Kapitola 1

Relace

Úvodní kapitola je věnována důležitému pojmu relace. Protože relace popisují vztahy mezi prvky množin a navíc jsou samy množinami, bude vhodné množiny nejprve krátce připomenout.

1.1 Stručně o množinách

Množiny patří k základním matematickým objektům. V jistém smyslu je celá matematika, jak ji dnes známe, vystavěna na pojmu množiny. Všechny ostatní matematické objekty, ať jde o přirozená čísla nebo spojité funkce, lze totiž modelovat pomocí množin.

Komplikované vlastnosti množinového světa jsou předmětem samostatného oboru, tzv. *teorie množin*. Nás ale v této přednášce nebudou jemnosti této teorie příliš zajímat a postačí nám následující intuitivní pohled na věc.

Množina je pro nás soubor navzájem různých objektů[1], které označujeme jako její *prvky*. Je-li a prvkem množiny X, píšeme $a \in X$, jinak $a \notin X$. Množina je buď *konečná* (má-li konečný počet prvků) nebo *nekonečná*. Počet prvků konečné množiny X označujeme symbolem $|X|$. Sestává-li množina X z prvků $x_1, \ldots, x_k$, píšeme $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Podobně například zápis $X = \{m \in \mathbf{N} : m \text{ je sudé číslo}\}$ znamená, že množina X je složena ze všech sudých přirozených čísel (symbol $\mathbf{N}$ bude i nadále označovat množinu všech přirozených čísel).

Podmnožina množiny X je množina Y, jejíž každý prvek je také prvkem množiny X. Je-li Y podmnožinou množiny X, píšeme $Y \subset X$. Pro pocvičení ve formálním zápisu můžeme definici vyjádřit takto:

$$Y \subset X \quad \text{právě když} \quad \forall y : y \in Y \Rightarrow y \in X.$$

Všimněme si, že *prázdná množina* $\emptyset$ (tj. množina, která nemá žádné prvky) je podle definice podmnožinou každé množiny.

[1] Neříkáme už ale, co to je objekt. V tom právě spočívá intuitivnost našeho přístupu.

Mezi pojmy prvek a podmnožina je zásadní a někdy přehlížený rozdíl. Je-li $X = \{1, 2, 3\}$, pak platí $1 \in X$, ale zápis $1 \subset X$ nemá smysl, protože přirozené číslo 1 (alespoň zatím) nepovažujeme za množinu. Podobně platí $\{1\} \subset X$, ale neplatí $\{1\} \in X$. Další podmnožiny množiny X jsou například $\emptyset$, $\{2, 3\}$ nebo X.

Jiný příklad: platí $\emptyset \subset \emptyset$, ale $\emptyset \notin \emptyset$, protože množina $\emptyset$ žádné prvky neobsahuje.

S množinami lze provádět následující základní operace. *Průnik* $X \cap Y$ sestává ze všech společných prvků množin X a Y, *sjednocení* $X \cup Y$ ze všech prvků alespoň jedné z množin X a Y, *rozdíl* $X - Y$ (psáno také $X \setminus Y$) je složen ze všech prvků množiny X, které nejsou obsaženy v množině Y. *Kartézský součin* $X \times Y$ množin X a Y je množina všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in X$ a $y \in Y$.

Cvičení

▶ **1.1** Napište formální definici sjednocení, průniku a rozdílu množin.

▶ **1.2** Dvě množiny A, B jsou si *rovny*[2], pokud mají přesně tytéž prvky, tedy pokud platí $A \subset B$ a $B \subset A$. Dokažte přímo z definic, že pro množiny A, B, C platí

$$C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B).$$

▶ **1.3** Nechť A je n-prvková množina. Kolik má podmnožin? Kolik z těchto podmnožin má sudý počet prvků?

▶ **1.4** Počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny označujeme symbolem $\binom{n}{k}$ (čteno ‘n nad k’). Číslům $\binom{n}{k}$ se říká *kombinační čísla*.

(a) Vyjádřete $\binom{n}{k}$ jako výraz v proměnných n, k. Určete kombinační čísla $\binom{6}{3}$, $\binom{10}{6}$, $\binom{10}{0}$ a $\binom{0}{0}$.

(b) Dokažte, že platí

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(c) Dokažte

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

▶ **1.5** Spočítejte:

[2] Tento ‘očividný fakt’ je vlastně definicí rovnosti množin. V teorii množin jde o jeden ze základních axiomů.

(a)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

▶ **1.6** *Symetrický rozdíl* množin A, B definujeme předpisem

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Dokažte podrobně:

(a) $A \triangle (A \cap B) = A - (A \cap B)$,

(b) $A \triangle (A \cup B) = (A \cup B) - A$.

▶ **1.7** Dokažte:

$$X \subset A \cup B \iff (X - A) \subset B \iff (X - A) \cap (X - B) = \emptyset.$$

▶ **1.8** Dokažte de Morganova pravidla:

(a) $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$,

(b) $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$.

▶ **1.9** Platí pro libovolnou čtveřici množin rovnost $A \times B = C \times D$ právě tehdy, když $A = C$ a $B = D$? Jak se situace změní, nahradíme-li všechny symboly rovnosti '$=$' symbolem '$\subset$'?

