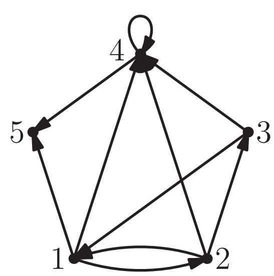
Kapitola 6

Orientované grafy

V této kapitole se budeme zabývat grafy, v nichž má každá hrana určený směr — tzv. orientovanými grafy. Směr (orientace) hran se obvykle znázorňuje šipkami jako na obr. 6.1.



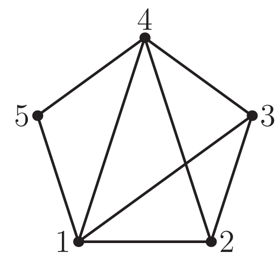
Obrázek 6.1: Orientovaný graf.

6.1 Definice orientovaných grafů

Definice 6.1 *Orientovaný graf* je dvojice (V, E), kde V je množina vrcholů a $E \subset V \times V$ je množina hran.

Všimněme si, že hrany jsou nyní prvky kartézského součinu $V \times V$, a tedy *uspořádané* dvojice vrcholů. Dvojici (u, v) interpretujeme jako hranu, která začíná ve vrcholu u a končí ve vrcholu v. Podle definice může být hranou i dvojice (v, v). Naše orientované grafy tedy mohou mít smyčky. Násobné hrany ve shodném směru nadále nepovolujeme (graf ale může obsahovat dvojici 'protichůdných' hran mezi dvěma vrcholy). Podobně jako u neorientovaných grafů budeme dvojici (u, v) zapisovat prostě jako uv.

Z orientovaného grafu G můžeme smadno vyrobit neorientovaný graf (tzv. *symetrizaci* grafu G) tak, že 'zapomeneme' orientace všech hran. Případné smyčky odstraníme a násobné hrany nahradíme jednoduchými. (Viz obr. 6.2.) Některé pojmy týkající se neorientovaných grafů tak lze přímo aplikovat na grafy orientované. Řekneme například, že graf G je *(slabě) souvislý*, je-li jeho symetrizace souvislá.



Obrázek 6.2: Symetrizace grafu z obr. 6.1.

V opačném směru, u přechodu od neorientovaného grafu k orientovanému, máme řadu možností, jak hrany opatřit šipkami. Řekneme, že orientovaný graf G je *orientací* grafu H, je-li H symetrizací orientovaného grafu G. Každý neorientovaný graf má tedy řadu orientací. Orientovaný graf na obr. 6.1 je například jednou z orientací grafu na obr. 6.2.

Definice 6.2 *Vstupní stupeň* $d_G^+(u)$ vrcholu u orientovaného grafu $G = (V, E)$ je počet hran, které končí ve vrcholu u, tedy počet dvojic xu (kde $x \in V$) v množině hran E. Podobně *výstupní stupeň* $d_G^-(u)$ je počet dvojic ux v množině hran.

Cvičení

▶ **6.1** Dokažte, že v orientovaném grafu $G = (V, E)$ s m hranami platí

$$\sum_{v \in V} d_G^+(v) = \sum_{v \in V} d_G^-(v) = m.$$

6.2 Silná souvislost

Pro orientované grafy lze snadno upravit definice pojmů sled, cesta v grafu a kružnice v grafu. Znění definic je vlastně téměř stejné, jediný rozdíl je v tom, že každý krok sledu musí nyní respektovat orientaci příslušné hrany. Místo pojmu ‘kružnice’ používáme u orientovaných grafů termínu ‘cyklus’.

Definice 6.3 *Orientovaný sled* z vrcholu x do vrcholu y v orientovaném grafu G je posloupnost vrcholů $(x = v_0, v_1, \ldots, v_k = y)$, ve které je pro každé $i = 1, \ldots, k$ dvojice $v_{i-1}v_i$ hranou grafu G. *Orientovaná cesta* v G je orientovaný sled, který obsahuje každý vrchol nejvýše jednou. *Cyklus* v G je orientovaný sled, ve kterém je $v_0 = v_k$, tento vrchol je v něm obsažen právě dvakrát a všechny ostatní nejvýše jednou.

Graf G na obr. 6.1 obsahuje například sled $(3, 1, 2, 3, 4, 4)$, naopak posloupnost $(4, 3, 2, 1)$ sledem není. Tento graf obsahuje také cykly $(1, 2, 3, 1)$, $(4, 4)$ (délka tohoto cyklu je 1) a $(1, 2, 1)$.

