nesouvislé. Nechť graf G má k komponent $C_1, \dots, C_k$. Zvolme v každé z nich nějakou její kostru T_i ($i = 1, \dots, k$). Graf G tak bude obsahovat $n-k$ hran, které patří do nějakého T_i, a $m-n+k$ hran, které do žádné ze zvolených ‘koster’ nepatří. Stejně jako dříve obdržíme fundamentální soustavu kružnic o $m-n+k$

prvcích a fundamentální soustavu řezů o $n-k$ prvcích. (Ta již není tvořena řezy, které jsme definovali jen v souvislých grafech, ale obecněji separacemi.)

Protože věta 8.7 platí beze změny, dostáváme, že naše fundamentální soustavy jsou i zde bázemi příslušných prostorů.

Věta 8.12 *Má-li graf G k komponent, pak* $\dim \mathcal{C}(G) = m-n+k$ *a* $\dim \mathcal{R}(G) = n-k$. $\square$