1.2 Relace

Mějme dvě množiny X,Y a představme si, že každý prvek $x \in X$ může (a nemusí) být ve 'vztahu' R s libovolným počtem prvků $y \in Y$. Na tento vztah nejsou kladeny žádné další podmínky.

Přirozeným způsobem, jak takový vztah popsat, je vyjmenovat všechny dvojice (x, y) prvků $x \in X$ a $y \in Y$, které spolu jsou ve vztahu R. Připomeneme-li si, že kartézský součin $X \times Y$ je v oddílu 1.1 definován jako množina všech uspořádaných dvojic s prvním prvkem z množiny X a druhým prvkem z množiny Y, dostáváme se k následující definici pojmu relace:

Definice 1.1 *Relace z množiny X do množiny Y* je libovolná podmnožina R kartézského součinu $X \times Y$.

Takové relaci se říká *binární*, protože určuje vztah mezi dvojicemi objektů. Definici lze snadno zobecnit na *n-ární relace* (vztahy mezi n-ticemi prvků), ale nás zajímá především binární případ.

Je-li dána relace R z množiny X do množiny Y, pak pro každou dvojici $(x, y) \in R$ také píšeme $x\,R\,y$ (a čteme ‘prvek x je v relaci R s prvkem y’). Daný prvek $x \in X$ ovšem nemusí být v relaci R s žádným prvkem množiny Y (v extrémním případě může být relace R třeba prázdná). Proto definujeme *levý obor* relace R jako

$$L(R) = \{x \in X : \text{existuje nějaké } y \in Y \text{ tak, že } x\,R\,y\}$$

a podobně *pravý obor*

$$P(R) = \{y \in Y : \text{existuje nějaké } x \in X \text{ tak, že } x\,R\,y\}$$

Příklad 1.2 Vezměme si například množiny $X = \{2, 3, 5\}$ a $Y = \{1, 4, 7, 10\}$. Jedna z relací z množiny X do množiny Y pak vypadá třeba takto:

$$R = \{(2, 4), (2, 10), (5, 10)\}.$$

Relace R má shodou okolností dosti přirozený popis; platí totiž, že x je v relaci s y, právě když x dělí y. To ale vůbec není podmínkou: stejně tak je relací z X do Y třeba množina $\{(2, 4), (3, 7), (5, 1)\}$, u které žádný takový popis asi nenajdeme.

Cvičení

▶ **1.10** Mějme množiny přirozených čísel $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Určete levý a pravý obor relace

$$R = \{(a, b) : a \geq b, a \in A, b \in B\}$$

z množiny A do množiny B.

▶ **1.11** Nechť $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ jsou dvě množiny. Uvažme následující relace z A do B:

$$\begin{aligned} R &= \{(1, a), (1, c), (2, b), (3, a), (3, b), (4, b), (4, c), (4, d)\} \\ T &= \{(1, b), (1, c), (3, a), (4, a)\}. \end{aligned}$$

Určete množiny $R \cup T$, $R \cap T$, $R - T$ a symetrický rozdíl $R \bigtriangleup T$. Jedná se ve všech případech o relace?

▶ **1.12** Mějme m-prvkovou množinu X a n-prvkovou množinu Y. Kolik je všech binárních relací z X do Y? (Hádáte-li $m \cdot n$, přečtěte si ještě jednou definici.)

▶ **1.13** Nechť R a S jsou relace z množiny X do množiny Y. Řekneme, že relace R *implikuje* relaci S, platí-li

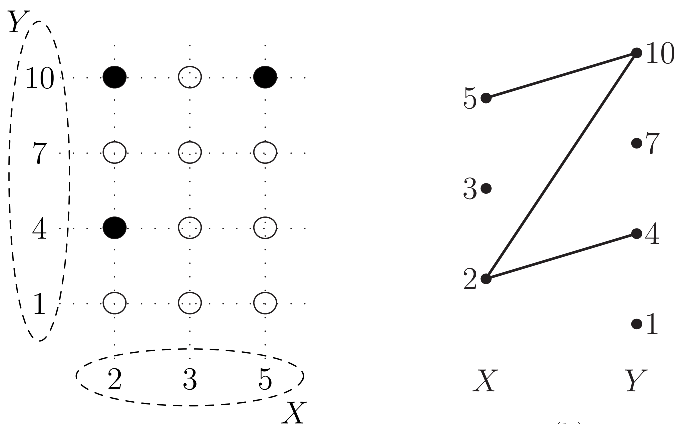
$$x\,R\,y \Rightarrow x\,S\,y$$

pro každé $x \in X$ a $y \in Y$. Co to znamená o relacích R a S jakožto o množinách uspořádaných dvojic?

1.3 Znázornění relací

Relaci R z minulého příkladu můžeme znázornit několika užitečnými způsoby. Na obr. 1.1a je znázorněn kartézský součin $X \times Y$, v němž jsou plnými kroužky zvýrazněny prvky relace R. Na obr. 1.1b pak jednotlivým prvkům množin X a Y odpovídají body, přičemž množina X je zobrazena vlevo a množina Y vpravo. Dva body jsou spojeny čarou, pokud jsou odpovídající prvky v relaci R. Relace R je tak znázorněna v podobě *grafu*, což je pojem, kterým se budeme zabývat v pozdějších přednáškách.