Slabá souvislost nám neříká mnoho o existenci orientovaných cest v daném grafu. U orientovaných grafů je proto často přirozenější pracovat se silnější variantou pojmu souvislost.

Definice 6.4 Orientovaný graf G je *silně souvislý*, pokud v něm pro každou dvojici vrcholů x, y existuje orientovaná cesta z x do y i orientovaná cesta z y do x,

Následující věta charakterizuje silně souvislé grafy. Jak je asi zřejmé, říkáme, že hrana xy je obsažena v cyklu $(v_0, v_1, \dots, v_k = x_0)$, pokud pro nějaké i je $x = v_i$ a $y = v_{i+1}$.

Věta 6.5 *Slabě souvislý orientovaný graf je silně souvislý, právě když každá jeho hrana je obsažena v nějakém cyklu.*

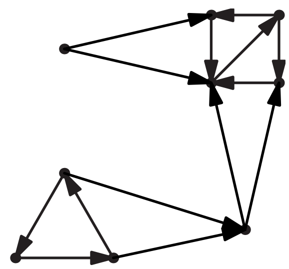
Důkaz. '$\Rightarrow$': Uvažme hranu xy orientovaného grafu G. Ze silné souvislosti plyne existence cesty P z y do x. Připojením hrany xy za tuto cestu vznikne cyklus, který hranu xy obsahuje.

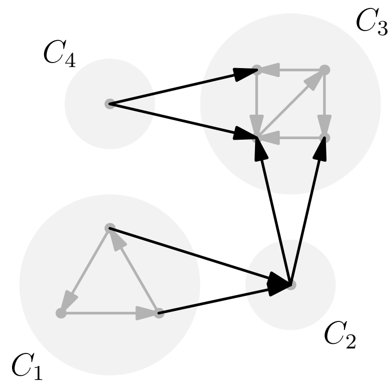
'$\Leftarrow$': Nechť x, y je libovolná dvojice vrcholů, a nechť Q je cesta z x do y v symetrizaci slabě souvislého orientovaného grafu G. Cesta Q je tedy posloupnost vrcholů $(x = q_0, q_1, \dots, q_k = y)$, kde pro $i = 1, \dots, k$ je buď $q_{i-1}q_i \in E(G)$ (a řekneme, že jde o dobře orientovanou hranu cesty Q) nebo $q_{i-1}q_i \notin E(G)$ a $q_iq_{i-1} \in E(G)$ (špatně orientovaná hrana). Každá špatně orientovaná hrana q_iq_{i-1} je obsažena v cyklu; speciálně existuje orientovaná cesta R_i z q_{i-1} do q_i. Nahradíme-li v cestě Q každou špatně orientovanou hranu příslušnou cestou R_i, získáme orientovaný sled z x do y. Podle cvičení 6.3 tedy existuje orientovaná cesta z x do y. Vzhledem k tomu, že dvojice x, y byla libovolná, graf je silně souvislý. $\square$

Definujme na vrcholech orientovaného grafu G *relaci oboustranné dosažitelnosti* $\sim$: pro vrcholy x, y platí $x \sim y$, pokud v G existuje orientovaná cesta z x do y i naopak. S použitím cvičení 6.3 je snadné dokázat, že tato relace je ekvivalencí. Tento fakt můžeme použít v definici tzv. kvazikomponent, které jsou obdobou komponent pro silnou souvislost. K jejímu pochopení může pomoci vrátit se k definici pojmu komponenta v kapitole 5.

Definice 6.6 *Kvazikomponenta* orientovaného grafu G je každý jeho indukovaný podgraf na množině vrcholů, která tvoří některou z tříd ekvivalence $\sim$.

Definici ilustruje graf na obr. 6.3(a), jehož kvazikomponenty jsou znázorněny na obr. 6.3(b). Podobně orientovaný graf na obr. 6.1 má tři kvazikomponenty, jejichž množiny vrcholů jsou $\{1, 2, 3\}, \{4\}$ a $\{5\}$.





(a) (b)

Obrázek 6.3: Orientovaný graf a jeho kvazikomponenty.

Cvičení

► **6.2** Najděte příklad slabě souvislého orientovaného grafu, který není silně souvislý.