Těmto dvěma typům znázornění relace R budeme říkat *kartézské* a *grafové* znázornění.



(a) (b)

Obrázek 1.1: Dva způsoby zobrazení relace: (a) jako podmnožina kartézského součinu, (b) jako graf.

Cvičení

▶ **1.14** Jak z obr. 1.1a a 1.1b poznáme levý a pravý obor relace R?

▶ **1.15** Znázorněte oběma způsoby relaci R ze cvičení 1.10.

1.4 Skládání relací

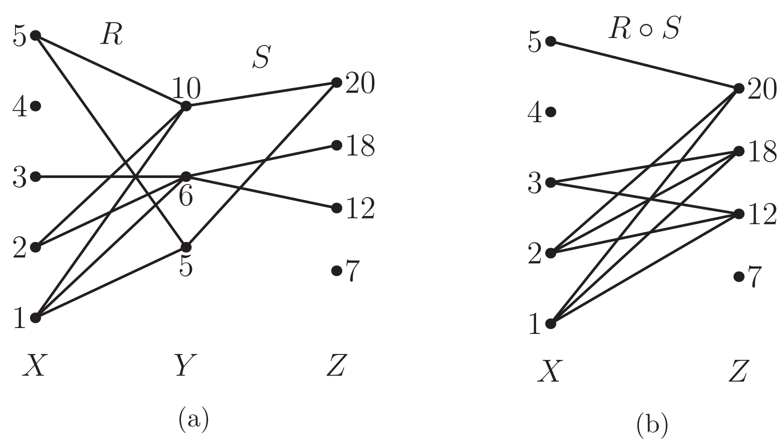
Za chvíli uvidíme, že zobrazení (funkce), jak je známe z analýzy, jsou speciálním případem relací. Následující definice skládání relací je zobecněním představy skládání funkcí.

Definice 1.3 Nechť R je relace z množiny X do množiny Y a S je relace z množiny Y do množiny Z. Pak *složení relací R a S* je relace $R \circ S \subset X \times Z$ z množiny X do množiny Z, definovaná takto:

$$(x,z) \in R \circ S, \text{ právě když existuje } y \in Y \text{ tak, že } x\,R\,y \text{ a } y\,S\,z,$$

kde $x \in X$ a $z \in Z$. Všimněme si, že složení relací R,S je definováno jen v případě, že relace R ‘končí’ v množině, kde S ‘začíná’.

Podívejme se na konkrétní příklad. Nechť $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{5,6,10\}$ a $Z = \{7,12,18,20\}$, a definujme relace $R \subset X \times Y$ a $S \subset Y \times Z$ opět pomocí dělitelnosti (tedy například pro $x \in X$ a $y \in Y$ bude $(x,y) \in R$, pokud x dělí y). V grafovém znázornění relací R a S dostaneme situaci na obr. 1.2a.



Obrázek 1.2: (a) Relace R a S, (b) jejich složení.

Z definice skládání plyne, že prvky $x \in X$ a $z \in Z$ budou v relaci $R \circ S$, pokud se z x do z dá přejít ‘po spojnicích’ přes nějaký prvek $y \in Y$. Ověřte, že $R \circ S$ vypadá jako na obr. 1.2b.

V tomto znázornění relace je průhledný i další pojem: inverzní relace.

Definice 1.4 *Relace inverzní* k relaci $R \subset X \times Y$ je relace $R^{-1} \subset Y \times X$, definovaná vztahem

$$y\,R^{-1}\,x \text{ právě když } x\,R\,y$$

pro $x \in X, y \in Y$.

V grafovém znázornění se přechod k inverzní relaci projeví zrcadlovým otočením obrázku podle svislé osy. Jak tomu bude v kartézském znázornění? (Cvičení 1.18.)

Vezměme například relaci S z obr. 1.2a. Relace inverzní k S bude

$$S^{-1} = \{(20,5),(12,6),(18,6),(20,10)\}$$

a jedná se o relaci z množiny Z do množiny Y.

Nechť je dána množina X. Místo o ‘relaci z X do X’ mluvíme prostě o *relaci na množině* X. Všimněme si, že pro každé dvě relace na X je definováno jejich složení. Význačným příkladem relace na množině X je *identická relace*

$$E_X = \{(x, x) : x \in X\}.$$

Co se stane, složíme-li relaci $R \subset X \times Y$ s relací k ní inverzní? Zjevně $R \circ R^{-1}$ je relace na množině X a lákavá hypotéza je, že je rovna identické relaci E_X. To ale není pravda, jak ukazuje třeba prázdná relace $R = \emptyset$, pro kterou je $R \circ R^{-1}$ rovněž prázdná. Obecně neplatí ani jedna z inkluzí mezi E_X a $R \circ R^{-1}$. (Viz cvičení 1.19.) Podobně je tomu u opačného pořadí skládání, totiž pro relace $R^{-1} \circ R$ a E_Y.

Záleží u skládání operací na pořadí? Obecně samozřejmě ano — pokud R je relace z X do Y, a S je relace z Y do Z, pak $R \circ S$ je dobře definovaná relace, zatímco $S \circ R$ definována není.

Ovšem pokud $R \circ S$ jsou relace na množině X, pak tento problém nemůže nastat. Ani tam ale nemusí být $R \circ S = S \circ R$. Důkazem je tato situace: množina X je dvouprvková, $X = \{a, b\}$. Relace $R \subset X \times X$ sestává z jediné dvojice (a, a), zatímco $S = \{(a, b)\}$. Pak platí $R \circ S = \{(a, b)\}$, zatímco $S \circ R$ je prázdná.

Dalším příkladem je třeba relace $T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ na množině $\{1, 2, 3\}$, pro kterou platí $T \circ T^{-1} \neq T^{-1} \circ T$. (Ověřte.)

Třebaže u skládání relací záleží na jejich pořadí (není to tedy *komutativní* operace), jednou pěknou vlastností nás skládání překvapí. Je totiž *asociativní*, což znamená, že nezáleží na způsobu, jakým relace uzávorkujeme. Přesněji to vyjadřuje následující věta. Její důkaz může být při prvním čtení poněkud obtížný, vyplatí se ale jej důkladně prostudovat.

Věta 1.5 (O asociativitě skládání relací) *Nechť $R \subset X \times Y$, $S \subset Y \times Z$ a $T \subset Z \times W$ jsou relace. Potom*

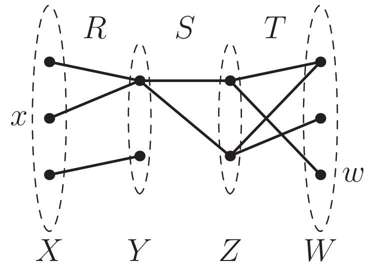
$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

Důkaz. K lepšímu pochopení důkazu může pomoci, budeme-li si relace R, S, T představovat v grafovém znázornění jako na obr. 1.3.

Dejme tomu, že $x \in X$ a $w \in W$ jsou spolu v relaci $R \circ (S \circ T)$. Podle definice složení relací R a $S \circ T$ to znamená, že existuje $y \in Y$ tak, že $x\, R\, y$ a $y\, (S \circ T)\, w$. Opět z definice složení relací S a T existuje $z \in Z$ tak, že $y\, S\, z$ a $z\, T\, w$.

Jinak řečeno, pokud $x\, (R \circ (S \circ T))\, w$, pak existují $y \in Y$ a $z \in Z$ tak, že $x\, R\, y\, S\, z\, T\, w$ (tj. v našem obrázku lze z x do w přejít ‘po spojnicích’ zleva doprava). A tato implikace platí i obráceně, což plyne přímo z definice skládání.

Stejně se dokáže, že $x\, ((R \circ S) \circ T)\, w$, právě když existují $y \in Y$ a $z \in Z$ tak, že $x\, R\, y\, S\, z\, T\, w$. To ovšem znamená, že platí $x\, (R \circ (S \circ T))\, w$, právě když platí $x\, ((R \circ S) \circ T)\, w$, protože obě tato tvrzení jsou ekvivalentní téže podmínce. Z toho už vyplývá dokazovaná věta. $\square$



Obrázek 1.3: Ilustrace k důkazu věty 1.5.

Cvičení

▶ **1.16** Jak vypadá relace E_X ve znázorněních z obr. 1.1?

▶ **1.17** Je-li R relace na X, jak vypadá složení $R \circ E_X$ a $E_X \circ R$?

▶ **1.18** Jak se liší kartézské znázornění relace R a inverzní relace R^{-1}?

▶ **1.19** Najděte množinu X a relaci R na X s vlastností:

(a) $R \circ R^{-1} \subset E_X$,

(b) $E_X \subset R \circ R^{-1}$,

(c) $R \circ R^{-1} \neq R^{-1} \circ R$,

(d) $R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R$.

▶ **1.20** Mějme dvě relace R a S na množině X s vlastností $L(R) = P(S)$ a $L(S) = P(R)$. Jsou pak R a S *záměnné*, tj. platí pak $R \circ S = S \circ R$?

▶ **1.21** Nechť R, S, T jsou binární relace na množině X. Dokažte podrobně:

(a) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$,

(b) $(R \cup S) \circ T = (R \cup T) \circ (S \cup T)$.

Zůstane vztah (b) v platnosti, nahradíme-li v něm všechny symboly sjednocení za průnik?

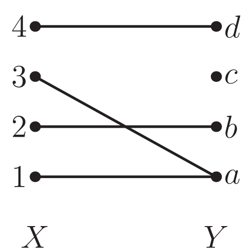
1.5 Zobrazení

Zobrazení je speciálním případem relace.

Definice 1.6 *Zobrazení* (nebo také *funkce*) z množiny X do množiny Y je relace $f \subset X \times Y$, pro kterou platí, že pro každý prvek $x \in X$ existuje *právě jeden* prvek $y \in Y$ tak, že $(x, y) \in f$. Skutečnost, že f je zobrazením z X do Y, zapisujeme jako $f : X \to Y$.

Pro $x \in X$ nazýváme ono jediné y *hodnotou* zobrazení f v bodě x a píšeme $f(x) = y$. Říkáme také, že prvek x je *vzorem* prvku y při zobrazení f. Nepřehlédněme, že libovolný prvek může mít více vzorů.

Například relace f z množiny $X = \{1, 2, 3, 4\}$ do množiny $Y = \{a, b, c, d\}$ na obr. 1.4 je zobrazením. Platí třeba $f(3) = a$ atd.