► **6.3** Dokažte, že v orientovaném grafu existuje orientovaná cesta z vrcholu x do vrcholu y, právě když v něm existuje orientovaný sled z x do y.

► **6.4** Dokažte, že kvazikomponenty orientovaného grafu G jsou právě jeho maximální silně souvislé podgrafy — jinými slovy, jsou to právě ty podgrafy H, pro které platí, že je-li H vlastním podgrafem jiného grafu $K \subset G$, pak K není silně souvislý.

► **6.5** Formulujte algoritmus na nalezení kvazikomponent orientovaného grafu.

6.3 Acyklické orientované grafy

Definice 6.7 Orientovaný graf je *acyklický*, pokud neobsahuje žádný cyklus.

Slabě souvislé acyklické orientované grafy jsou tedy z jistého hlediska obdobou stromů, tj. souvislých grafů, které neobsahují žádnou kružnici.

Definice 6.8 *Vstupní vrchol* orientovaného grafu G je vrchol, jehož vstupní stupeň $d^+_G(v)$ je nulový. Podobně *výstupní vrchol* je vrchol, pro který je $d^-_G(v) = 0$.

Acyklické grafy lze charakterizovat z hlediska existence vstupních vrcholů v jejich podgrafech.

Věta 6.9 *Konečný orientovaný graf G je acyklický, právě když každý jeho neprázdný podgraf $H \subset G$ obsahuje vstupní vrchol.*

Důkaz. '⇒': Zvolme vrchol v_0. Není-li vstupní, vede do něj nějaká hrana, dejme tomu z vrcholu v_1. Opakováním této úvahy získáme po $\leq n+1$ krocích (kde n je počet vrcholů) buďto vstupní vrchol. nebo posloupnost $n+1$ vrcholů $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$, ve které se musí některý vrchol vyskytovat dvakrát, řekněme $v_i = v_j$ a $i < j$. Ve druhém případě by ale podposloupnost $v_j, v_{j-1}, \ldots, v_i$ byla cyklem v acyklickém grafu G.

'⇐': Předpokládejme existenci vstupních vrcholů a dokažme, že orientovaný graf G je acyklický. Nechť obsahuje cyklus C. Tento cyklus určuje podgraf H grafu G, sestávající z hran a vrcholů, kterými C prochází. Všechny vstupní i výstupní stupně v podgrafu H jsou rovny jedné. To je spor. □

Lze očekávat, že podobný výsledek platí i pro výstupní vrcholy.

Důsledek 6.10 *Orientovaný graf G je acyklický, právě když každý jeho neprázdný podgraf $H \subset G$ obsahuje výstupní vrchol.*

Důkaz. Otočíme-li směr každé hrany grafu G, acykličnost zůstane zachována a vstupní vrcholy přecházejí na výstupní a naopak. □

Následující věta charakterizuje acyklické grafy jako takové, na nichž existuje uspořádání vrcholů konzistentní se směry všech hran.

Věta 6.11 *Orientovaný graf G je acyklický, právě když jeho vrcholy lze seřadit do posloupnosti $(v_1, \ldots, v_n)$ tak, že pro každou hranu $v_i v_j$ grafu G platí $i < j$.*

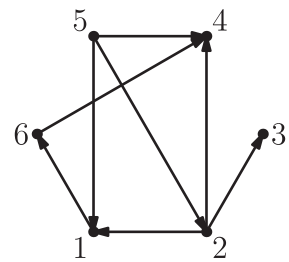
Důkaz. '⇒': Položme $G_1 = G$. Podle věty 6.9 existuje vstupní vrchol v_1 acyklického orientovaného grafu G_1. Nechť $G_2 = G_1 - v_1$ je orientovaný graf vzniklý odstraněním vrcholu v_1 (a všech hran, které ho obsahují). To je podgraf grafu G, a má tedy vstupní vrchol v_2. Opakováním tohoto postupu dostaneme posloupnost vrcholů $(v_1, \ldots, v_n)$. Dejme tomu, že $v_i v_j \in E(G)$, ale přitom $i > j$. Pak ale $v_i \in V(G_j)$ a kvůli hraně $v_i v_j$ nemůže v_j být vstupním vrcholem grafu G_j, což je spor.