Obrázek 1.4: Zobrazení $f : X \to Y$.

Zobrazení mohou mít několik důležitých vlastností.

Definice 1.7 Zobrazení $f : X \to Y$ je

- *prosté*, pokud každé $y \in Y$ má nejvýše jeden vzor při zobrazení f,
- *na*, pokud každé $y \in Y$ má alespoň jeden vzor při zobrazení f,
- *vzájemně jednoznačné* (jinak též *bijekce*), pokud je prosté a na.

Zobrazení f z obr. 1.4 není ani prosté, ani na, neboť prvek c nemá vzor, zatímco a má hned dva.

Co se stane, utvoříme-li inverzní relaci k nějakému zobrazení $f : X \to Y$? Tato inverzní relace f^{-1} je vždy definována (je dokonce definována pro libovolnou relaci), ale nemusí to být zobrazení (viz cvičení 1.22). Příkladem je třeba právě zobrazení f z obr. 1.4.

Cvičení

▶ **1.22** Ukažte, že inverzní relace f^{-1} k zobrazení $f : X \to Y$ je sama zobrazením, právě když f je bijekce.

▶ **1.23** Nechť $f \colon X \to Y$ a $g \colon Y \to Z$ jsou dvě zobrazení. Dokažte, že $f \circ g$ je zobrazení.

▶ **1.24** Nechť N je n-prvková množina a M je m-prvková množina. Určete počet:

(a) zobrazení množiny N do množiny M,

(b) prostých zobrazení N do M,

(c) zobrazení N na M,

(d) bijekcí mezi N a M.

▶ **1.25** Najděte příklad funkce $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, která

(a) je prostá, ale není na,

(b) je na, ale není prostá.

▶ **1.26** (a) Je-li $g \circ f$ funkce na, musí f být na? Musí g být na?

(b) Je-li $g \circ f$ prostá funkce, musí f být prostá? Musí g být prostá?

▶ **1.27** Nechť $p : Y \to Z$ je prostá funkce. Ukažte, že pro funkce $f, g : X \to Y$ platí, že pokud $p \circ f = p \circ g$, potom $f = g$. Najděte analogický fakt pro funkci p, která je na.

▶ **1.28** Dokažte, že funkce f je jakožto relace na množině X:

(a) reflexívní, právě když f je identická funkce,

(b) symetrická, právě když f je bijekce a $f = f^{-1}$,

(c) tranzitivní, právě když pro všechna $y \in f(X)$ platí $y \in f^{-1}(y)$, kde $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$.

Jak je možné charakterizovat antisymetrické funkce?

▶ **1.29** Mějme funkce $f \colon S \to T$, $g \colon T \to S$. Řekneme, že g je *pravá*, resp. *levá inverzní funkce* k f, platí-li $f \circ g = E_T$, resp. $g \circ f = E_S$. Dokažte, že funkce f je:

(a) injektivní, právě když f má pravou inverzní funkci,

(b) surjektivní, právě když f má levou inverzní funkci,

(c) bijektivní, právě když má pravou i levou inverzní funkci a tyto funkce jsou shodné.

▶ **1.30** Relace $R \subseteq A \times B$ je:

(a) funkce, právě když R^{-1} je funkce,

(b) bijekce, právě když R^{-1} je bijekce,

Dokažte.

▶ **1.31** Dokažte, že pro bijekce $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ platí:

(a) $E_X = f \circ f^{-1}$,

(b) $E_Y = f^{-1} \circ f$,

(c) $f \circ g$ je bijekce.

▶ **1.32** Najděte bijekci:

(a) množiny sudých celých čísel $2\mathbf{Z}$ na množinu celých čísel $\mathbf{Z}$,

(b) množiny celých čísel $\mathbf{Z}$ na množinu kladných celých čísel $\mathbf{N}^+$,

(c) množiny všech racionálních čísel $\mathbf{Q}$ na množinu $\mathbf{N}$.

▶ **1.33** Dokažte, že funkce $f\colon \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definovaná předpisem $f(m,n) = 3^n \cdot 2^m$ je bijekce.

1.6 Znázornění relací na množině X

Pro tuto chvíli opustíme relace z množiny X do množiny Y a budeme se věnovat výhradně relacím na jediné množině X. Pro takové relace máme k dispozici ještě několik typů znázornění. Vezměme si jako příklad relaci R na množině $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ definovanou vztahem

$$R = \{(a,a),(f,f),(a,c),(a,e),(b,d),(b,f),(f,c),(e,a),(c,e)\}.$$

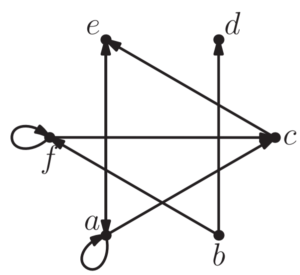
U *maticového* znázornění relace R sestrojíme matici, řekněme $M(R)$, jejíž řádky (a právě tak sloupce) jednoznačně odpovídají prvkům množiny X. V matici $M(R)$ bude na řádku odpovídajícím prvku x a ve sloupci odpovídajícím prvku y

jednička, pokud $x\,R\,y$, a v opačném případě tam bude nula. Pro výše uvedenou relaci R dostaneme matici

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

v níž řádky odpovídají shora dolů (a sloupce zleva doprava) prvkům $a, \ldots, f$.

Další variantou je znázornění v podobě *orientovaného grafu.* Idea je podobná jako u grafového znázornění, ovšem s tím, že nyní můžeme ušetřit jednu množinu bodů. Každý prvek množiny x bude nyní zastoupen jen jedním bodem (a ne dvěma, jako by tomu bylo na obr. 1.1b). Vztah $x\,R\,y$ znázorníme šipkou z bodu x do bodu y. Výsledek pro výše uvedenou relaci R je na obr. 1.5.



Obrázek 1.5: Relace R jako orientovaný graf.

1.7 Vlastnosti relací

Vzhledem k obecnosti pojmu relace je přirozené, že se relace dále dělí podle toho, zda mají nebo nemají určité základní vlastnosti.

Definice 1.8 Relace R na množině X je

- *reflexívní*, pokud pro každé $x \in X$ platí $x\,R\,x$,
- *symetrická*, pokud pro každé $x, y \in X$,

$$x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x,$$

- *slabě antisymetrická*, pokud pro každé $x, y \in X$,

$$x\,R\,y \;\text{ a }\; y\,R\,x \Rightarrow x = y,$$

- *tranzitivní*, pokud pro každé $x, y, z \in X$,

$$x\,R\,y \quad \text{a} \quad y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z.$$

Tyto vlastnosti většinou mají srozumitelnou interpretaci v jednotlivých znázorněních relace R. Uvažme třeba znázornění pomocí orientovaného grafu. Reflexívní relaci poznáme podle toho, že v tomto orientovaném grafu je u každého z bodů 'smyčka', u symetrické relace má každá z čar svou dvojnici v opačném směru, atd. (Dále viz cvičení 1.38.)

Příklad 1.9 Uvažme relaci S, definovanou na množině kladných reálných čísel $\mathbf{R}^+$ předpisem

$$x\,S\,y \quad \text{právě když} \quad 2x < y.$$

Tato relace není reflexívní, protože dokonce pro žádné $x \in \mathbf{R}^+$ není $2x < x$. Není ani symetrická (stačí uvážit $x = 1, y = 3$), a to do té míry, že je dokonce slabě[3] antisymetrická. Kdyby totiž $2x < y$ a $2y < x$, pak bychom dostali $4x < x$, což je na $\mathbf{R}^+$ nemožné. Žádná dvojice tedy nesplňuje předpoklad implikace v definici antisymetričnosti. Relace S je také tranzitivní: pokud $2x < y$ a $2y < z$, pak $2x < z/2$ a tedy $2x < z$.

Situace se dramaticky změní, pokud uvažujeme relaci S' zadanou stejným předpisem, ale na množině záporných reálných čísel $\mathbf{R}^-$. Relace S' totiž *je* reflexívní a *není* slabě antisymetrická (dokažte!). Není ani tranzitivní, jak ukazuje trojice $x = -2, y = -3, z = -4$, pro kterou máme $2x < y$ a $2y < z$, ale neplatí $2x < z$.

Cvičení

▶ **1.34** Nechť $X \subset \mathbf{Z}$ je nějaká množina celých čísel. *Relace dělitelnosti* na X je množina všech dvojic $(x, y) \in X^2$ takových, že x dělí y (tj. existuje $k \in \mathbf{Z}$ s vlastností $kx = y$). Dokažte, že relace dělitelnosti je slabě antisymetrická na množině přirozených čísel $\mathbf{N}$, ale ne na množině nenulových celých čísel $\mathbf{Z} - \{0\}$.

▶ **1.35** Rozhodněte, zda relace S v následující tabulce jsou na příslušných množinách X (1) reflexívní, (2) symetrické, (3) slabě antisymetrické, (4) tranzitivní. Kladné odpovědi dokažte, záporné doložte protipříkladem.

[3] I silně, ale tento pojem jsme zatím nedefinovali.

	množina X	$x\,S\,y$, pokud...
(a)	$\mathbf{R}$	$x \leq y$
(b)	$\mathbf{R}$	$x < y$
(c)	rovina $\mathbf{R}^2$	vzdálenost bodů x a y je ≤ 1
(d)	přímky v $\mathbf{R}^2$	x je rovnoběžná s y
(e)	$\{1, 2, 3, 4\}$	$(x, y) \in \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}$
(f)	přirozená čísla $\mathbf{N}$	x dělí y
(g)	nenulová celá čísla $\mathbf{Z} - \{0\}$	x dělí y
(h)	uzavřený interval $[0, 1]$	$x + y \leq xy$
(i)	$\mathbf{N}$	$x^2 \leq y$
(j)	$[0, 1)$	$x^2 \leq y$
(k)	$\mathbf{R}$	$x < 2y$
(l)	$\mathbf{R}$	$x - y \in \mathbf{Z}$.

▶ **1.36** Je libovolná tranzitivní a symetrická relace na nějaké množině nutně reflexívní?

▶ **1.37** Dokažte, že je-li relace na množině symetrická i antisymetrická, je nutně tranzitivní. Charakterizujte tyto relace.

▶ **1.38** Jak poznáme z maticového znázornění, zda je relace reflexívní a symetrická?

▶ **1.39** Dokažte, že relace R na množině X je tranzitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$.