'⇐': Mějme vrcholy seřazeny do posloupnosti s uvedenou vlastností a předpokládejme, že G obsahuje cyklus $(v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k-1}}, v_{i_k} = v_{i_0})$. Pak platí, že $v_{i_0} v_{i_1} \in E(G)$ a tedy $i_0 < i_1$. Obecněji dostáváme

$$i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} < i_0,$$

což není možné. Tím je důkaz hotov. □

Například orientovaný graf na obr. 6.4 je acyklický. Vlastnost z věty 6.11 má například uspořádání vrcholů $(5, 2, 3, 1, 6, 4)$ nebo $(5, 2, 1, 3, 6, 4)$.



Obrázek 6.4: Acyklický orientovaný graf.

6.4 Tranzitivní uzávěr

Víme již, že orientované grafy s množinou vrcholů V jednoznačně odpovídají binárním relacím na množině V (viz cvičení 6.6).

Definice 6.12 *Tranzitivní uzávěr* orientovaného grafu G je orientovaný graf G^+ takový, že $V(G^+) = V(G)$ a

$$xy \in E(G^+), \text{ pokud } \begin{cases} x \neq y & \text{a v } G \text{ existuje orientovaná cesta z } x \text{ do } y, \\ x = y & \text{a vrchol } x \text{ leží na nějakém cyklu v } G. \end{cases}$$

Všimněme si, že graf G je podgrafem grafu G^+ a že G je acyklický, právě když G^+ neobsahuje žádnou smyčku.

Přechod od relace R k orientovanému grafu $G(R)$ samozřejmě můžeme otočit; pro každý orientovaný graf G tak dostaneme binární relaci na množině $V(G)$. Nemusíme pro ni ani zavádět zvláštní označení, protože vzato striktně podle definice, touto relací je přesně množina hran $E(G)$. Následující věta charakterizuje acyklické grafy jako grafy, jejichž (mírně rozšířený) tranzitivní uzávěr je grafem uspořádání na $V(G)$.

Věta 6.13 *Orientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček je acyklický, právě když graf G^*, vzniklý přidáním všech smyček k reflexívnímu uzávěru G^+, je grafem uspořádání (tj. $E(G^*)$ je relace uspořádání na $V(G^*) = V(G)$).*

Důkaz. '$\Rightarrow$': Nechť G je acyklický. Díky přidaným smyčkám je $E(G^*)$ reflexívní relace. Je také slabě antisymetrická, neboť $xy \in E(G^*)$ a $yx \in E(G^*)$ by pro různé x, y znamenalo, že G obsahuje orientovaný sled z x do y i naopak. Uvažme podgraf H složený z vrcholů a hran obou těchto sledů; v tomto podgrafu je vstupní stupeň každého vrcholu aspoň 1. Neobsahuje tedy vstupní vrchol, což je ve sporu s větou 6.9.

'$\Leftarrow$': Nechť $E(G^*)$ je uspořádání. Pro názornost zapisujme $xy \in E(G^*)$ jako $x \leq y$. Předpokládejme, že G obsahuje cyklus $C = (x_0, x_1, \ldots, x_k = x_0)$. Pak pro každé $i = 0, \ldots, k-1$ platí $x_i x_{i+1} \in E(G)$, jinak řečeno $x_i \leq x_{i+1}$. Z tranzitivity je tedy $x_0 \leq x_{k-1}$. Víme však, že také $x_{k-1}x_0 \in E(G)$, takže $x_{k-1} \leq x_0$. Z antisymetričnosti relace $E(G^*)$ musí být $x_0 = x_{k-1}$. Cyklus C má tedy délku 1 a musí to být smyčka. To je spor s předpokladem, že G je bez smyček. □

Cvičení

▶ **6.6** Nechť $G = G(R)$ je orientovaný graf binární relace R na množině V. Jak z grafu G poznáme, zda je relace R:

(a) reflexívní,

(b) symetrická,

(c) antisymetrická,

(d) tranzitivní?

6.5 Kondenzace

Definice 6.14 *Kondenzace* orientovaného grafu G je graf G_c, jehož vrcholy jsou kvazikomponenty grafu G, a pro různé kvazikomponenty $Q_1, Q_2 \in V(G_c)$ platí

$$Q_1Q_2 \in E(G_c), \text{ pokud pro nějaké } x_1 \in V(Q_1), x_2 \in V(Q_2) \text{ je } x_1x_2 \in E(G).$$

Kondenzaci si lze představit také tak, že každou kvazikomponentu grafu G ‘stáhneme’ do jediného vrcholu; hrany, které vedly mezi různými kvazikomponentami, nyní povedou mezi těmito novými vrcholy. Vynecháme ovšem smyčky. V případě, že mezi dvěma vrcholy povede více hran v témže směru, nahradíme je jedinou hranou.