▶ **1.40** Nechť R je relace na množině X. *Tranzitivní uzávěr* relace R je relace R^+ (rovněž na X) sestávající ze všech dvojic (x, y), pro které lze najít konečný počet prvků $z_1, \ldots, z_k$ s vlastností

$$x\,R\,z_1\,R\,z_2\,R\,\ldots\,R\,z_k\,R\,y.$$

(Tento zkrácený zápis samozřejmě znamená $x\,R\,z_1$, $z_1\,R\,z_2$ atd.) Dokažte, že

(a) R^+ je tranzitivní relace,

(b) je to dokonce nejmenší tranzitivní relace na X obsahující R. (Přesněji: pokud T je tranzitivní relace na X, která obsahuje relaci R, pak také $R^+ \subset T$.)

▶ **1.41** Nechť relace R na množině X je reflexívní (symetrická, antisymetrická, tranzitivní). Je pak R^{-1} také reflexívní (symetrická, antisymetrická, tranzitivní)?

1.8 Ekvivalence a rozklady

Význačné místo mezi relacemi mají ekvivalence.

Definice 1.10 *Ekvivalence na množině* X je relace R na množině X, která je reflexívní, symetrická a tranzitivní.

Příklad 1.11 Dobrý příklad ekvivalence se objevil ve cvičení 1.35. Nechť X je množina všech přímek v rovině. Definujme na X relaci R předpisem

$$(p, q) \in R \quad \text{právě když} \quad p \text{ a } q \text{ jsou rovnoběžné přímky.}$$

Pečlivý čtenář již určitě nahlédl, že relace má všechny tři vlastnosti z definice ekvivalence.

Příklad 1.12 Důležitým příkladem ekvivalence, který se nám bude hodit v příští kapitole, je *kongruence modulo* p. Jde o relaci na množině celých čísel $\mathbf{Z}$. Zvolme pevně celé číslo p a definujme relaci $\equiv$ na $\mathbf{Z}$ předpisem

$$x \equiv y \quad \text{právě když} \quad p \text{ dělí } x - y.$$

(Připomeňme, že p *dělí* $x - y$, pokud $x - y = pk$ pro nějaké $k \in \mathbf{Z}$.)

Relace $\equiv$ je reflexívní, protože p jistě pro každé x dělí číslo $x - x = 0$. Je také symetrická, neboť pokud $x - y = kp$, pak $y - x = (-k) \cdot p$.

Dokažme, že $\equiv$ je tranzitivní. Mějme x, y, z s vlastností $x \equiv y$ a $y \equiv z$. Je tedy $x - y = kp$ a $y - z = \ell p$ pro nějaké k, ℓ. Pak ovšem

$$x - z = (x - y) + (y - z) = kp + \ell p = p(k + \ell)$$

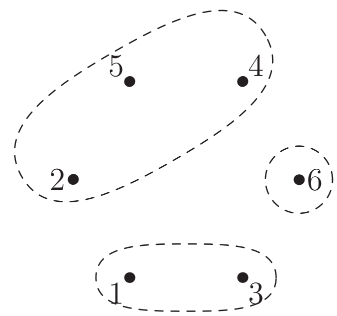
a $x \equiv z$. Tím je tranzitivita dokázána. Relace $\equiv$ tedy skutečně je ekvivalence.

Relacím, které jsou pouze reflexívní a symetrické (a nemusí být tranzitivní) se někdy říká *tolerance*.

Příklad 1.13 Nechť X je množina všech k-tic nul a jedniček, kde $k \geq 2$. Dvě k-tice jsou v relaci R, pokud se liší nejvýše v jednom symbolu. Taková relace R je tolerancí, nikoli však ekvivalencí (ověřte!). Jak je tomu pro $k = 1$?

Ekvivalence úzce souvisí s pojmem rozkladu množiny.

Definice 1.14 Nechť X je množina. (Neuspořádaný) soubor podmnožin $\{X_i\}_{i \in I}$ množiny X je *rozklad* množiny X, pokud množiny X_i jsou neprázdné, navzájem disjunktní a jejich sjednocením je celá množina X. Množiny X_i nazýváme *třídy* rozkladu $\{X_i\}_{i \in I}$.



Obrázek 1.6: Rozklad množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soubor $\mathcal{S} = \{\{1, 3\}, \{6\}, \{2, 4, 5\}\}$, znázorněný na obr. 1.6, je například rozkladem množiny $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, zatímco soubory $\{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}\}$ a $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$ nikoli. Zdůrazněme, že u rozkladu nezáleží na pořadí, ve kterém jsou jeho třídy uvedeny, takže soubor $\{\{2, 4, 5\}, \{6\}, \{1, 3\}\}$ je totožný s rozkladem $\mathcal{S}$.

Věta 1.15 *Ekvivalence na X jednoznačně odpovídají rozkladům X.*

Důkaz. Ukážeme, jak dané ekvivalenci $\sim$ na množině X přiřadit rozklad $X/\sim$ množiny X. Pro $x \in X$ definujme *třídu prvku* x předpisem

$$[x]_\sim = \{y \in X : x \sim y\}.$$

Místo $[x]_\sim$ budeme psát stručněji $[x]$.

Tvrdíme, že pro $x, y \in X$ jsou třídy $[x]$, $[y]$ buď shodné nebo disjunktní. Dejme tomu, že nejsou disjunktní, tedy existuje $z \in [x] \cap [y]$.

Vezměme libovolný prvek $x' \in [x]$. Máme $x \sim x'$ a ze symetrie také $x' \sim x$. Protože $z \in [x]$, je rovněž $x \sim z$, takže z tranzitivity plyne $x' \sim z$. Konečně z faktu $z \in [y]$ dostaneme $y \sim z$, takže $z \sim y$ a z tranzitivity $x' \sim y$. Jinými slovy $x' \in [y]$. Ukázali jsme, že každý prvek x' třídy $[x]$ je rovněž prvkem třídy $[y]$. Totéž ale platí i naopak (důkaz je stejný), takže $[x] = [y]$. To jsme chtěli dokázat.

Vezmeme-li tedy soubor množin $X/\sim\, = \{[x]\}_{x \in X}$ (který obsahuje každou třídu pouze jednou!), dostaneme systém disjunktních podmnožin množiny x. Díky reflexivitě je každá třída neprázdná (protože $x \in [x]$) a sjednocením všech tříd je množina X. Jedná se tedy o rozklad množiny X.

Je-li naopak dán rozklad $\{X_i\}_{i \in I}$ množiny X, definujme relaci R předpisem

$$x\,R\,y, \quad \text{pokud } x \text{ a } y \text{ jsou prvky téže množiny } X_i.$$

Relace R je takřka z triviálních důvodů ekvivalencí (proč?).

K dokončení důkazu zbývá si všimnout, že pokud podle výše uvedených předpisů přiřadíme nějaké ekvivalenci $\sim$ rozklad a tomu zase ekvivalenci, dostaneme právě výchozí ekvivalenci $\sim$. Podobně je tomu, vyjdeme-li od rozkladu. Popsaná korespondence mezi rozklady a ekvivalencemi tedy opravdu představuje vzájemně jednoznačný vztah. $\square$

Třídy rozkladu, který odpovídá ekvivalenci $\sim$, se nazývají *třídy ekvivalence* $\sim$.

Příklad 1.16 Uvažme relaci R na množině $\{1, \ldots, 6\}$ s následujícím maticovým znázorněním:

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(Řádky i sloupce odpovídají po řadě prvkům 1,. . . ,6.) Ověřte, že se jedná o ekvivalenci. Sestrojíme-li příslušný rozklad jako v důkazu věty 1.15, dostaneme právě rozklad na obr. 1.6.

Cvičení

▶ **1.42** Dokažte: složení $R \circ S$ ekvivalencí R a S je ekvivalence, právě když R a S jsou záměnné (tj. $R \circ S = S \circ R$).

▶ **1.43** Definujme relaci $\sim$ podobně jako $\equiv$ v příkladu 1.12, s jedním malým rozdílem:

$$x \sim y \quad \text{právě když existuje } \textit{přirozené } k \text{ tak, že } x - y = kp,$$

kde k přirozeným číslům řadíme i nulu. Je relace $\sim$ ekvivalence?

▶ **1.44** Dokažte, že průnik libovolného souboru ekvivalencí na dané množině X je rovněž ekvivalence.

▶ **1.45** Nechť R a S jsou ekvivalence na množině X. Rozhodněte, které z následujících relací jsou nutně také ekvivalence:

(a) $R \cup S$,

(b) $R - S$,

(c) $R \circ S$.

▶ **1.46** Zjistěte, zda následující relace na množině $\mathbf{R}^2$ jsou ekvivalence, a případně najděte geometrickou interpretaci jejich tříd. U každého případu je uvedena podmínka pro to, aby dvojice (x, y) a (z, w) z množiny $\mathbf{R}^2$ byly spolu v relaci.

(a) $y - x = w - z$,

(b) $y - kx = w - kz$ (kde $k \in \mathbf{R}$),

(c) $x^2 + 4y^2 = z^2 + 4w^2$.

▶ **1.47** Nechť $\mathbf{R}^{n\times n}$ je množina všech reálných matic o rozměrech $n \times n$. Pro dvě takové matice A, B definujme[4]

$$\begin{aligned} A \approx B, &\qquad \text{pokud } A \text{ a } B \text{ mají stejnou hodnost,} \\ A \simeq B, &\qquad \text{pokud } A \text{ a } B \text{ jsou podobné matice.} \end{aligned}$$

Ukažte, že obě tyto relace jsou ekvivalence na $\mathbf{R}^{n\times n}$, a určete počet jejich tříd.

▶ **1.48** Nakreslete relaci R z příkladu 1.16 jako orientovaný graf.

▶ **1.49** Matici $M(R)$ z příkladu 1.16 je možné prohozením dvou řádků a dvou sloupců převést do velmi speciálního ‘blokového’ tvaru. Pokuste se tento tvar definovat, a na tomto základě formulovat obecnou charakterizaci ekvivalencí ve tvaru ‘R je ekvivalence, právě když $M(R)$ má přerovnání do blokového tvaru’. Jak souvisí blokový tvar s třídami ekvivalence?

[4]Připomeňme, že A a B jsou *podobné*, pokud existuje matice P s vlastností $B = PAP^{-1}$, a že *hodnost* matice je maximální počet lineárně nezávislých řádek.