Vezměme jako příklad opět graf na obr. 6.3. Víme, že má čtyři kvazikomponenty $C_1, \ldots, C_4$. Jeho kondenzací je orientovaný graf na obr. 6.5(a).

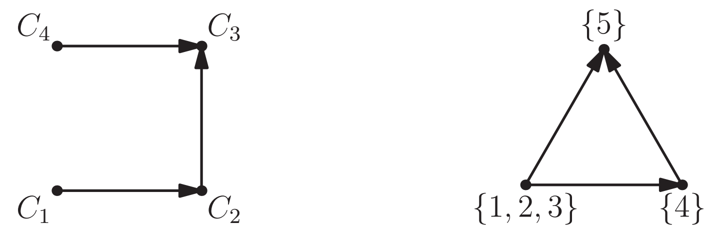
Kondenzace grafu G z obr. 6.1 je znázorněna na obr. 6.5(b). U každého vrcholu je zde uvedena množina vrcholů příslušné kvazikomponenty grafu G.

Věta 6.15 (Věta o kondenzaci) *Pro orientovaný graf G platí:*

(i) G_c je acyklický orientovaný graf.

(ii) G je silně souvislý, právě když G_c má jediný vrchol.

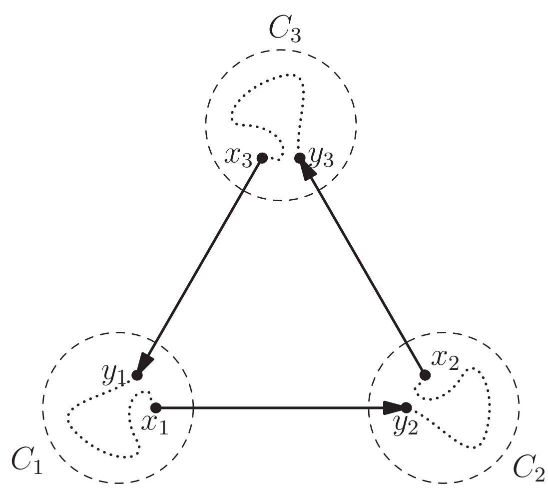
(iii) G je acyklický, právě když $G = G_c$.



(a) Kondenzace grafu z obr. 6.3.

(b) Kondenzace grafu z obr. 6.1.

Obrázek 6.5: Kondenzace grafů.



Obrázek 6.6: Konstrukce cyklu L' v grafu G. Čárkované oblasti jsou kvazikomponenty C_1, C_2, C_3 grafu G (vrcholy cyklu L v G_c).

Důkaz. (i) Nechť L je cyklus v G_c, procházející po řadě vrcholy $C_1, C_2, \ldots, C_k, C_{k+1} = C_1$ grafu G_c (viz obr. 6.6). Pro $1 \leq i \leq k$ uvažme hranu C_iC_{i+1} cyklu L. Vrcholy C_i, C_{i+1} odpovídají kvazikomponentám grafu G. Z definice kondenzace existují vrcholy $x_i \in V(C_i)$ a $y_{i+1} \in V(C_{i+1})$ tak, že x_iy_{i+1} je hrana grafu G. Položme pro jednoduchost $y_1 := y_{k+1}$.

Máme tedy k-tici hran, které vedou postupně z kvazikomponenty C_1 do C_2, z C_2 do C_3 atd., a nakonec z C_k do C_1. Tyto hrany na sebe nemusí navazovat, ale v každé kvazikomponentě C_i jistě existuje cesta P_i z vrcholu y_i do x_i. Následující posloupnost hran a cest tedy tvoří cyklus L' v grafu G:

$$x1y2, P_2, x_2y_3, P_3, \ldots, P_k, x_ky_1, P_1.$$

Všimněme si, že po cyklu L' lze v grafu G dojít z vrcholu y_2 do vrcholu x_1. V opačném směru přitom mezi těmito vrcholy vede hrana. Oboustranná dosažitelnost těchto vrcholů je ve sporu s tím, že vrcholy leží v různých kvazikomponentách.

(ii) a (iii): Snadný důkaz přímo z definic ponecháváme jako cvičení 6.7. $\square$

Cvičení

► **6.7** Dokažte body (ii) a (iii) věty 6.15.